Laboratorio II, modulo 2
2016-2017

Segnali a tempo discreto

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_04.pdf

e http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_06.pdf

Luise, Vitetta, D'Amico Teoria dei segnali analogici)

Equazioni di analisi

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i 2\pi k f_0 t} dt$$

Segnale periodico

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i 2\pi f t} dt$$

Segnale aperiodico

Equazioni di sintesi

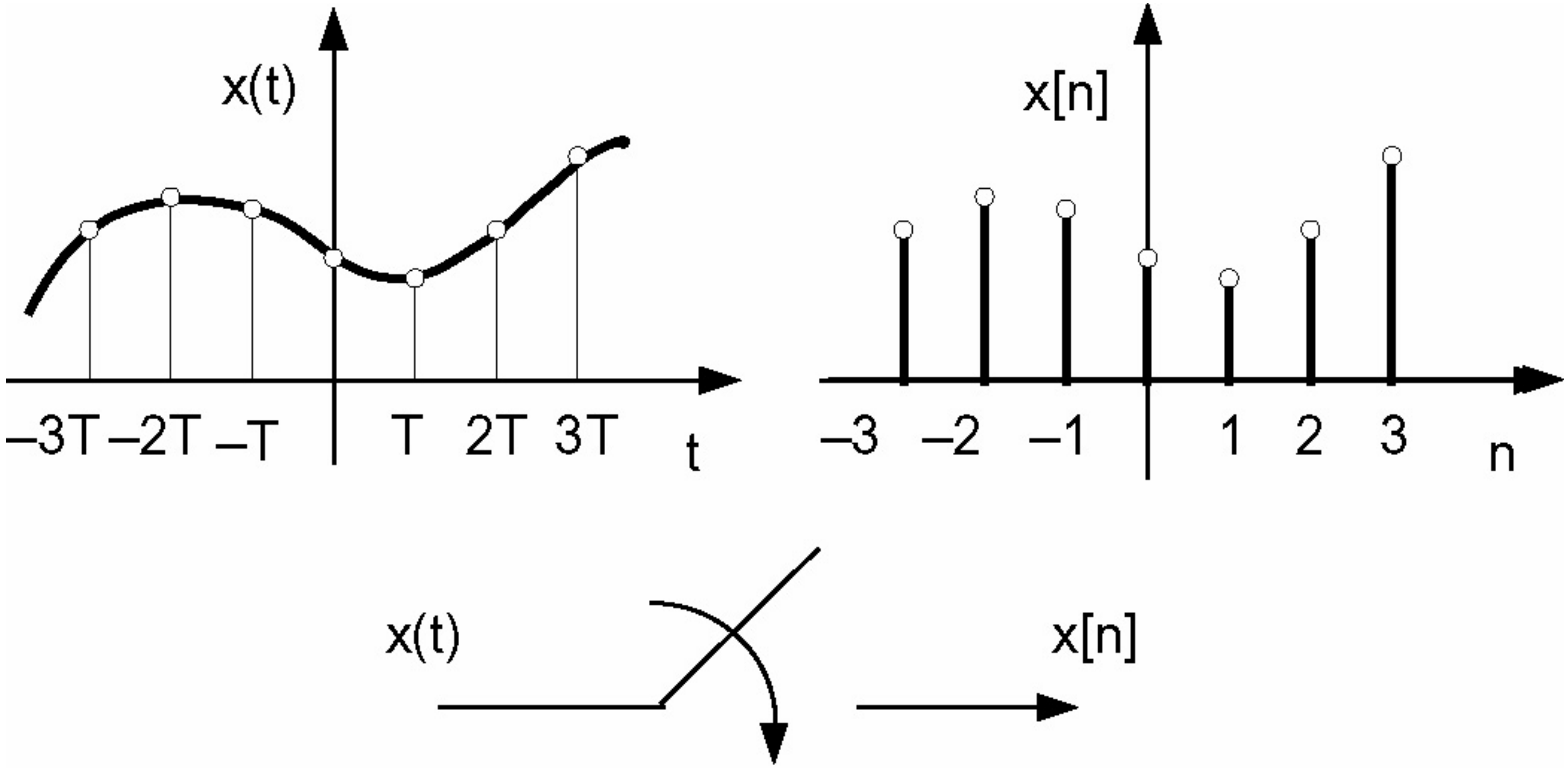
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Segnale periodico

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Segnale aperiodico

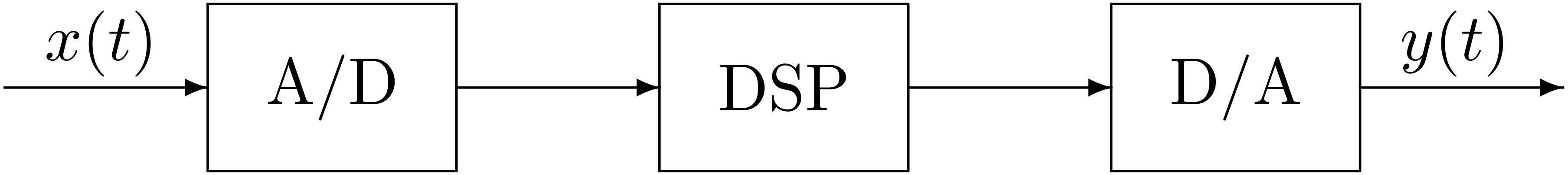
Dal tempo continuo al tempo discreto



$f_c = 1/T$

Frequenza di campionamento
(nel seguito chiameremo T_c)

Elaborazione di un segnale



La conversione da *analogico* a *digitale* permette il processamento del segnale con un *sistema discreto* (i.e. un PC, o in generale un *Digital Signal Processor, DSP*).
Può essere necessario/utile, successivamente, convertire di nuovo il segnale in analogico.

