Laboratorio II, modulo 2
2016-2017

Banda di un segnale e filtri

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_03.pdf
e http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_04.pdf e
http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_05.pdf

Luise, Vitetta, D'Amico Teoria dei segnali analogici)

Alcune definizioni (1)

- Segnale **periodico**: $x(t) = x(t+T_0)$ per qualunque t
- Segnale **determinato**: quando il suo valore è univocamente determinabile una volta fissati i valori delle variabili indipendenti (tempo) (contrario: **aleatorio**)
- Potenza istantanea associata ad un segnale (reale) $x(t)$: $x^2(t)$

$$p_x(t) = x^*(t)\ x(t) = |x(t)|^2$$

Alcune definizioni (1)

- Segnale **periodico**: $x(t) = x(t+T_0)$ per qualunque t
- Segnale **determinato**: quando il suo valore è univocamente determinabile una volta fissati i valori delle variabili indipendenti (tempo) (contrario: **aleatorio**)
- Potenza istantanea di segnale $x(t)$: $x^2(t)$
- Energia associata ad un segnale $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

(nota: l'energia di un segnale fisico è finita per definizione)

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali periodici a tempo continuo)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Analisi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali aperiodici a tempo continuo)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Analisi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Teorema (relazione) di Parseval

(segnali periodici a tempo continuo)

Potenza di un segnale periodico:

$$p_x(t) = x^*(t)\ x(t) = |x(t)|^2$$

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} p_x(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

e, dall'equazione di sintesi

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^2$$

la potenza media di un segnale periodico è la somma delle potenze medie delle singole armoniche che lo compongono

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^2$$

Teorema (relazione) di Parseval

(segnali aperiodici a tempo continuo)

Partiamo dalla definizione di energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \; x(t)^* \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-i2\pi f t} \mathrm{d}f \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}f =$$

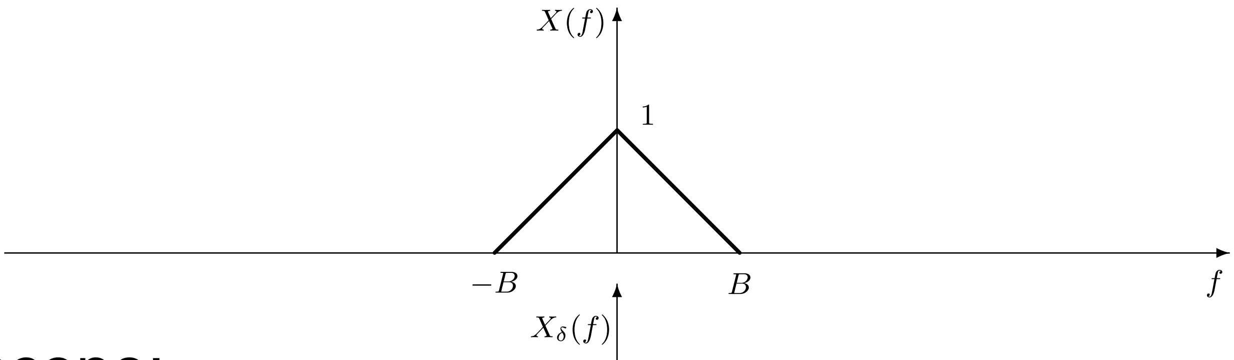
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \; X(f) \; \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

e quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

banda e durata di un segnale

L'analogo del concetto di *durata* (per un segnale nel dominio del tempo) è il concetto di *banda*



Si definiscono:

- segnali a *banda rigorosamente limitata*
- segnali a *banda illimitata*
- segnali a *banda praticamente illimitata*

