Laboratorio II, modulo 2
2015-2016

Banda di un segnale, filtri e cavi coassiali

(cfr. http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_03.pdf e http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_04.pdf e http://wpage.unina.it/verdoliv/tds/appunti/Appunti_05.pdf)

Alcune definizioni (1)

- Segnale **periodico**: $x(t) = x(t+T_0)$ per qualunque t
- Segnale **determinato**: quando il suo valore è univocamente determinabile una volta fissati i valori delle variabili indipendenti (tempo) (contrario: **aleatorio**)
- Potenza istantanea associata ad un segnale (reale) $x(t)$: $x^2(t)$

$$p_x(t) = x^*(t)\ x(t) = |x(t)|^2$$

Alcune definizioni (1)

- Segnale **periodico**: $x(t) = x(t+T_0)$ per qualunque t
- Segnale **determinato**: quando il suo valore è univocamente determinabile una volta fissati i valori delle variabili indipendenti (tempo) (contrario: **aleatorio**)
- Potenza istantanea di segnale $x(t)$: $x^2(t)$
- Energia associata ad un segnale $x(t)$:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

(nota: l'energia di un segnale fisico è finita per definizione)

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali periodici a tempo continuo)

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-i2\pi k f_0 t}dt$$

Analisi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali aperiodici a tempo continuo)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$ Analisi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$ Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

Teorema (relazione) di Parseval

(segnali periodici a tempo continuo)

Potenza di un segnale periodico:

$$p_x(t) = x^*(t)\ x(t) = |x(t)|^2$$

$$\Longrightarrow \quad P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} p_x(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

e, dall'equazione di sintesi

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^2$$

la potenza media di un segnale periodico è la somma delle potenze medie delle singole armoniche che lo compongono

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^2$$

Teorema (relazione) di Parseval

(segnali aperiodici a tempo continuo)

Partiamo dalla definizione di energia:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ x(t)^* \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-i2\pi f t} \mathrm{d}f \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}f =$$

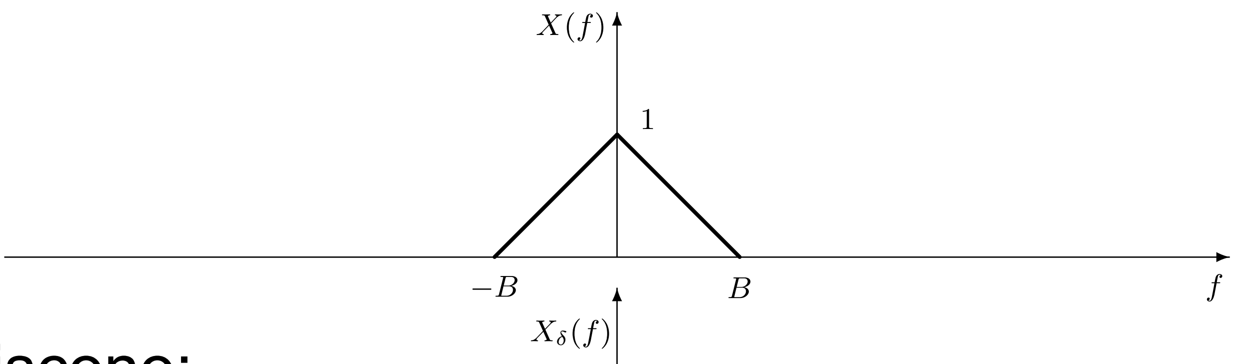
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\ X(f)\ \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

e quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f$$

banda e durata di un segnale

L'analogo del concetto di *durata* (per un segnale nel dominio del tempo) è il concetto di *banda*



Si definiscono:

- segnali a *banda rigorosamente limitata*
- segnali a *banda illimitata*
- segnali a *banda praticamente illimitata*

$$\int_{-B}^{B} |X(f)|^2 \, \mathrm{d}f = \alpha E_x$$ con 0<α<1 (es. 0.9)

banda e durata di un segnale

Moltiplicando un segnale *limitato* nel dominio della frequenza (del tempo) per un impulso rettangolare opportuno, lo possiamo riscrivere come:

$$X(f) = X(f)\Pi\left(f/2B\right)$$

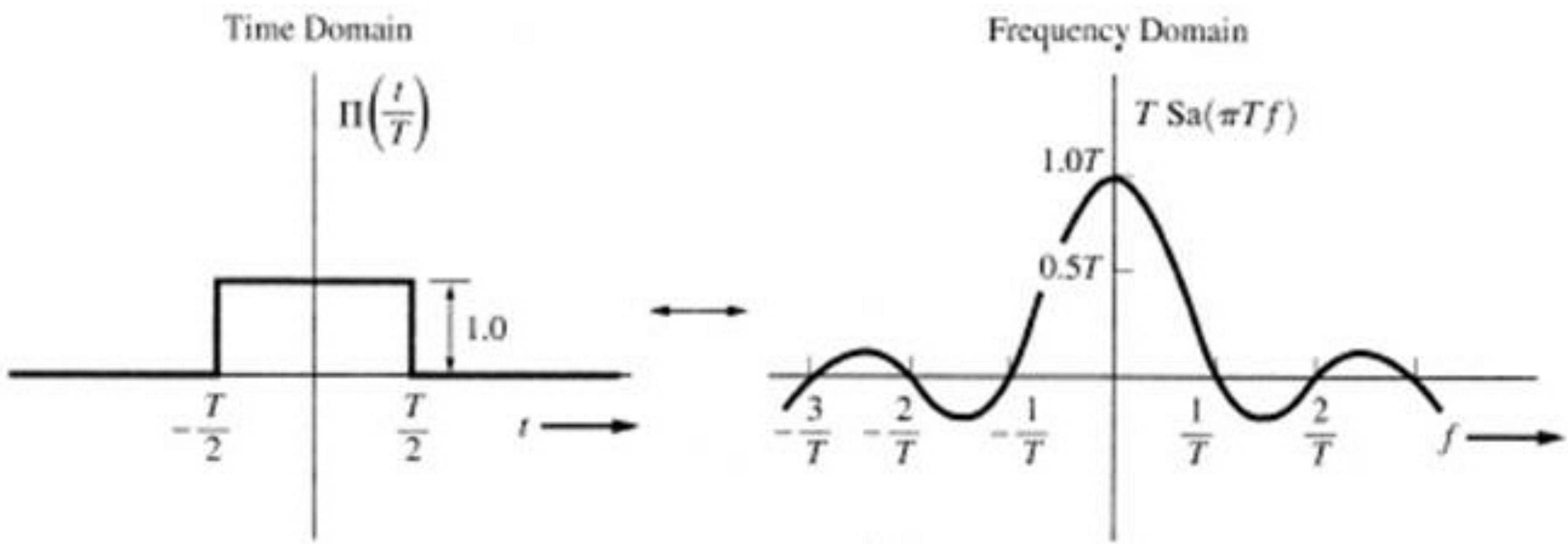
che equivale, nel dominio del tempo (frequenza) ad una convoluzione:

$$x(t) * 2B\ sinc\left(2Bt\right)$$

che è un segnale *non limitato*.

* sinc(x) = sin(x)/x

Sinc ←→ Π (rect)