Dal tempo discreto al tempo continuo

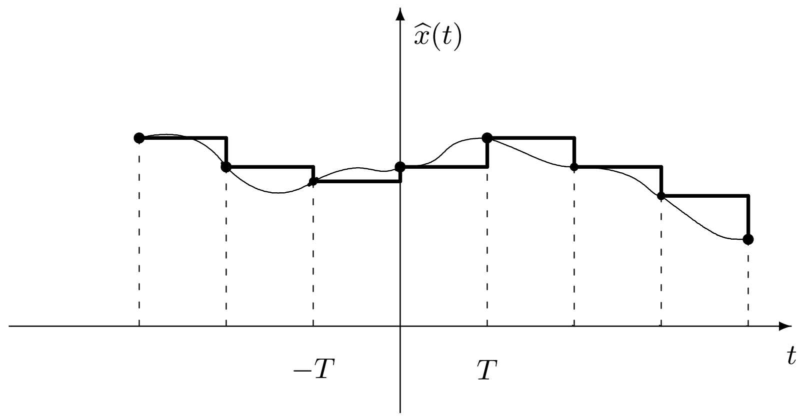


Figura 15: Ricostruzione mediante interpolazione a mantenimento.

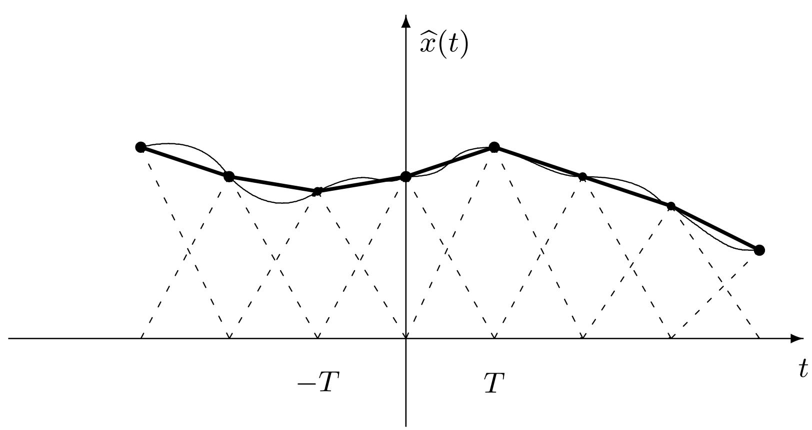


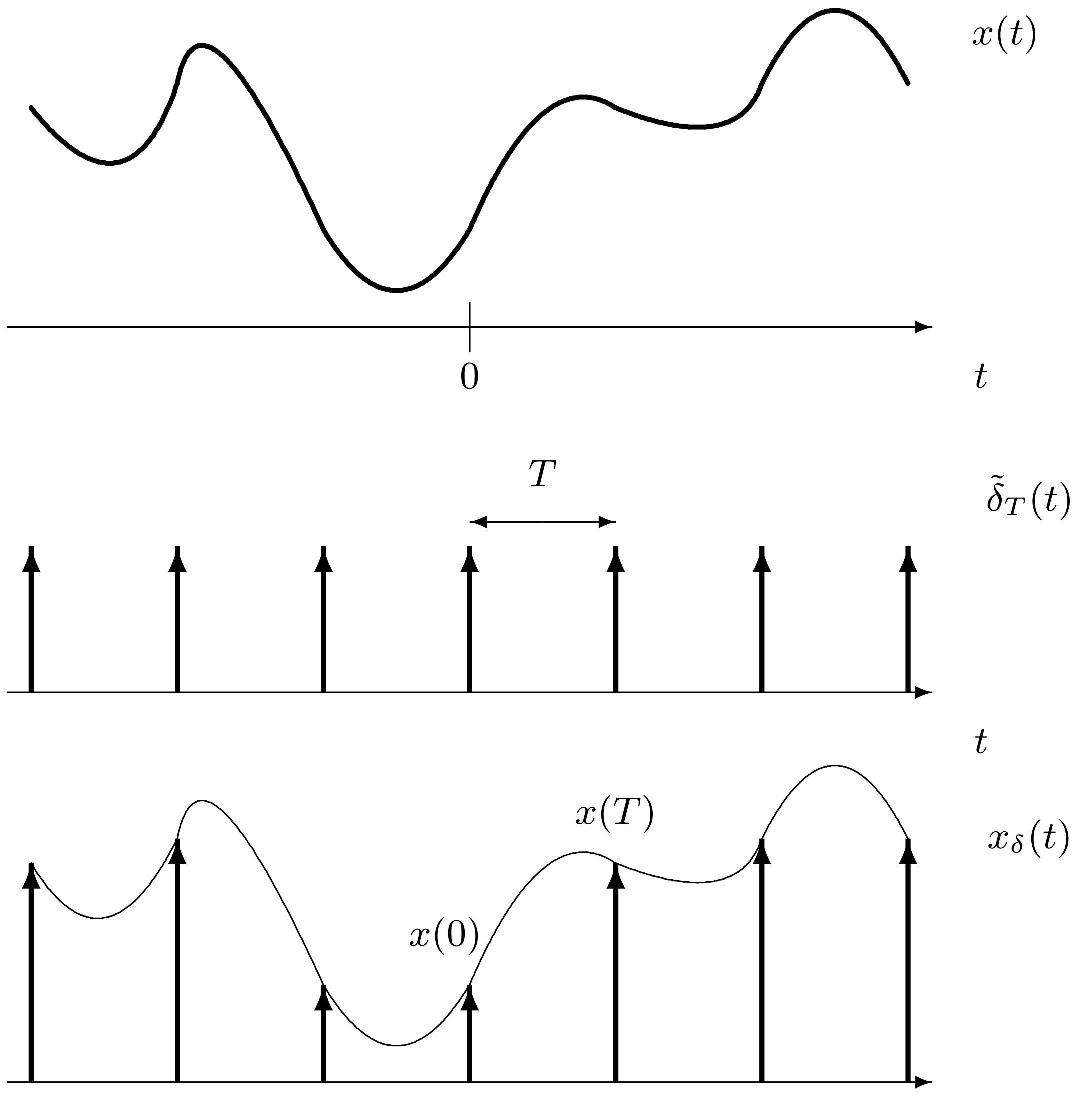
Figura 16: Ricostruzione mediante interpolazione lineare.