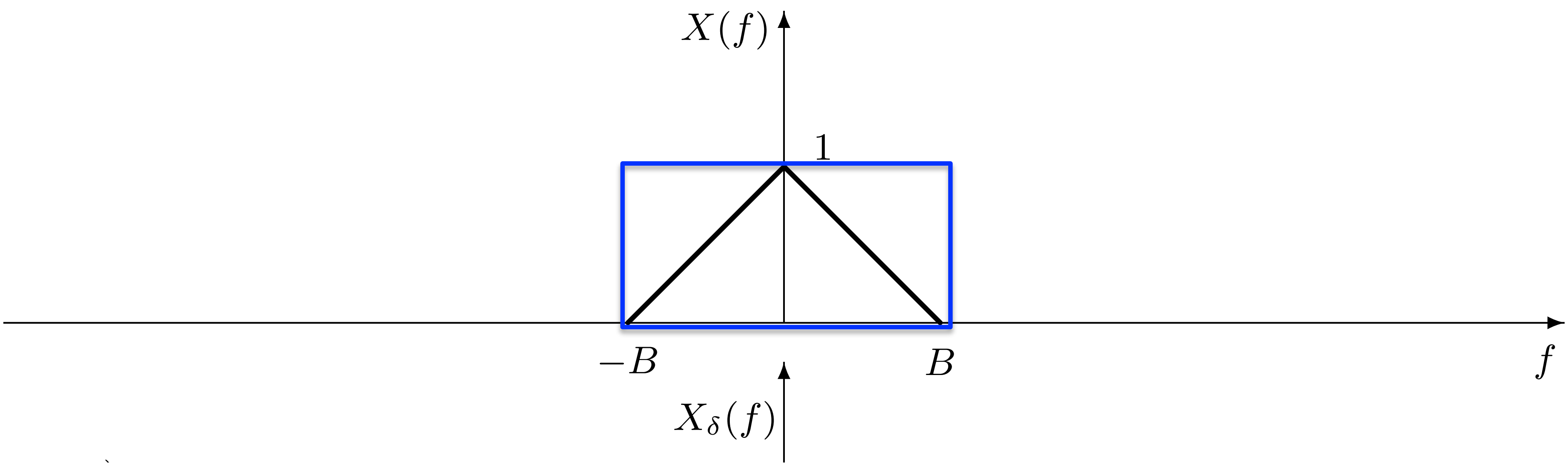
$$\int_{-B}^{B} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f = \alpha E_x$$

con 0<α<1 (es. 0.9: "banda al 90% dell'energia")

