Laboratorio II, modulo 2
2015-2016

Segnali aperiodici

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_04.pdf)

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali periodici a tempo continuo)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Analisi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

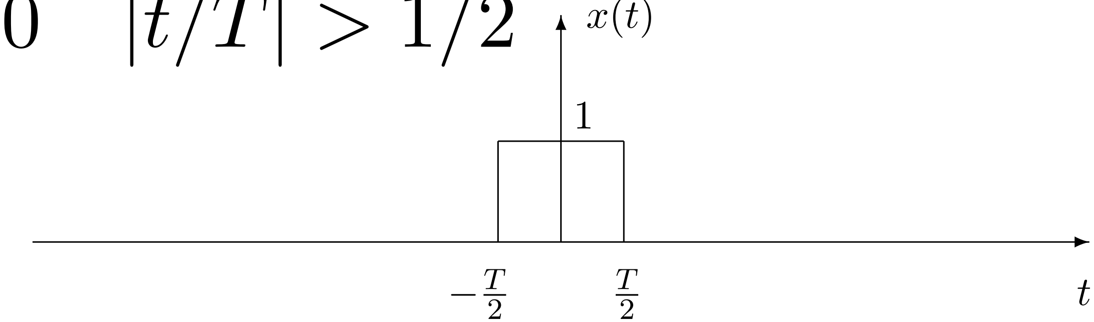
Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

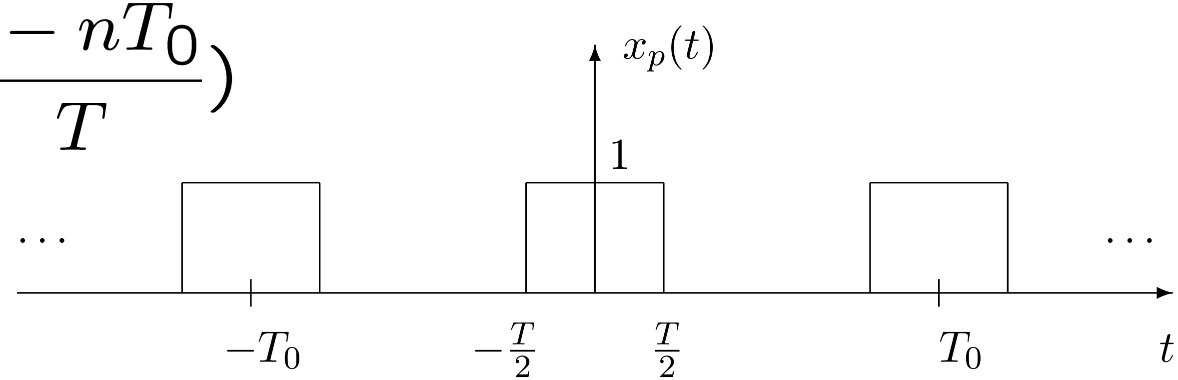
(nota: X_k è in generale complessa)

Segnali aperiodici a tempo continuo

$$x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & |t/T| \leq 1/2 \\ 0 & |t/T| > 1/2 \end{cases}$$



$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} rect\left(\frac{t - nT_0}{T}\right)$$



$$x(t) = \lim_{T_o \to \infty} x_p(t)$$

(al limite in cui il periodo di *ripetizione* è infinito)