Dal tempo continuo al tempo discreto

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Andiamo a *campionare* il nostro segnale, *x(t)*:

Dal tempo continuo al tempo discreto



il segnale campionato è un treno di impulsi le cui ampiezze rappresentano il segnale x(t) agli istanti di campionamento

Dal tempo continuo al tempo discreto

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Andiamo a *campionare* il nostro segnale, *x(t)*:

$$x(t)\,\delta(t - t_0) = x(t_0)\,\delta(t - t_0)$$

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x(t)\,\tilde{\delta}_T(t) \\ &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t - nT) \end{aligned}$$

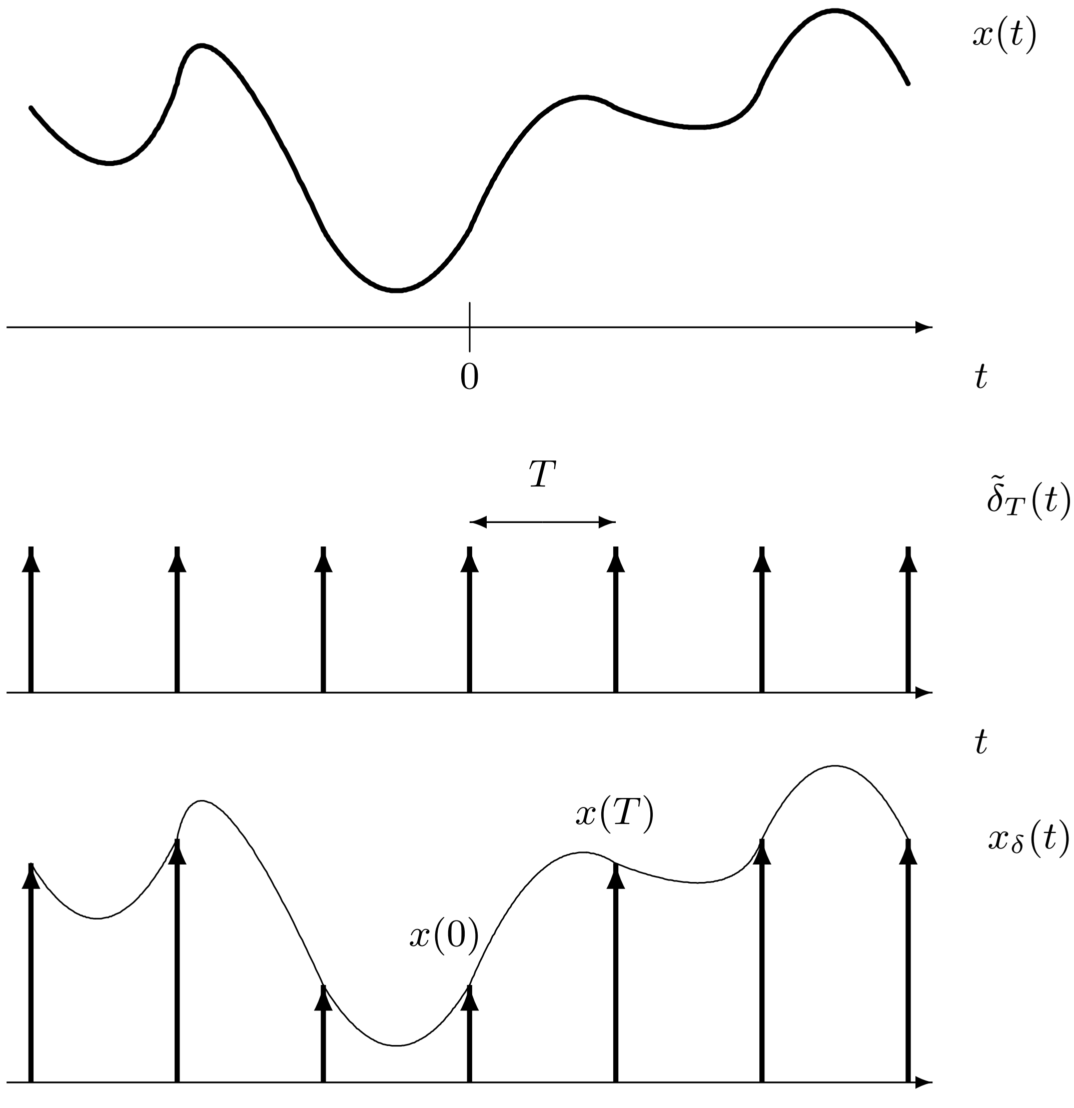
Dal tempo continuo al tempo discreto

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Andiamo a *campionare* il nostro segnale, *x(t)*:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