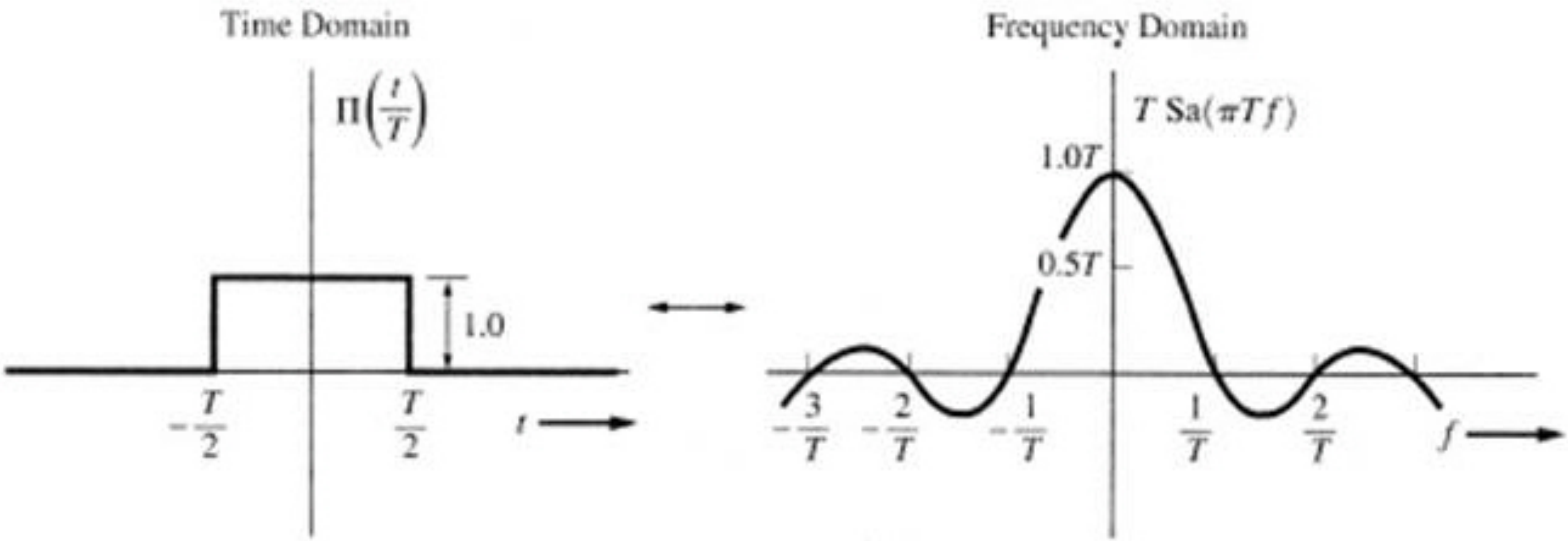
banda e durata di un segnale

Moltiplicando un segnale *limitato* nel dominio della frequenza per un impulso rettangolare opportuno, lo possiamo riscrivere come:

$$X(f) = X(f)\, rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$



Sinc ←→ Π (rect)



(a) Rectangular Pulse and Its Spectrum

* sinc(x) = sin(x)/x

banda e durata di un segnale

Moltiplicando un segnale *limitato* nel dominio della frequenza per un impulso rettangolare opportuno, lo possiamo riscrivere come:

$$X(f) = X(f)\, rect\left(\frac{f}{2B}\right)$$

che equivale, nel dominio del tempo, ad una convoluzione:

$$x(t) \otimes 2B\, sinc\,(2Bt)$$

che è un segnale *non limitato*.

banda e durata di un segnale

Moltiplicando un segnale *limitato* nel dominio del tempo per un impulso rettangolare opportuno, lo possiamo riscrivere come:

$$x(t) = x(t)\, rect\left(\frac{t}{2T}\right)$$

che equivale, nel dominio della frequenza, ad una convoluzione:

$$X(f) \otimes 2T\, sinc\,(2Tf)$$

che è un segnale *non limitato*.