(a) Rectangular Pulse and Its Spectrum

banda e durata di un segnale

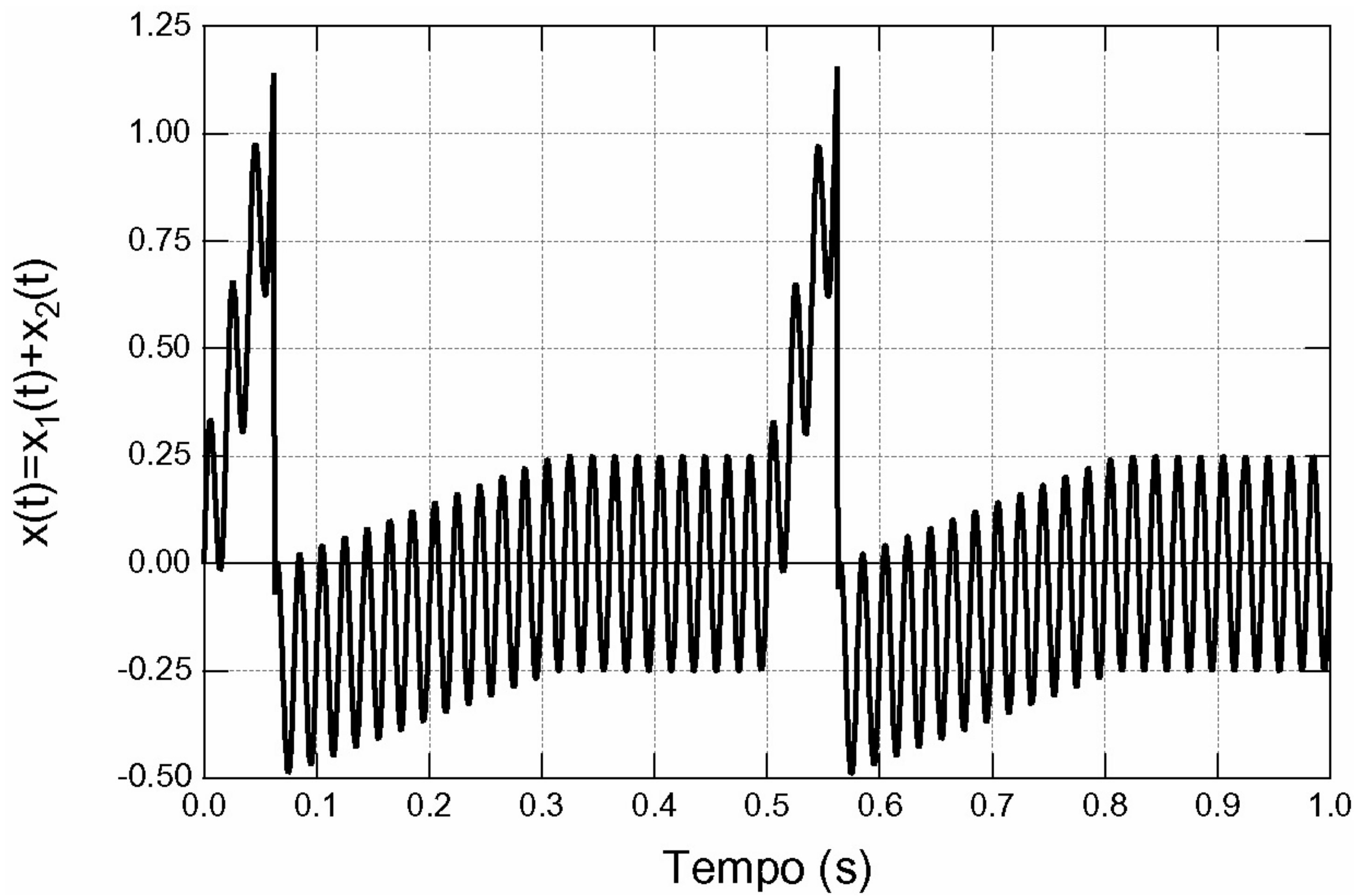
Di conseguenza:

- un segnale *rigorosamente limitato* nel tempo ha banda *infinita*

- un segnale con banda *limitata* ha durata *infinita*

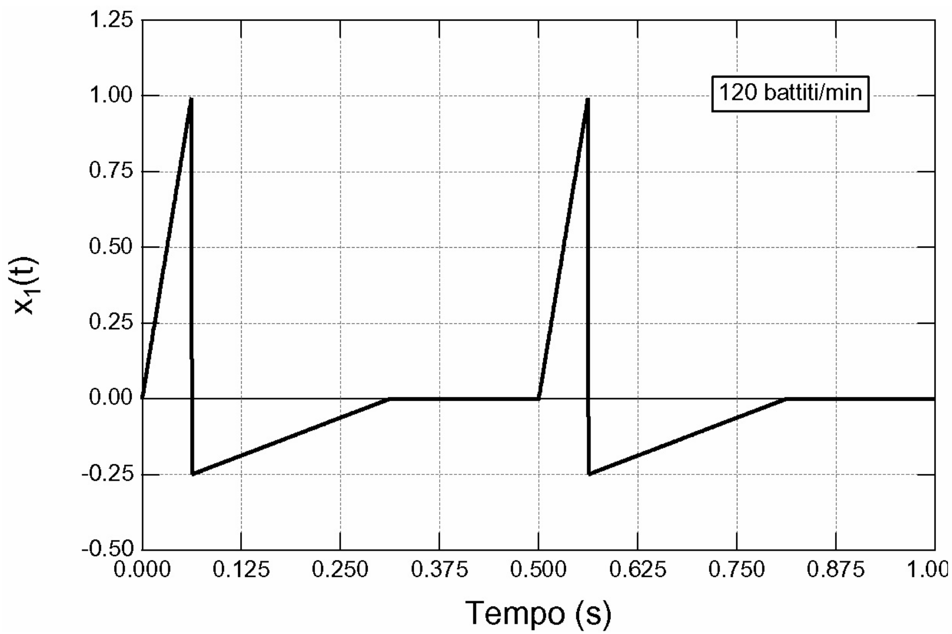
Filtri

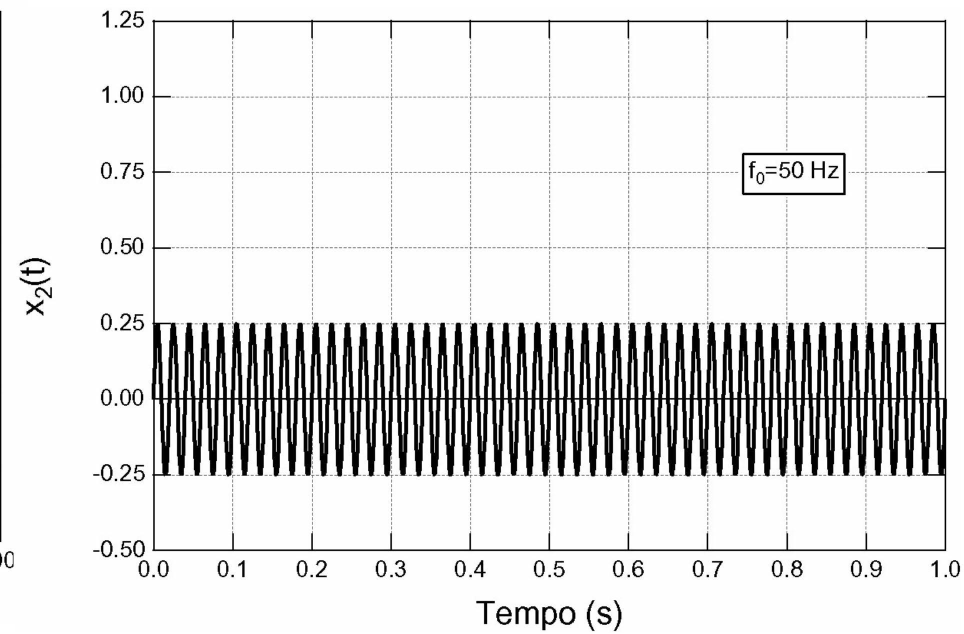
Supponiamo di avere un segnale:



Filtri

Composto da due segnali periodici

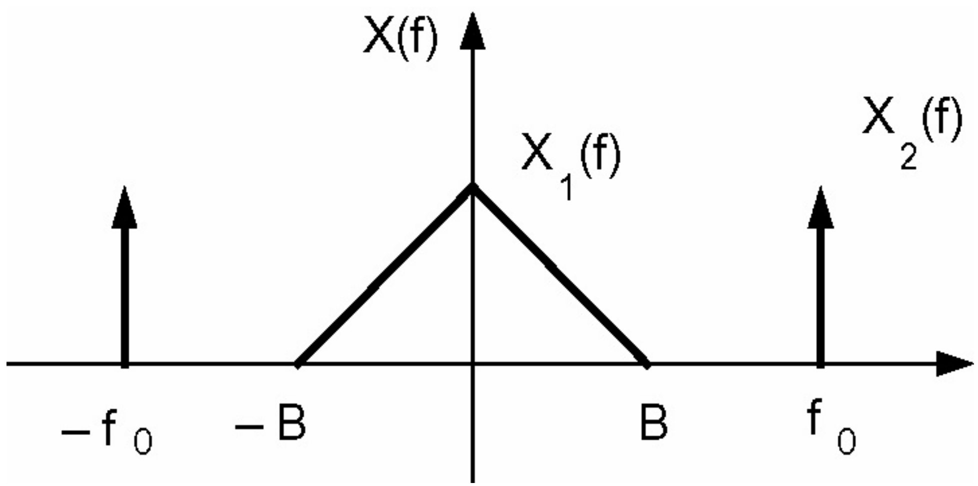




ad esempio: un segnale periodico (120 Hz), di un elettrocardiogramma, e un disturbo periodico (50 Hz) dovuto dalla tensione di alimentazione