Dal tempo continuo al tempo discreto



il segnale campionato è un treno di impulsi le cui ampiezze rappresentano il segnale x(t) agli istanti di campionamento

Dal tempo continuo al tempo discreto

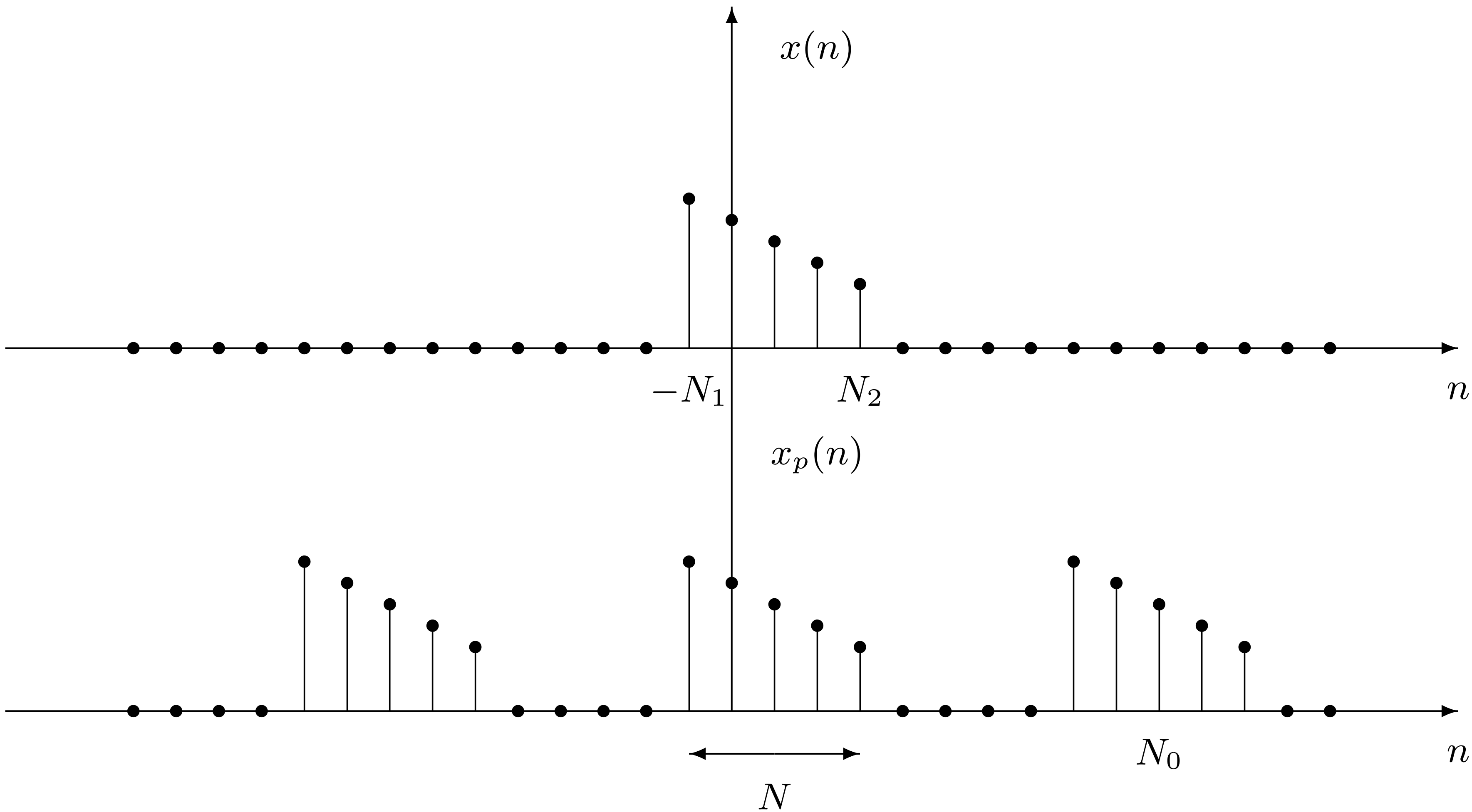
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Andiamo a *campionare* il nostro segnale, *x(t)*:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

che, nel caso generale, sarà un segnale aperiodico

Trasformata di Fourier di una sequenza



Utilizziamo il solito “trucco” di “periodicizzare” i segnali aperiodici

Dal tempo continuo al tempo discreto

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

In analogia con quanto visto per i segnali aperiodici a tempo continuo:

$$X(f) = \lim_{T_o \to \infty} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_o t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

avremo, nel caso discreto:

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n F}$$

Dal tempo continuo al tempo discreto (passaggi)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

Andiamo a *campionare* il nostro segnale, *x(t)*:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

per le proprietà della trasformata della δ:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) e^{-i2\pi fnT_c}$$

che è periodica in $F = fT_c$ (frequenza normalizzata alla frequenza di campionamento)

Dal tempo continuo al tempo discreto (passaggi)

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)e^{-i2\pi f n T_c}$$

Effettuiamo il cambio di variabile, $F = fT_c$ (frequenza normalizzata alla frequenza di campionamento)
e chiamiamo:

$$x[n] = x(nT_c) \qquad \bar{X}(F) = X_s\left(\frac{F}{T_c}\right)$$

quindi:

$$X_s(f) = \bar{X}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)e^{-i2\pi f n T_c}$$

Dal tempo continuo al tempo discreto

Caso continuo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Caso discreto:

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n F}$$

Inoltre:

$$\bar{X}(F+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n (F+1)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n F} e^{-i2\pi n} = \bar{X}(F)$$

Dal tempo continuo al tempo discreto

$$\bar{X}(F+1) = \bar{X}(F)$$

o, in altri termini:

$$\bar{X}\left(f + \frac{1}{T_c}\right) = \bar{X}(f)$$

cioè è periodica, con periodo $1/T_c$: quindi vale l'espansione in serie di Fourier:

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi nF}$$

di cui sappiamo come valutare i coefficienti:

$$x[n] = T_c \int_{\frac{-1}{2T_c}}^{\frac{1}{2T_c}} X(f) e^{i2\pi n f T_c} \mathrm{d}f$$

Equazioni di analisi

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Tempo continuo

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n F}$$

Tempo discreto

Equazioni di sintesi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Tempo continuo

$$x[n] = T_c \int_{\frac{-1}{2T_c}}^{\frac{1}{2T_c}} X(f) e^{i2\pi n f T_c} \mathrm{d}f$$

Tempo discreto

$$x[n] = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{X}(F) e^{i2\pi n F} \mathrm{d}F$$

Tempo discreto (a partire dalla trasformata in *F*)

Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi nF}$$

purtroppo ancora siamo lontani dalla *realtà,*
in un caso reale:

- il numero di campioni nel tempo è *finito*
- anche le frequenze sono in numero *finito* e non nel continuo

In questo caso si dimostra che:

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \qquad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

La condizione di Nyquist

Campionare il segnale è equivalente a moltiplicarlo per un treno di impulsi:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

Usando il teorema di prodotto e convoluzione e le proprità della δ:

$$X_s(f) = X(f) \otimes \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

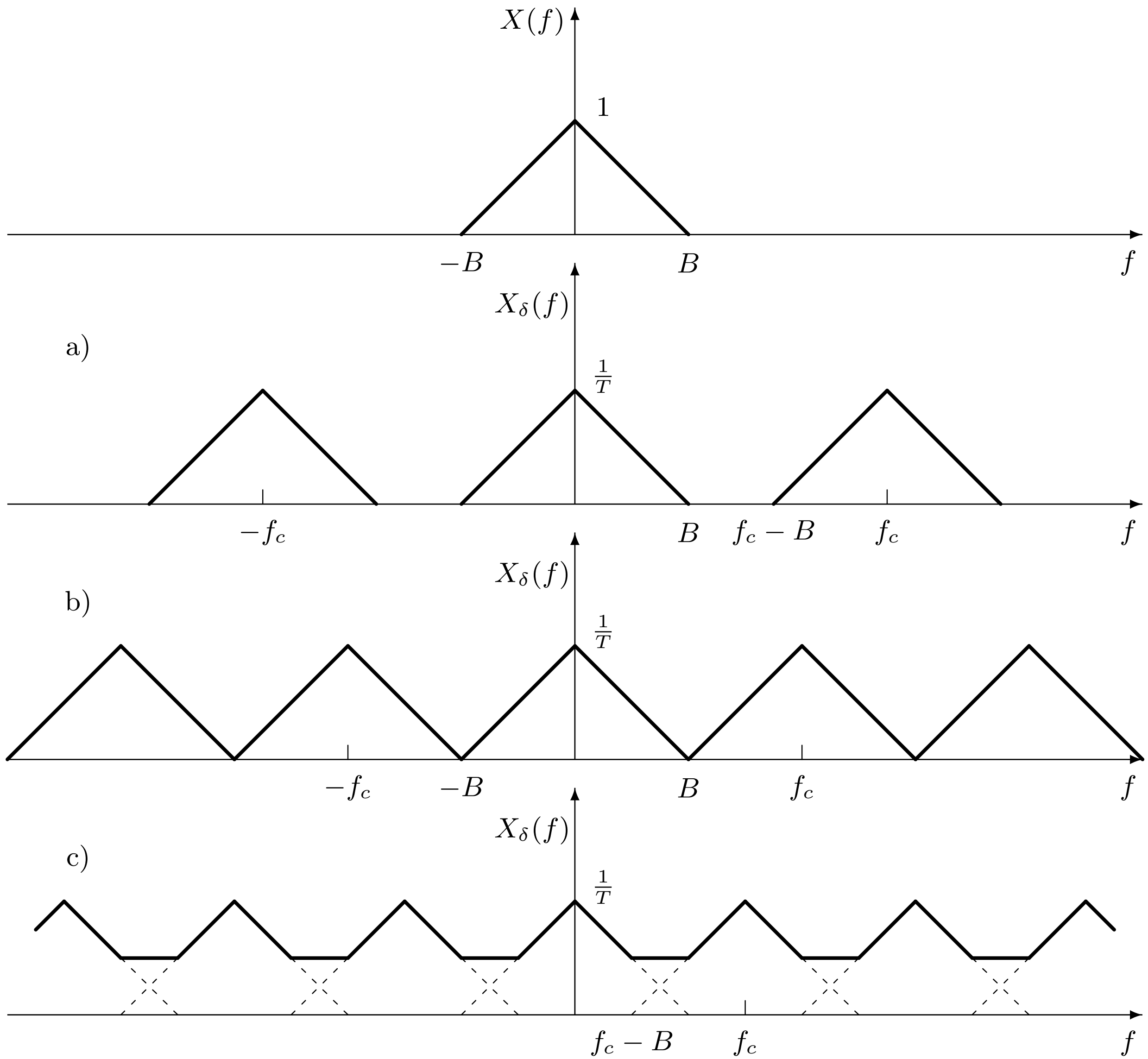
da cui:

$$X_s(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - kf_c\right)$$

La condizione di Nyquist

la *larghezza* del segnale nel dominio delle frequenza è la sua *banda* (*B*)

a) $f_c > 2B$
b) $f_c = 2B$
c) $f_c < 2B$



La condizione di Nyquist

$$X_s(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

La trasformata di Fourier di una sequenza è la periodicizzazione della trasformata del segnale originale, con una periodicità pari alla frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$.

Per garantirsi l'assenza di *aliasing*, la frequenza di campionamento deve essere tale che:

$$f_c = \frac{1}{T_c} \geq 2B$$

dove B è la banda del segnale

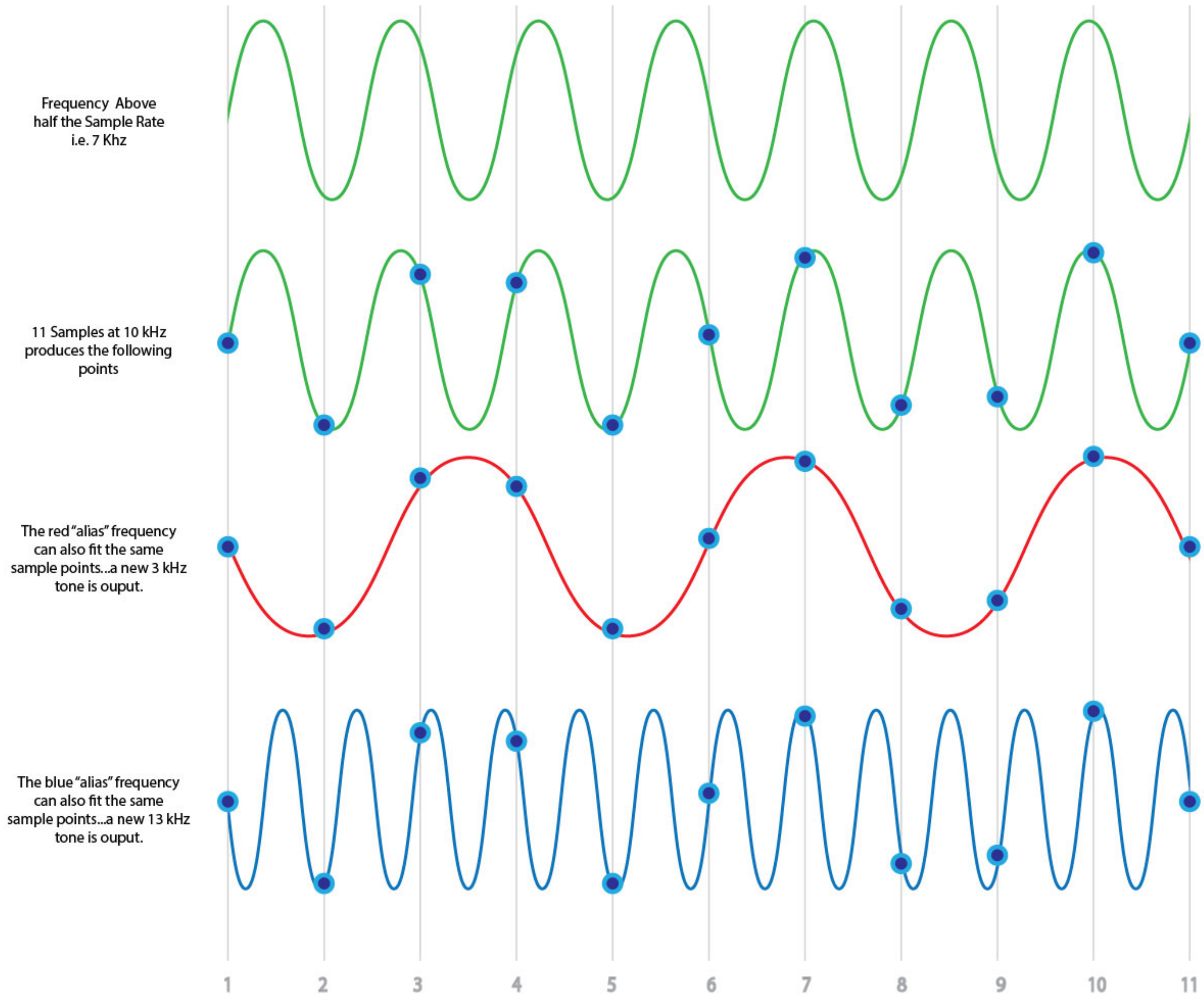
Aliasing

Aliasing

Adequately Sampled Signal

Aliased Signal Due to Undersampling

Aliasing


Frequency Above half the Sample Rate i.e. 7 Khz
11 Samples at 10 kHz produces the following points
The red "alias" frequency can also fit the same sample points...a new 3 kHz tone is ouput.