banda e durata di un segnale

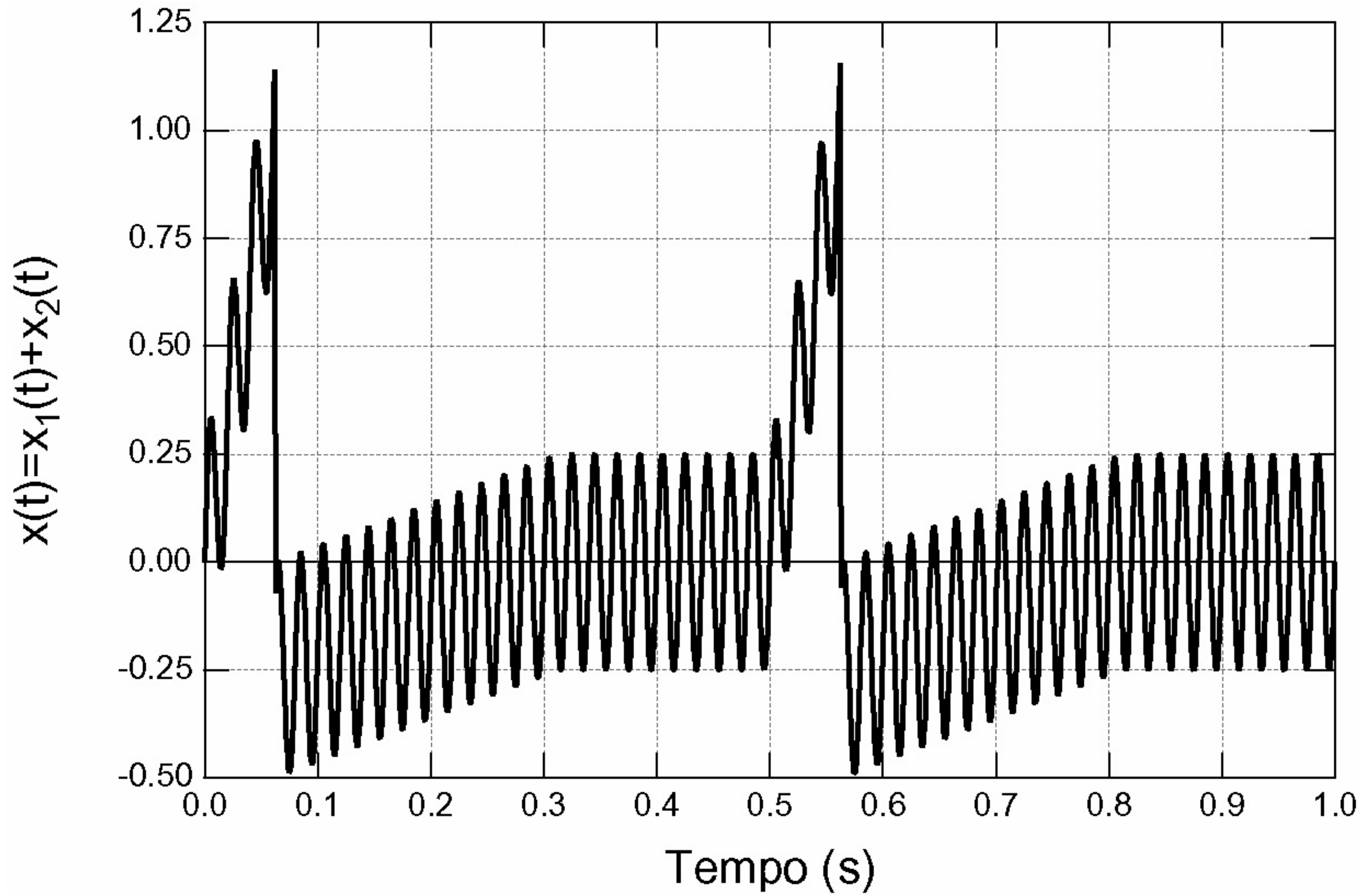
Di conseguenza:

- un segnale *rigorosamente limitato* nel tempo ha banda *infinita*

- un segnale con banda *limitata* ha durata *infinita*

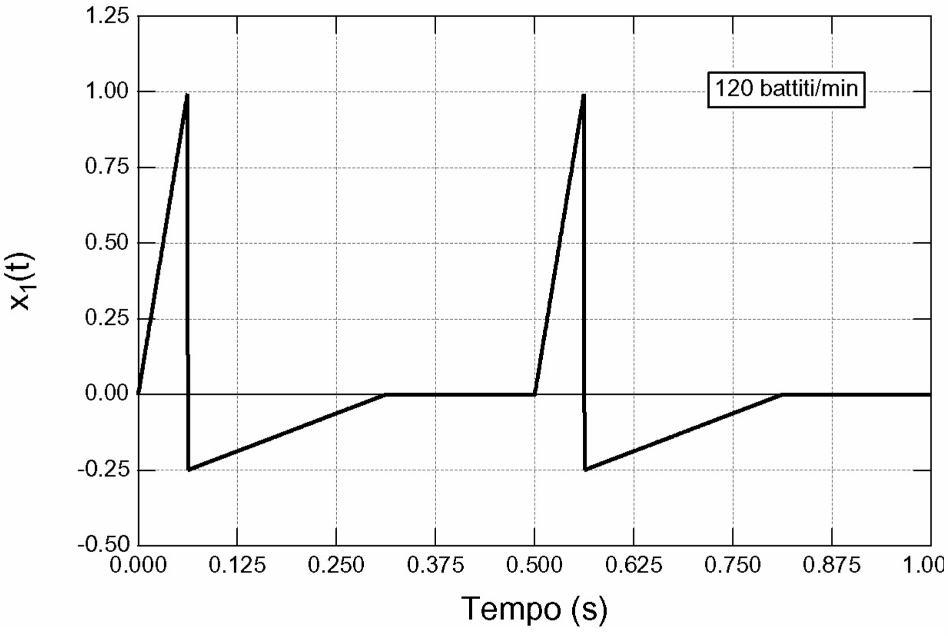
Filtri

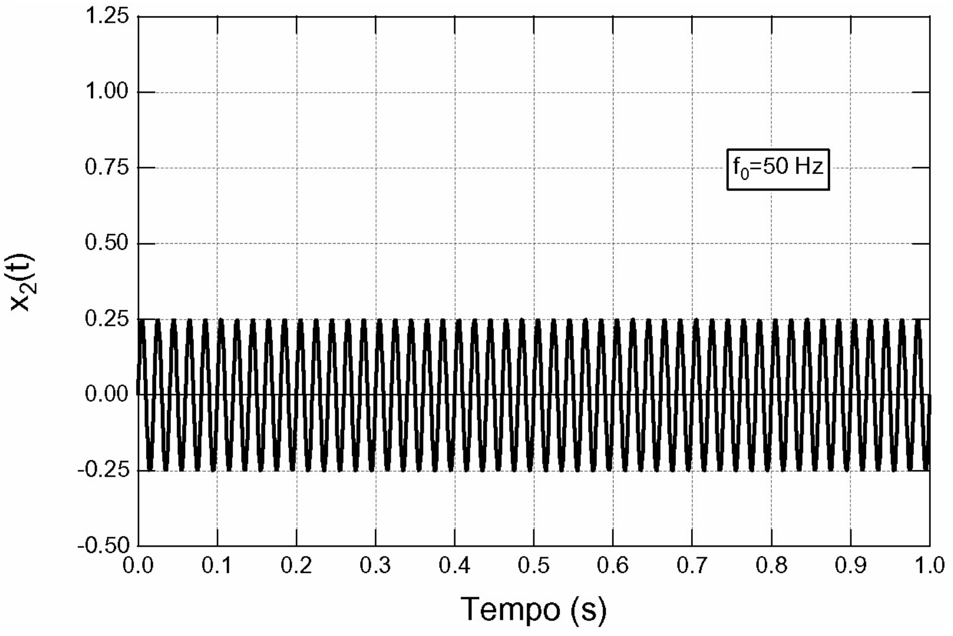
Supponiamo di avere un segnale:



Filtri

Composto da due segnali periodici

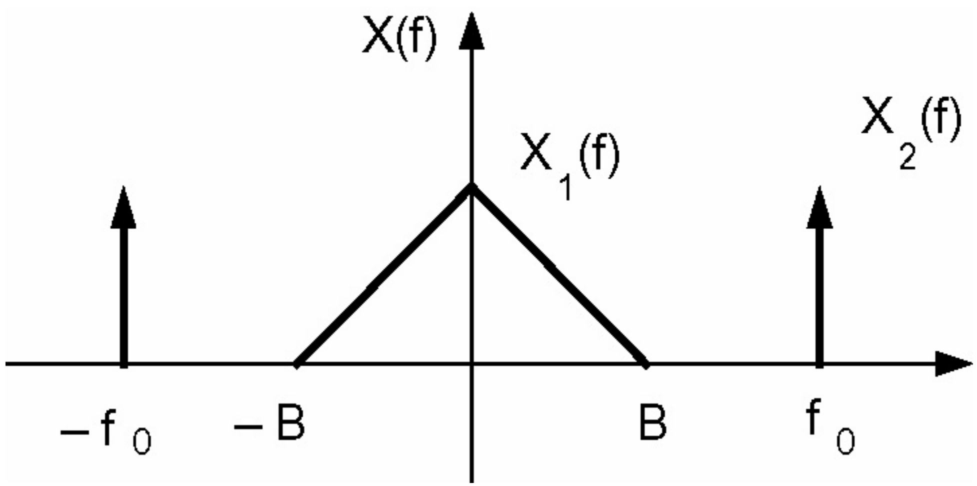




ad esempio: un segnale periodico (120 bps = 2 Hz), di un elettrocardiogramma, e un disturbo periodico (50 Hz) dovuto dalla tensione di alimentazione

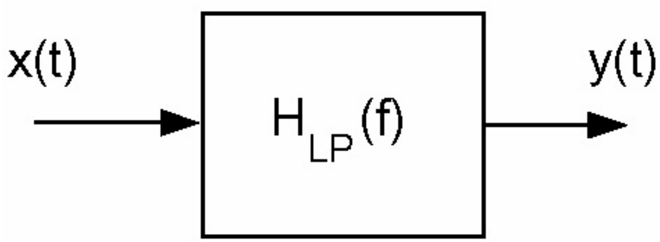
Passiamo al dominio frequenziale

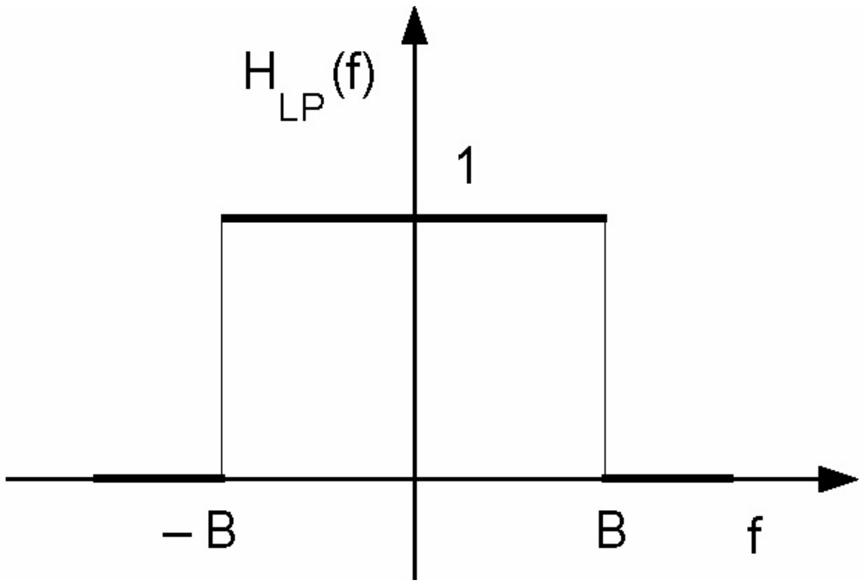
$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$



abbiamo bisogno di un apparato con caratteristiche di selettività delle differenti componenti frequenziali del segnale: un filtro

Filtro passa-basso (ideale)

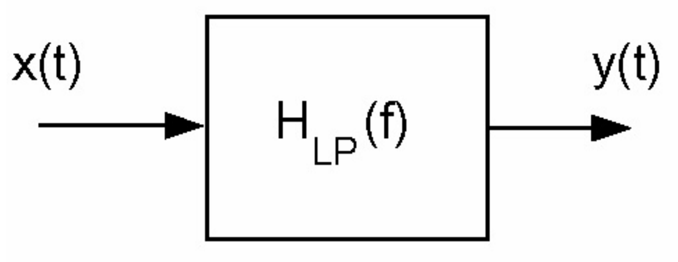




$$H_{LP}(f) = rect(\frac{f}{2B})$$

$H_{LP}(f)$ è la risposta in frequenza

Filtro passa-basso (ideale)



