Laboratorio II, modulo 2
2015-2016

Segnali a tempo discreto

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_04.pdf

e http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_06.pdf)

Equazioni di analisi

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi k f_0 t}dt$$

Segnale periodico

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi f t}dt$$

Segnale aperiodico

Equazioni di sintesi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Segnale periodico

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Segnale aperiodico

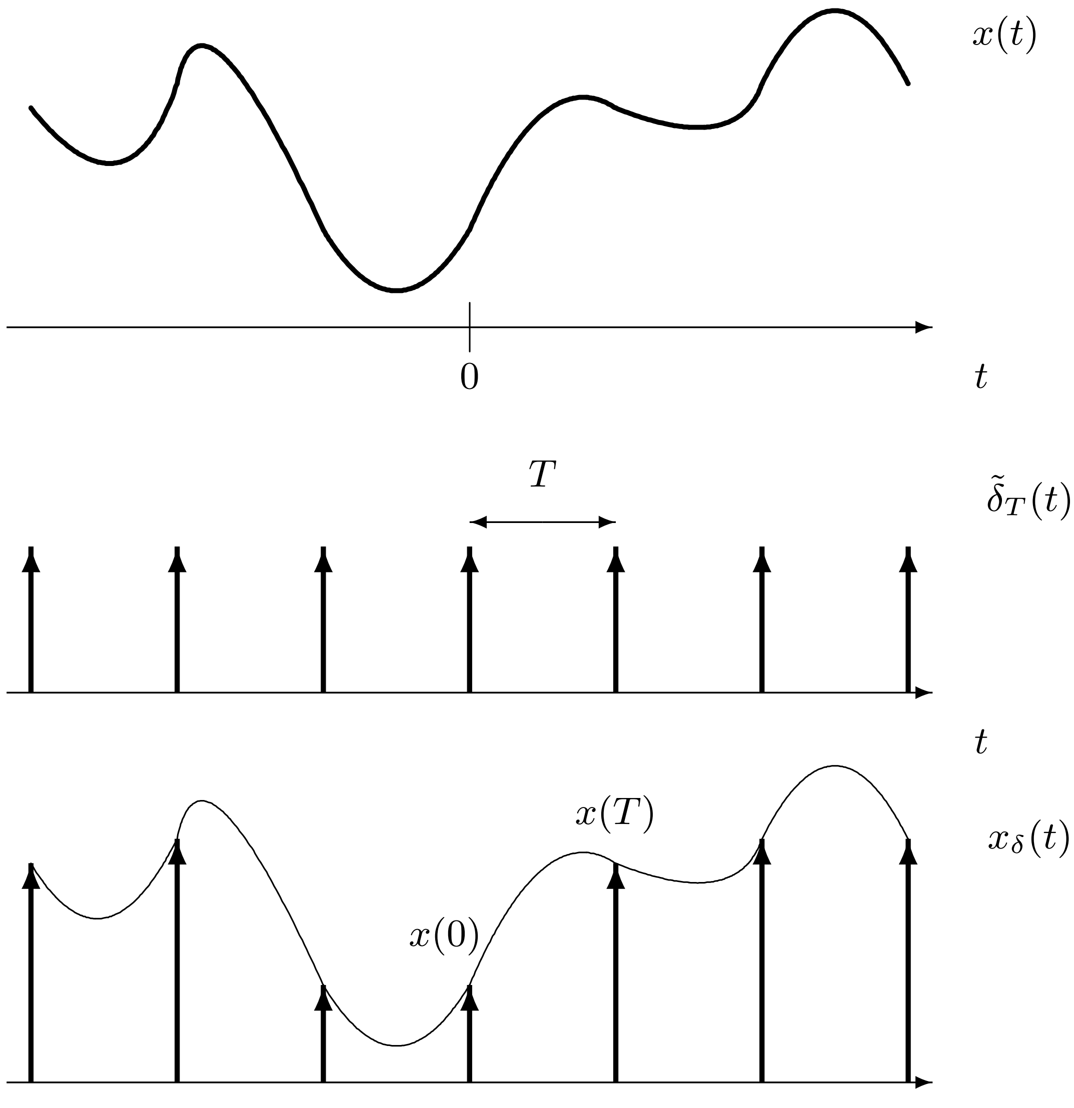
Dal tempo continuo al tempo discreto

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

Andiamo a *campionare* il nostro segnale, *x(t)*:

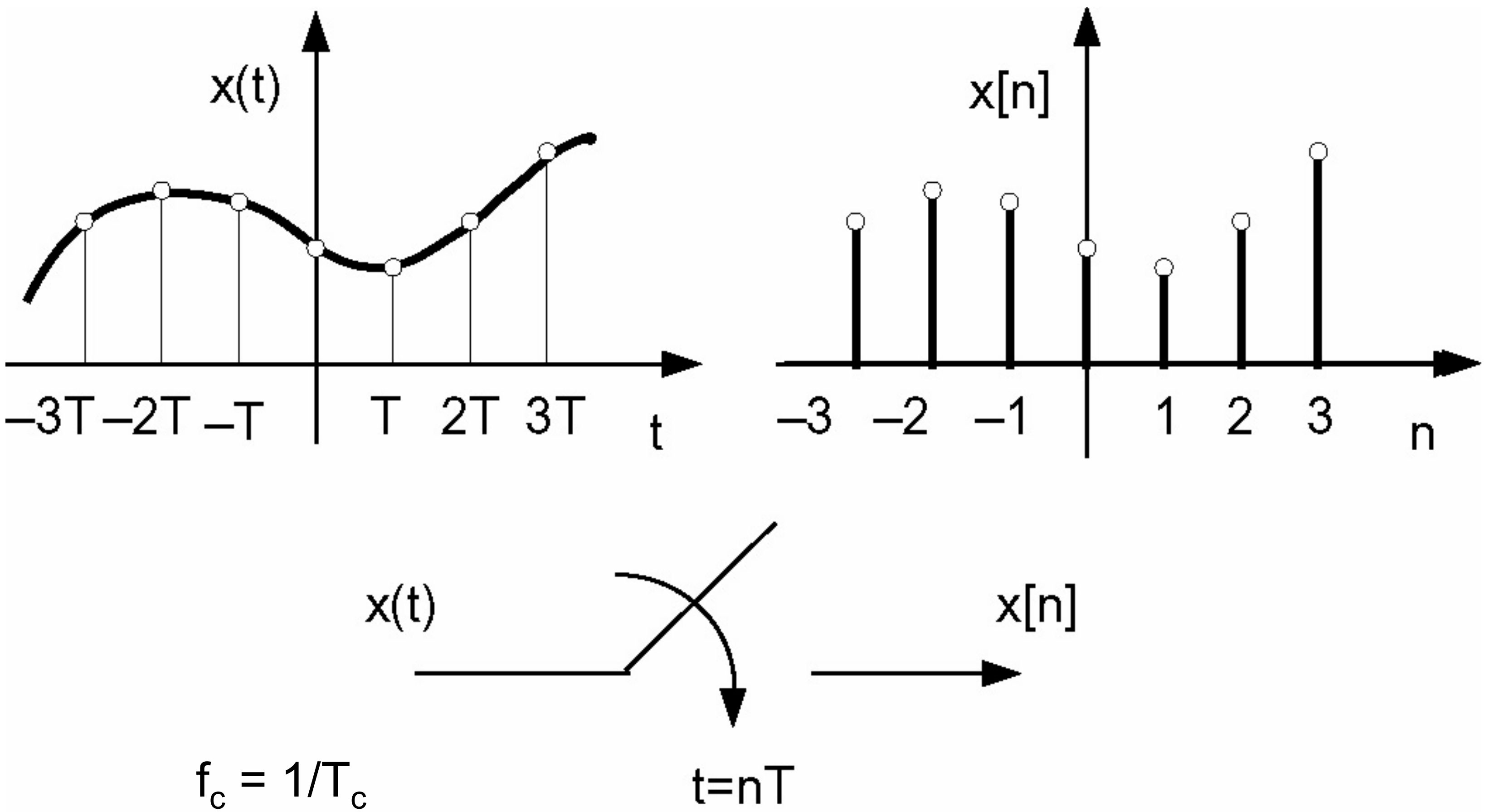
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