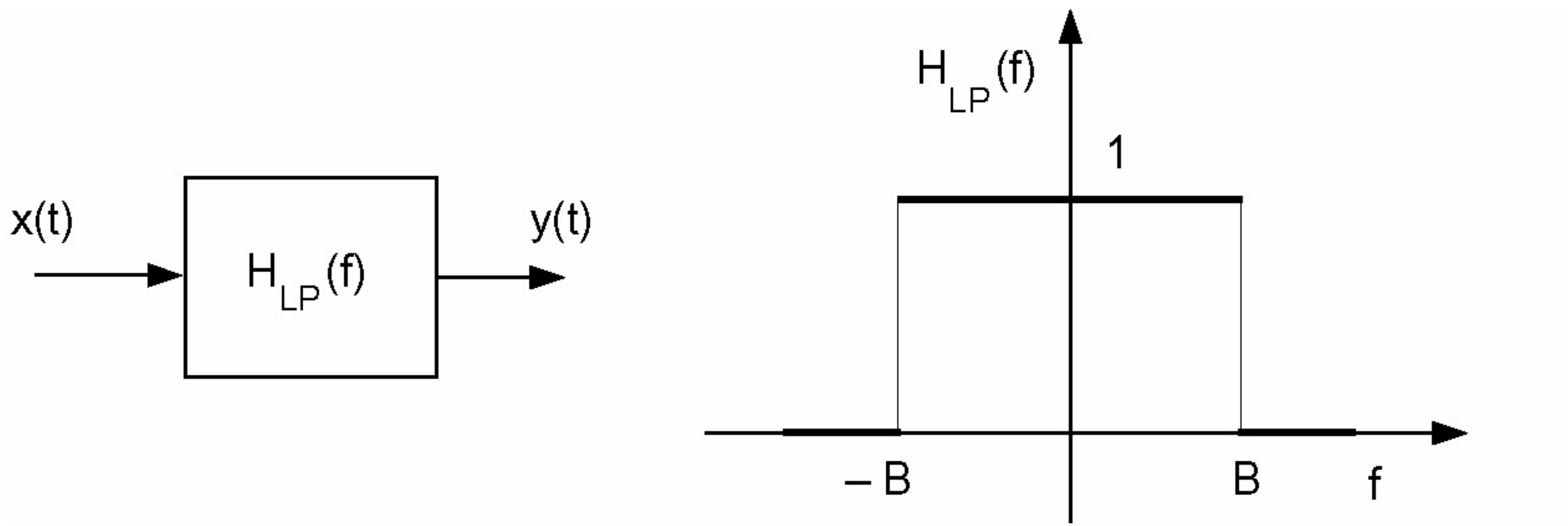
Passiamo al dominio frequenziale

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$



abbiamo bisogno di un apparato con caratteristiche di selettività delle differenti componenti frequenziali del segnale: un filtro

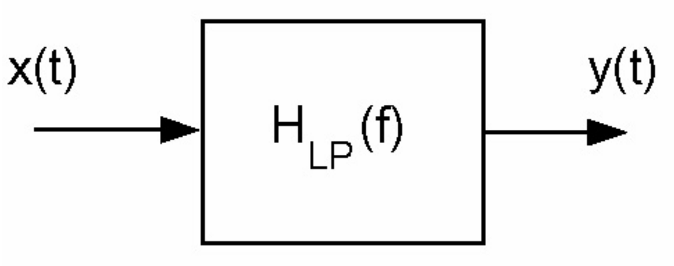
Filtro passa-basso (ideale)



$$H_{LP}(f) = rect(\frac{f}{2B})$$

$H_{LP}(f)$ è la risposta in frequenza

Filtro passa-basso (ideale)