il segnale, y(t), in uscita dal filtro, avrà trasformata di Fourier

$$Y(f) = X(f)\ H(f)$$

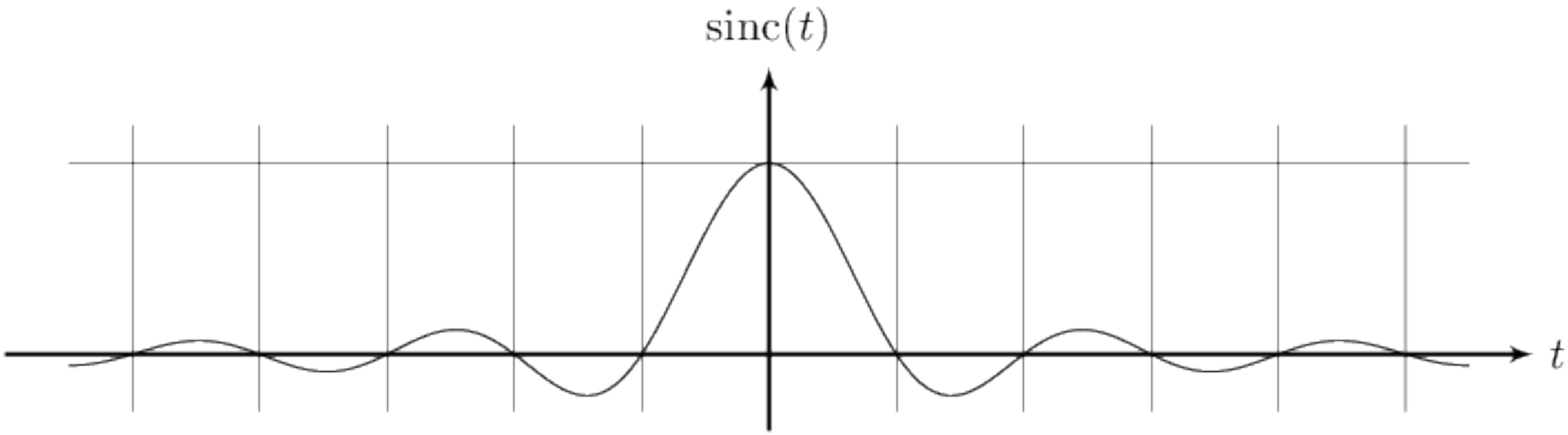
cioè sarà privo della componente $X_2(f)$ (e quindi $x_2(t)$), cioè del disturbo:

$$Y(f) = X(f)\ H(f) \approx X_1(f)$$

$$y(t) \approx x_1(t)$$

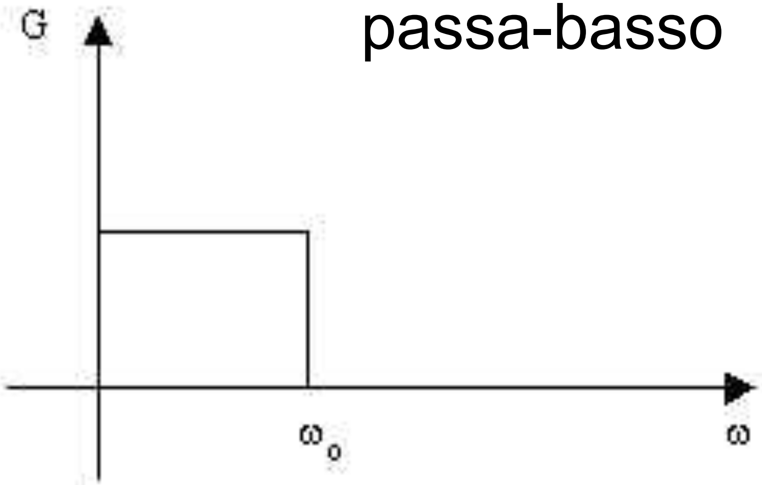
Filtro passa-basso (ideale)