Dal tempo continuo al tempo discreto



il segnale campionato è un treno di impulsi le cui ampiezze rappresentano il segnale x(t) agli istanti di campionamento

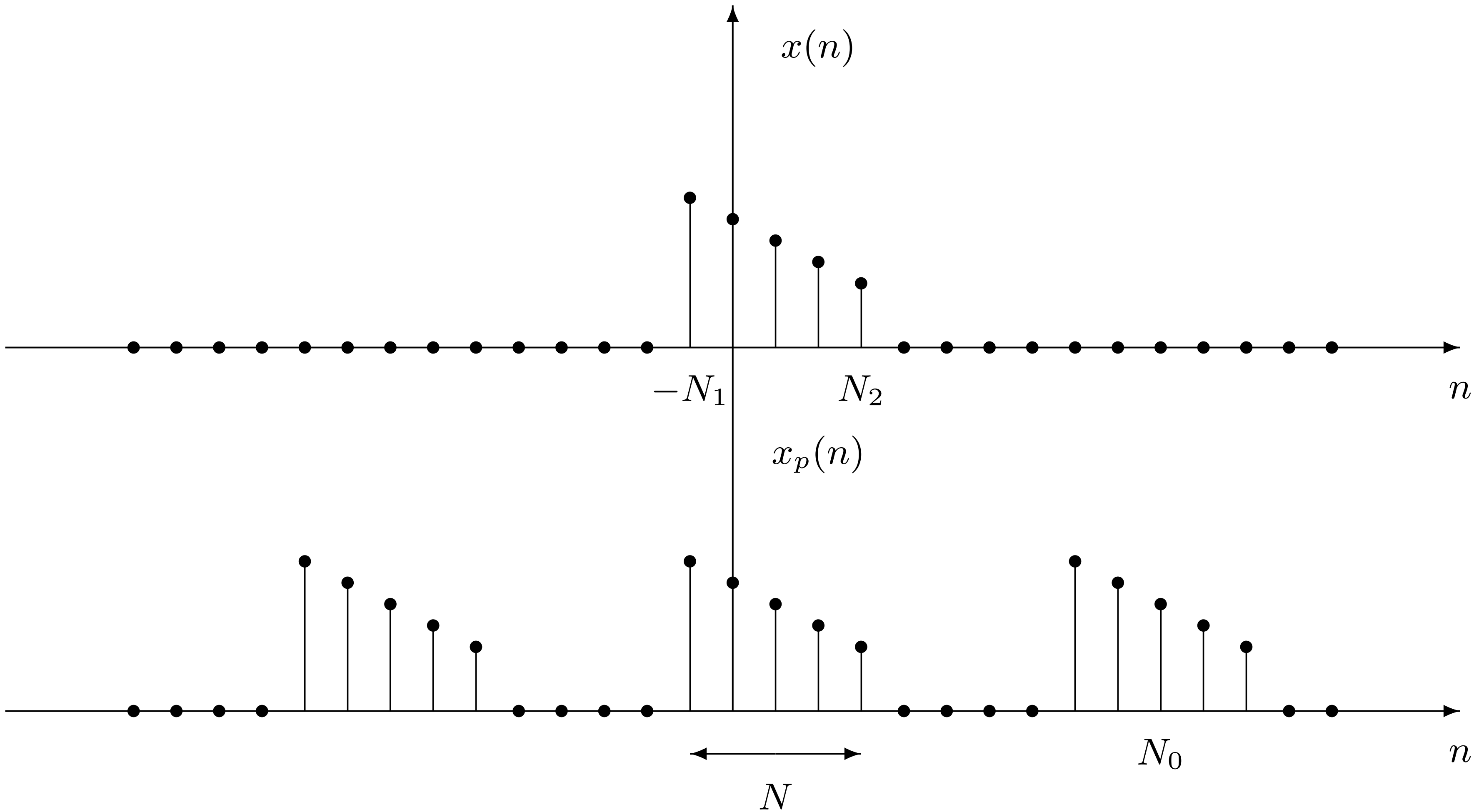
Dal tempo continuo al tempo discreto



$f_c = 1/T_c$

Frequenza di campionamento

Trasformata di Fourier di una sequenza



Dal tempo continuo al tempo discreto

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Andiamo a *campionare* il nostro segnale, *x(t)*:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

per le proprietà della trasformata della δ:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) e^{-i2\pi f n T_c}$$

Trasformata di Fourier di una sequenza

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)e^{-i2\pi f n T_c}$$

Effettuiamo il cambio di variabile, $F = fT_c$ (frequenza normalizzata alla frequenza di campionamento) e chiamiamo:

$$x[n] = x(nT_c) \qquad \bar{X}(F) = X_s\left(\frac{F}{T_c}\right)$$

quindi:

$$X_s(f) = \bar{X}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)e^{-i2\pi f n T_c}$$

Trasformata di Fourier di una sequenza

Caso continuo:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Caso discreto:

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi nF}$$

Inoltre:

$$\bar{X}(F+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi n(F+1)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi nF} e^{-i2\pi n} = \bar{X}(F)$$

Trasformata di Fourier di una sequenza