The blue "alias" frequency can also fit the same sample points...a new 13 kHz tone is ouput.
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Caso reale:

- il numero di campioni nel tempo è *finito*
- anche le frequenze sono in numero *finito* e non nel continuo

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \qquad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

Se si acquisisce un segnale per un tempo T_p con una frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$, in totale si avranno $N = T_p/T_c$ campioni. Lo spettro di Fourier avrà una "risoluzione" di $f_p = 1/T_p$ e la frequenza massima che sarà rappresentata è $N*f_p$, cioè $1/T_c = f_c$ (cfr. Nyquist)

Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Caso reale:

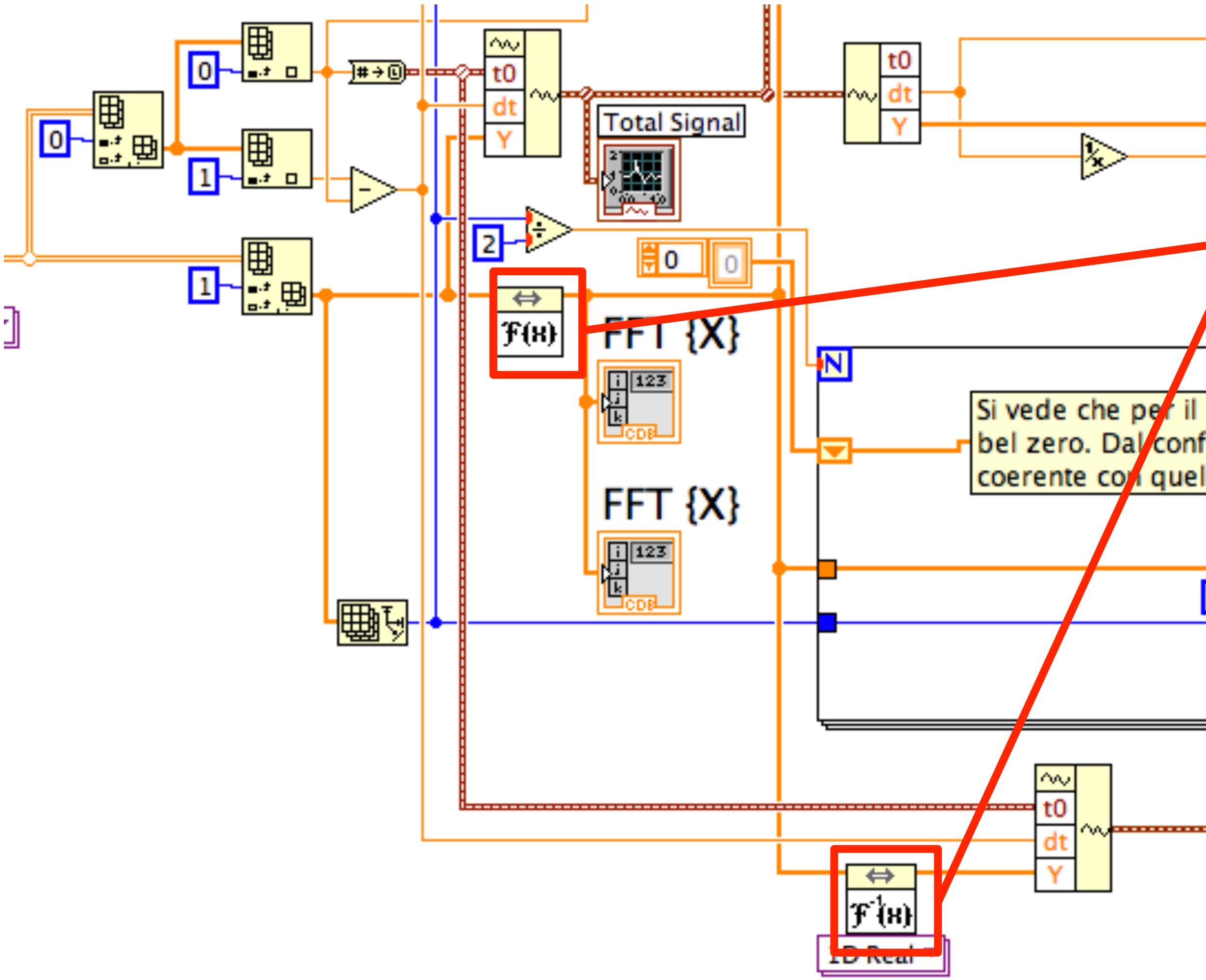
- il numero di campioni nel tempo è *finito*
- anche le frequenze sono in numero *finito* e non nel continuo