il segnale, y(t), in uscita dal filtro, avrà trasformata di Fourier

$$Y(f) = X(f)\ H(f)$$

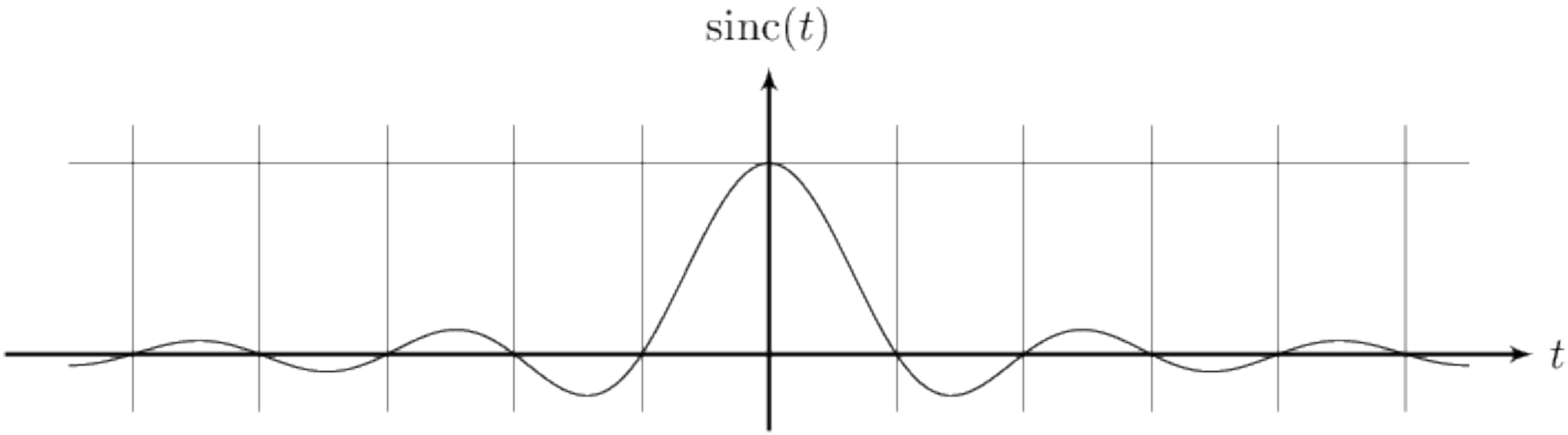
cioè sarà privo della componente X_2(f) (e quindi x_2(t)), cioè del disturbo:

$$Y(f) = X(f)\ H(f) \approx X_1(f)$$

$$y(t) \approx x_1(t)$$

Filtro passa-basso (ideale)

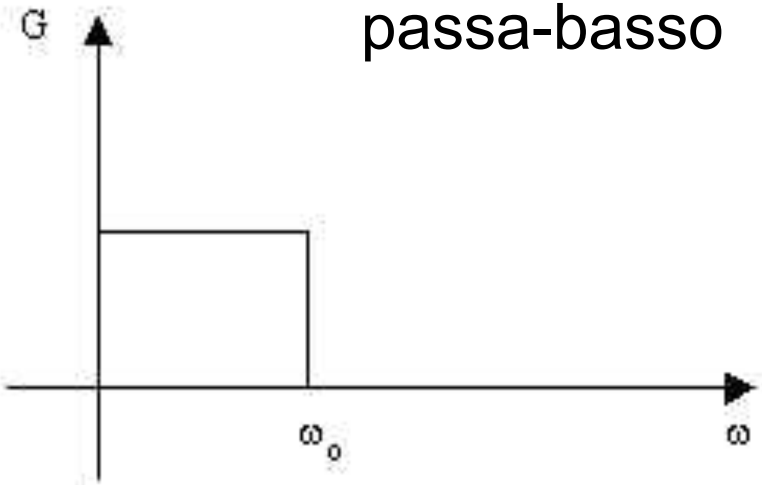
$$h_{LP}(t) = 2B\ sinc\,(2Bt)$$



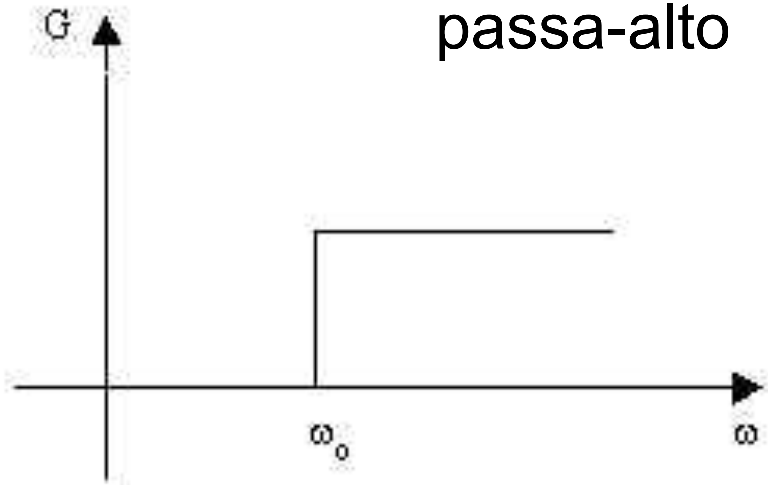
La risposta nel dominio del tempo del filtro passa-basso è il sinc, cioè ha una risposta impulsiva