$$\bar{X}(F+1) = \bar{X}(F)$$

o, in altri termini:

$$\bar{X}\left(f + \frac{1}{T_c}\right) = \bar{X}(f)$$

cioè è periodica, con periodo $1/T_c$! Quindi vale l'espansione in serie di Fourier:

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi nF}$$

di cui sappiamo come valutare i coefficienti:

$$x[n] = T_c \int_{\frac{-1}{2T_c}}^{\frac{1}{2T_c}} \bar{X}(f) e^{i2\pi nfT_c} \mathrm{d}f$$

Equazioni di analisi

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Tempo continuo

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi nF}$$

Tempo discreto

Equazioni di sintesi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df$$

Tempo continuo

$$x[n] = T_c \int_{\frac{-1}{2T_c}}^{\frac{1}{2T_c}} \bar{X}(f) e^{i2\pi n f T_c} \mathrm{d}f$$

Tempo discreto

Trasformata Discreta di Fourier

$$\bar{X}(F) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-i2\pi nF}$$

purtroppo ancora siamo lontani dalla *realtà,*
in un caso reale:

- il numero di campioni nel tempo è *finito*
- anche le frequenze sono in numero *finito* e non nel continuo

In questo caso si dimostra che:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \qquad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

La condizione di Nyquist

Campionare il segnale è equivalente a moltiplicarlo per un treno di impulsi:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

Usando il teorema di prodotto e convoluzione e le propritá della δ:

$$X_s(f) = X(f) \otimes \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

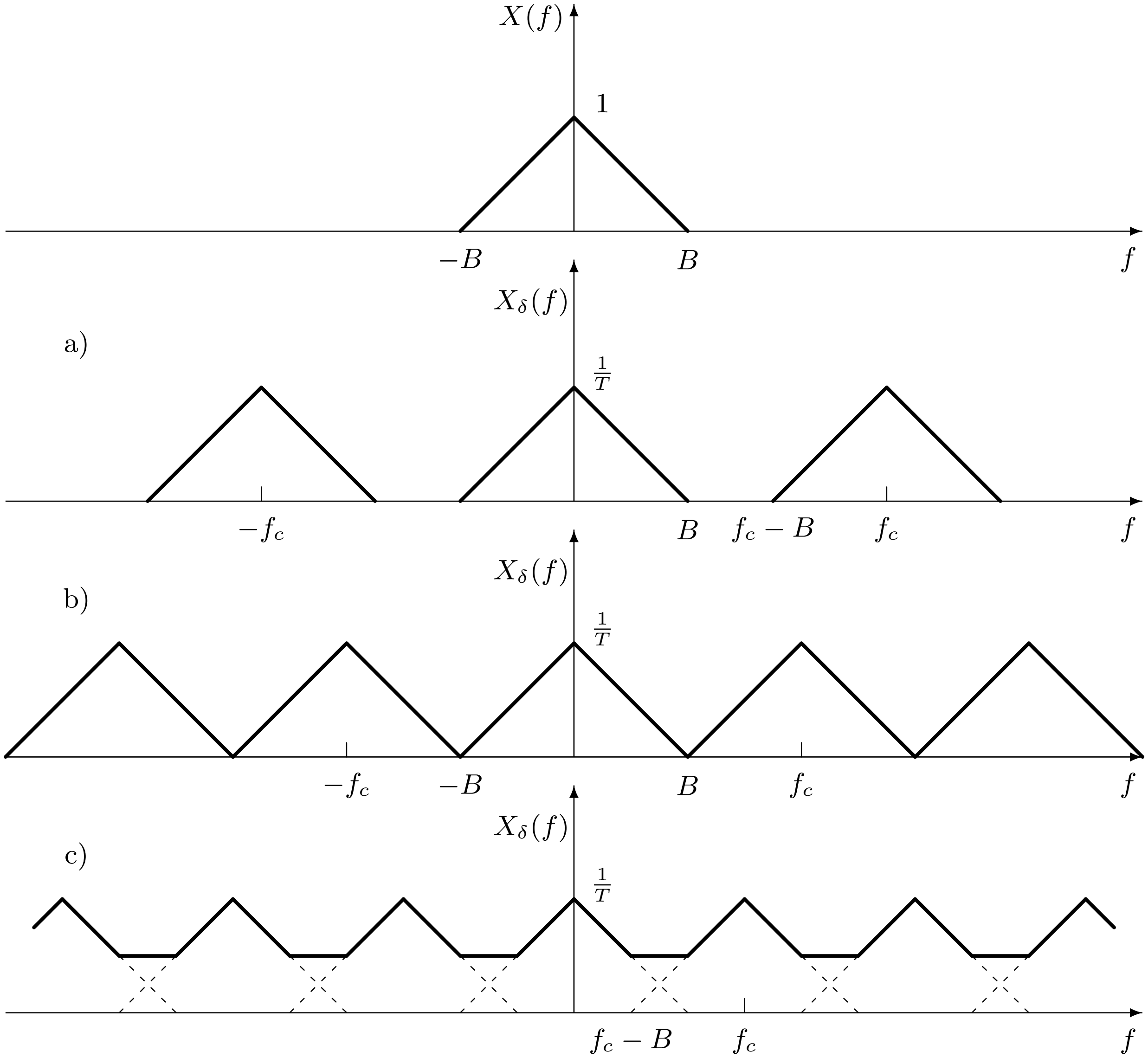
da cui:

$$X_s(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right) = f_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - kf_c\right)$$

La condizione di Nyquist

la *larghezza* del segnale nel dominio delle frequenza è la sua *banda* (*B*)

a) $f_c > 2B$
b) $f_c = 2B$
c) $f_c < 2B$



La condizione di Nyquist

$$X_s(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

La trasformata di Fourier di una sequenza è la periodicizzazione della trasformata del segnale originale, con una periodicità pari alla frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$.