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi k\frac{n}{N}} \qquad x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{i2\pi k\frac{n}{N}}$$

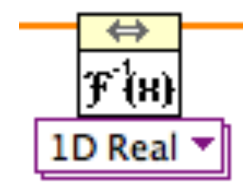
Se si acquisisce un segnale per un tempo T_p con una frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$, in totale si avranno $N = T_p/T_c$ campioni. Lo spettro di Fourier avrà una "risoluzione" di $f_p = 1/T_p$ e la frequenza massima che sarà rappresentata è $N*f_p$, cioè $1/T_c = f_c$ (cfr. Nyquist*)

*in realtà N/2 elementi della DFT (FFT) sono usati per le frequenze negativi

FFT su Labview



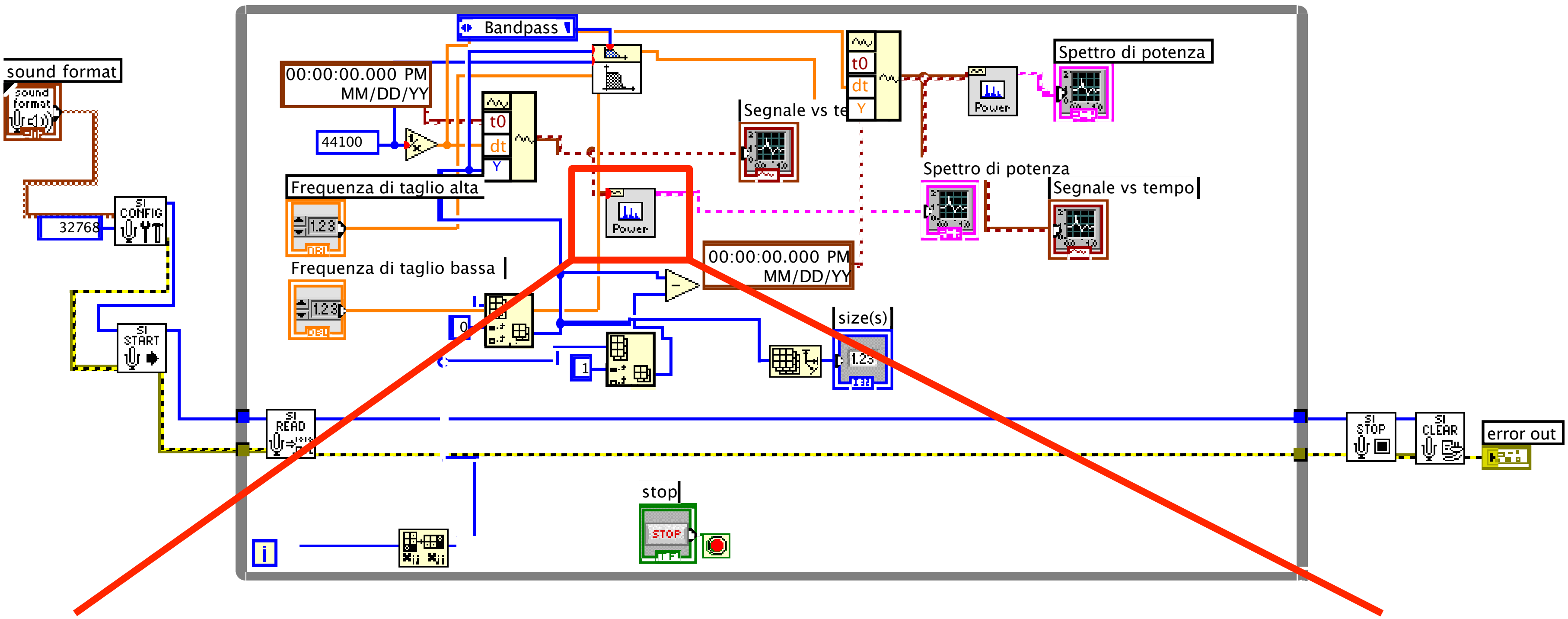
In Labview è disponibile un "blocchetto" (sub-VI) per fare la DFT (in particolare la FFT) e la sua inversa:



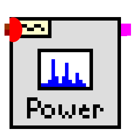
Spiegazioni e dettagli qui:

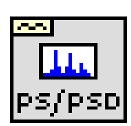
http://www.ni.com/white-paper/4541/en/

Power Spectrum su Labview



Per il power spectrum diverse implementazioni sono possibili:





*

...

*calcolandolo “a mano” dai termini della FFT…