$$h_{LP}(t) = 2B \ sinc\,(2Bt)$$

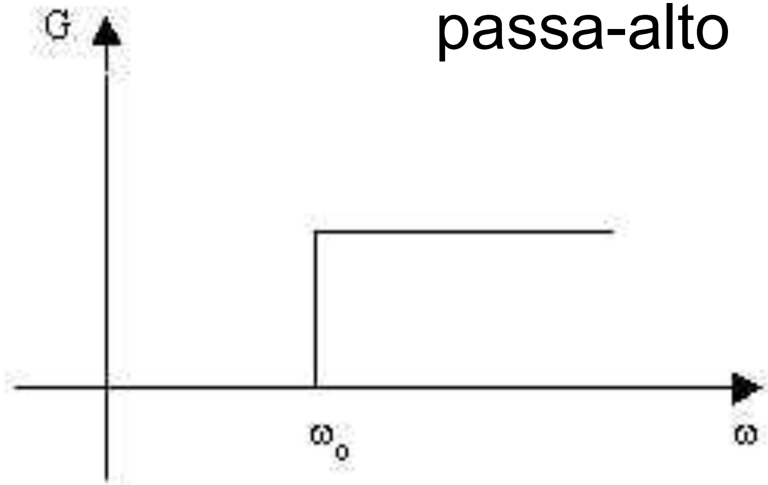


La risposta nel dominio del tempo del filtro passa-basso è il sinc, cioè ha una risposta impulsiva

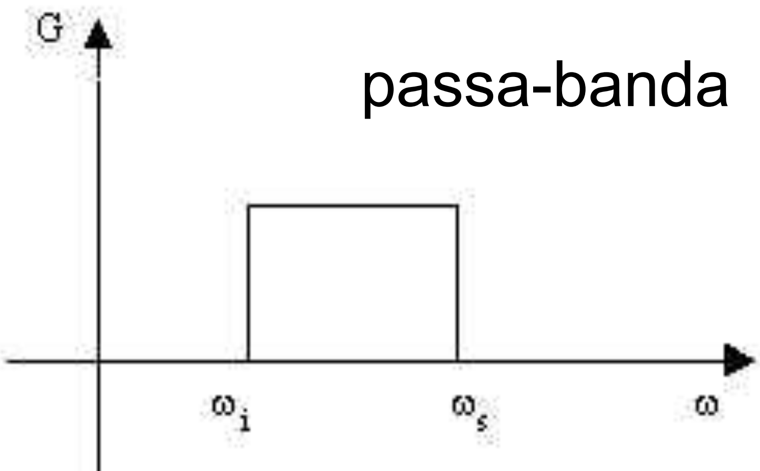
Filtri ideali



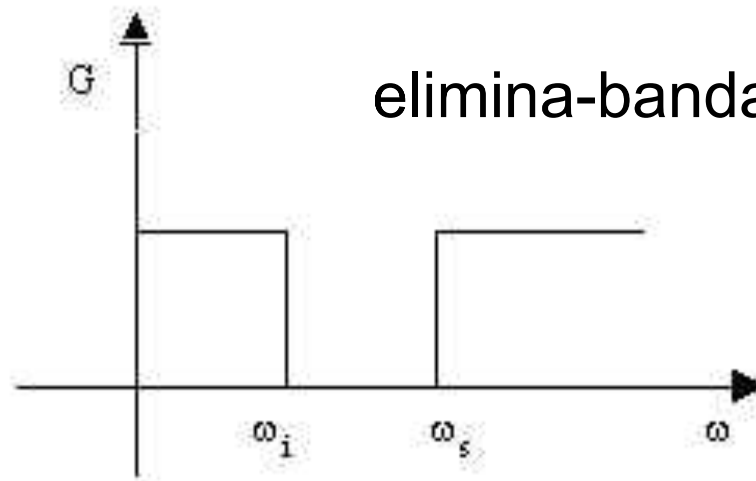
passa-basso



passa-alto



passa-banda



elimina-banda