Per garantirsi l'assenza di *aliasing*, la frequenza di campionamento deve essere tale che:

$$f_c = \frac{1}{T_c} \geq 2B$$

dove B è la banda del segnale

Aliasing

Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Caso reale:

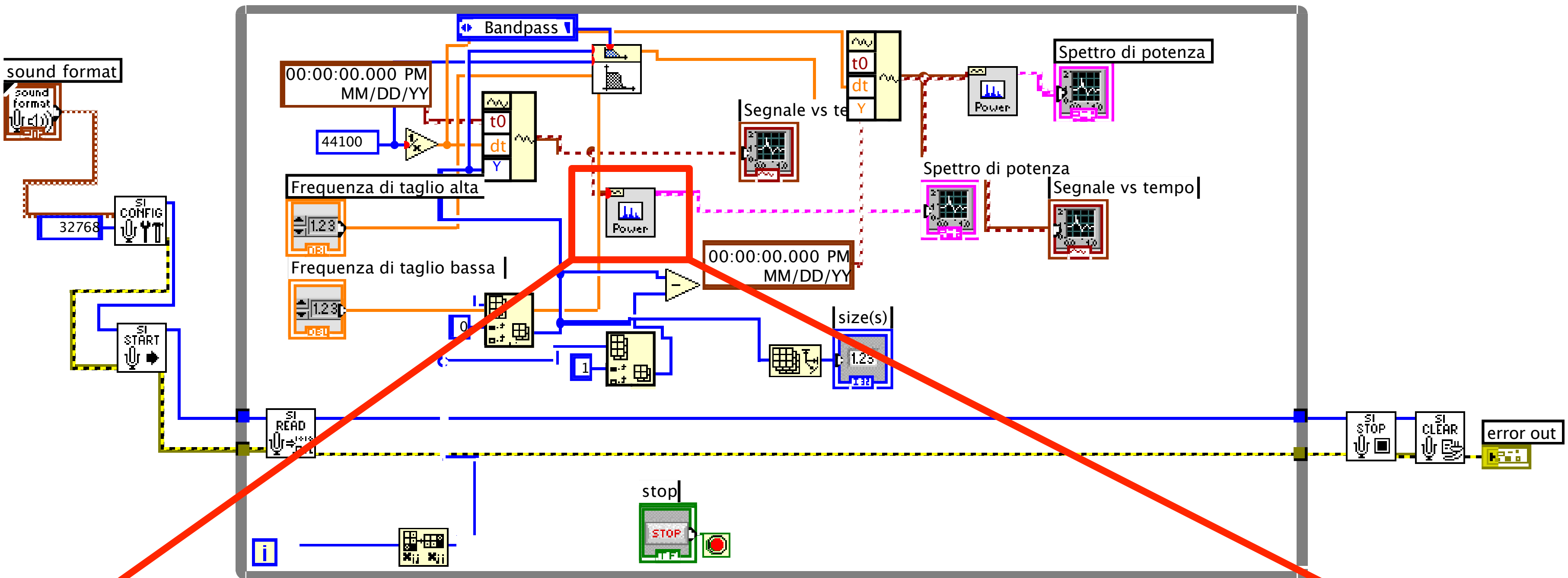
- il numero di campioni nel tempo è *finito*
- anche le frequenze sono in numero *finito* e non nel continuo

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \qquad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi k \frac{n}{N}}$$

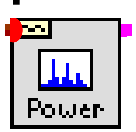
Se si acquisisce un segnale per un tempo T_p con una frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$, in totale si avranno $N = T_p/T_c$ campioni. Lo spettro di Fourier avrà una "risoluzione" di $f_p = 1/T_p$ e la frequenza massima che sarà rappresentata è $N{*}f_p$, cioè $1/T_c = f_c$ (cfr. Nyquist*)

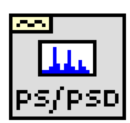
*in realtà N/2 elementi della DFT (FFT) sono usati per le frequenze negativi

Power Spectrum su Labview



Per il power spectrum diverse implementazioni sono possibili:





*

...

* http://www.ni.com/white-paper/4541/en/