Filtri ideali

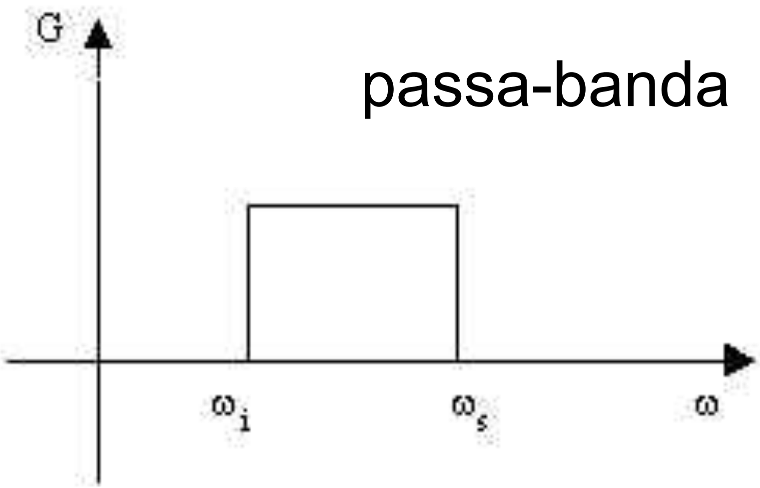
passa-basso



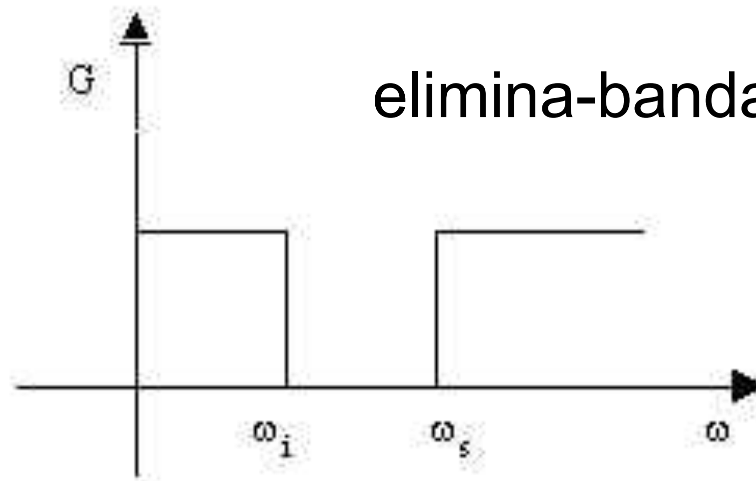
passa-alto



passa-banda



elimina-banda



(ricordiamo) la condizione di Nyquist

$$X_s(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$

La trasformata di Fourier di una sequenza è la periodicizzazione della trasformata del segnale originale, con una periodicità pari alla frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c$.

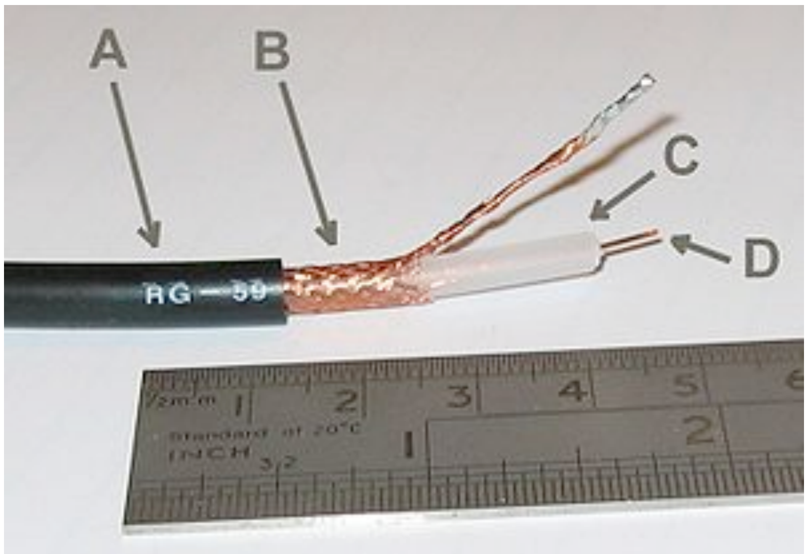
Per garantirsi l'assenza di *aliasing*, la frequenza di campionamento deve essere tale che:

$$f_c = \frac{1}{T_c} \geq 2B$$

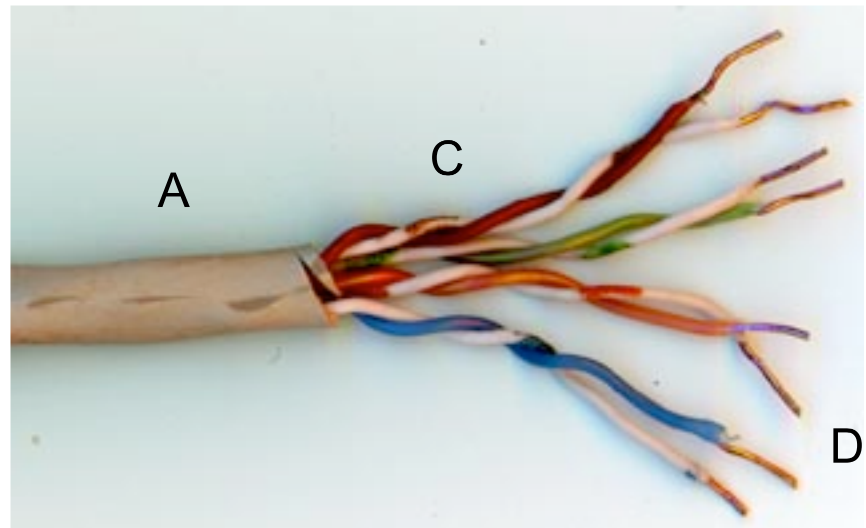
dove B è la banda del segnale

Cavi…

cavo coassiale

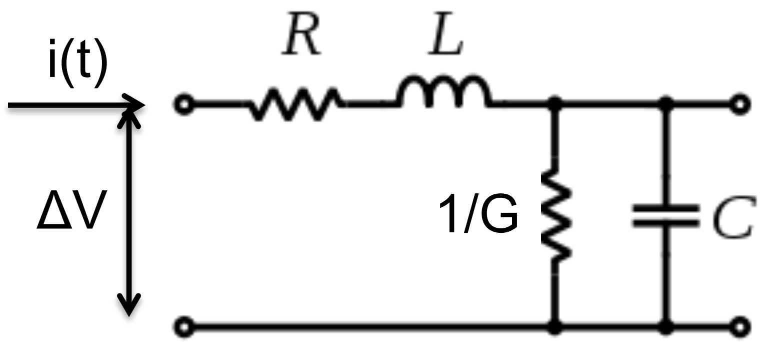


doppino



A – Guaina esterna
B – maglia di rame intrecciata
C – isolante dielettrico
D – nucleo di rame

Elemento infinitesimo di cavo



$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -L\frac{\partial I(t)}{\partial t} - RI(t)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -GV(t) - C\frac{\partial V(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial^2 z} = LC\frac{\partial^2 V(t)}{\partial^2 t} + (LG + RC)\frac{\partial V(t)}{\partial t} + RGV(t)$$

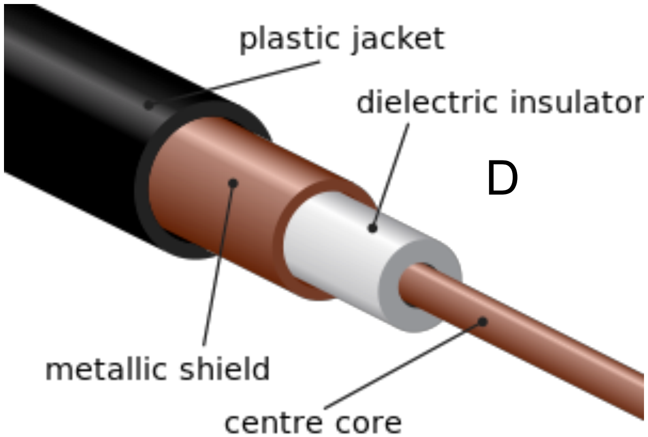
Cavo ideale (R = G = 0)

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial^2 z} = LC\frac{\partial^2 V(t)}{\partial^2 t}$$

velocità di propagazione

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim 2\ 10^8 m/s$$

Cavo coassiale ideale



D

d

$$L = \frac{\mu}{2\pi} ln \frac{D}{d} \qquad C = \frac{2\pi\epsilon}{ln\frac{D}{d}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o\mu_o}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} ln \frac{D}{d}$$

se inseriamo i valori tipici dei materiali utilizzati otteniamo I famosi 50Ω a cui siamo abituati

ripetendo il conto per un doppino si trova il valore di 100Ω