Segnale aperiodico a tempo continuo

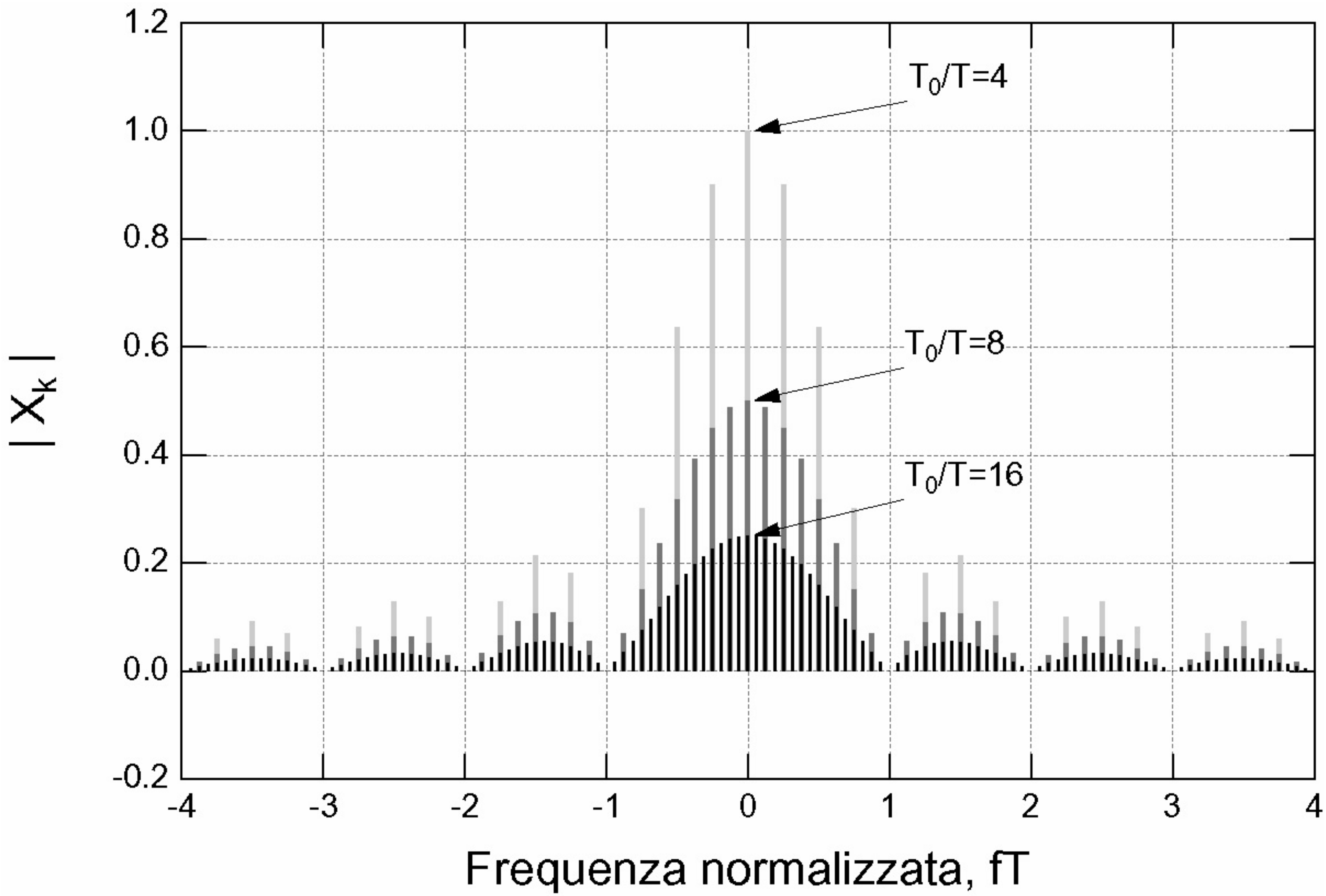
Essendo $x_p(t)$ periodico lo possiamo *sviluppare* in serie di Fourier:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} rect(\frac{t - nT_o}{T}) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Cosa succede alla serie di Fourier e ai relativi coefficienti X_k quando $T_o \rightarrow \infty$?

Spettro di ampiezza di $x_p(t)$



$T_o \rightarrow \infty$ (1)

$T_o \rightarrow \infty$, $f_o \rightarrow 0$

Definiamo:

$$X(kf_o) \equiv T_o X_k = \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_o t} dt = T \frac{sin(kf_o T)}{kf_o T}$$

Possiamo scrivere:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(kf_o) e^{i2\pi k f_o t} f_o$$

$T_0 \rightarrow \infty$ (1bis)

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$
$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$
$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

Definiamo:

$$X(f) \stackrel{\triangle}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

Quindi:

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f)|_{f=k/T_0} = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right) e^{j2\pi k t/T_0}$$

$T_o \rightarrow \infty$ (2)

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} X(kf_o)e^{i2\pi kf_ot}f_o$$

Passando al limite per $T_o \rightarrow \infty$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df$$

cioè la somma diventa un integrale (per definizione!)

Trasformata di Fourier

$$X(kf_o) \equiv T_o X_k = \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_o t} dt = T \frac{sin(kf_oT)}{kf_oT}$$

Passando al limite per $T_o \rightarrow \infty$

$$X(f) = \lim_{T_o \rightarrow \infty} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x_p(t) e^{-i2\pi k f_o t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

che è la trasformata *continua* di Fourier del segnale *x(t)*

$$X(f) = A(f) e^{i\theta(f)}$$

Spettro di fase

Spettro di ampiezza

Equazioni di analisi (trasformata di Fourier)

$$X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Segnale periodico

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Segnale aperiodico

Equazioni di sintesi (trasformata di Fourier inversa)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Segnale periodico

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Segnale aperiodico

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali aperiodici a tempo continuo)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Eq. di analisi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

Eq. di sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Teoremi (proprietà) della trasformata di Fourier

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Teorema della linearità:

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow X(f) = aX_1(f) + bX_2(f)$$

Teorema di dualità:

$$x(t) \Leftrightarrow X(f) \quad \rightarrow \quad X(t) \Leftrightarrow x(-f)$$

Teorema del ritardo:

$$y(t) = x(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad Y(f) = X(f)e^{-i2\pi f t_0}$$

Teorema prodotto e convoluzione:

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f)Y(f)$$

$$z(t) = x(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$$

$$a(t) \otimes b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t - \tau)\ \mathrm{d}\tau$$