Alcune definizioni (1)

- Segnale periodico: $x(t) = x(t+T_0)$ per qualunque t
- Segnale determinato: quando il suo valore è univocamente determinabile una volta fissati i valori delle variabili indipendenti (tempo)
- Potenza istantanea associata ad un segnale *x(t):* $x^2(t)$
- Energia associata ad un segnale x(t):

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

(nota: l'energia di un segnale fisico è finita per definizione)

G. Ambrosi

Segnali periodici

- $x(t)=x(t+T_o)$; $f_o = 1/T_o$

- $P_x = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$

- $x_m = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$

- $x(t) = a_o + a_1 \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \theta_2) +$

Sviluppo in serie di Fourier (1)

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

- $A_o = a_o$; $2A_k = a_k$; k¸1

- Ogni particolare x(t) è caratterizzato da particolari valori di A_k e θ_k

Sviluppo in serie di Fourier (2)

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{e^{i(2\pi k f_o t + \theta_k)} + e^{-i(2\pi k f_o t + \theta_k)}}{2}$$

$$x(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\theta_k} e^{i2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-i\theta_k} e^{-i2\pi k f_0 t}$$

G. Ambrosi

Sviluppo in serie di Fourier (3)

$$x(t) = A_o + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i\theta_k} e^{i2\pi k f_o t} + \sum_{k=-\infty}^{1} A_{-k} e^{-i\theta_{-k}} e^{i2\pi k f_o t}$$

- $X_o = A_o$; $X_k = A_k \exp(i\theta_k)$; $X_k = A_{-k} \exp(-i\theta_{-k})$

$$x(t) = X_o + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Sviluppo in serie di Fourier (4)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$\int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) e^{-i2\pi n f_o t} dt = \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t} e^{-i2\pi n f_o t} dt$$

$$\int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) e^{-i2\pi n f_o t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{i2\pi (k-n) f_o t} dt$$

$$\int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{i2\pi(k-n)f_o t} dt = \frac{e^{i2\pi(k-n)f_o t}}{i2\pi(k-n)f_o} \Bigg|_{-T_0/2}^{T_0/2}$$

$$= \frac{e^{i\pi(k-n)} - e^{-i\pi(k-n)}}{i2\pi(k-n)f_o} = \frac{sin[\pi(k-n)]}{\pi(k-n)f_o}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi(k-n)f_o t} dt = T_o \quad k = n$$

G. Ambrosi

Sviluppo in serie di Fourier (5)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_0 t} e^{-i2\pi n f_0 t} dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi (k-n) f_0 t} dt$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt = X_n T_0$$

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi k f_o t} dt$$

G. Ambrosi

Equazioni di analisi e sintesi

(segnali periodici a tempo continuo)

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt$$

Analisi

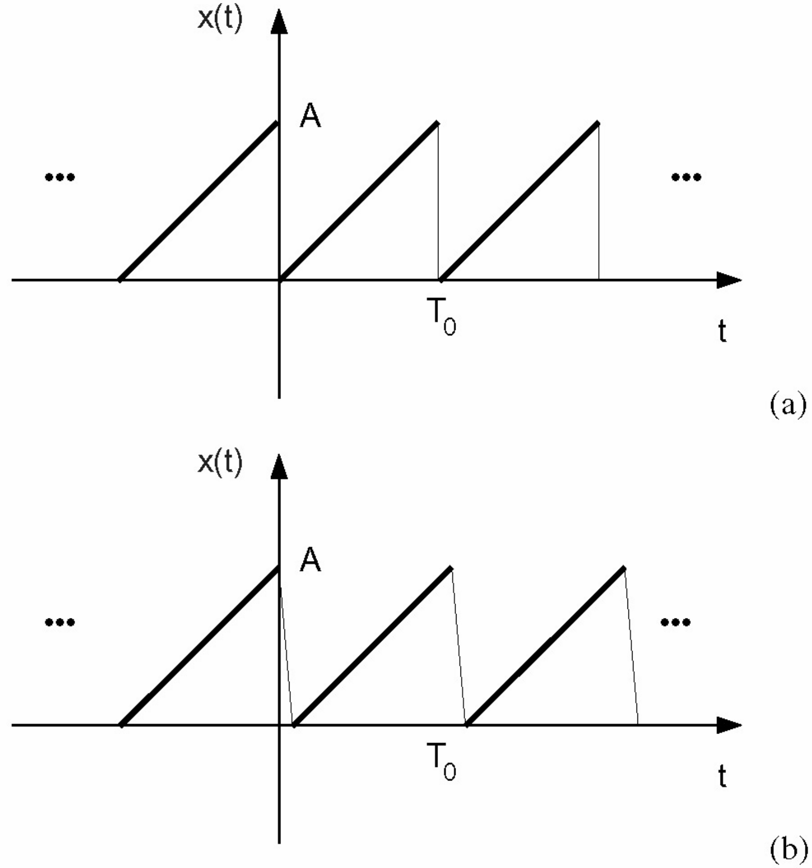
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

(nota: X_k è in generale complessa)

Segnali fisici e reali



G. Ambrosi

Criterio di Dirichlet

- Un segnale x(t) periodico è sviluppabile in serie di Fourier se:
  - è assolutamente integrabile sul periodo T_0
  - è continuo o presenta un numero finito di discontinuità
  - è derivabile rispetto al tempo nel periodo T_0, escluso al più un numero finito di punti

Equazioni di analisi e sintesi

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi k f_o t} dt$$

Analisi

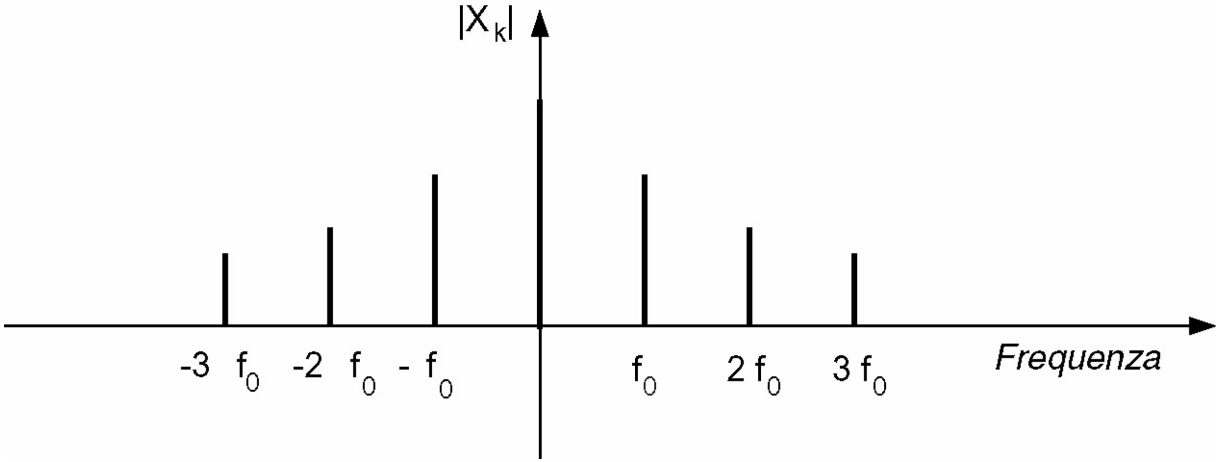
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

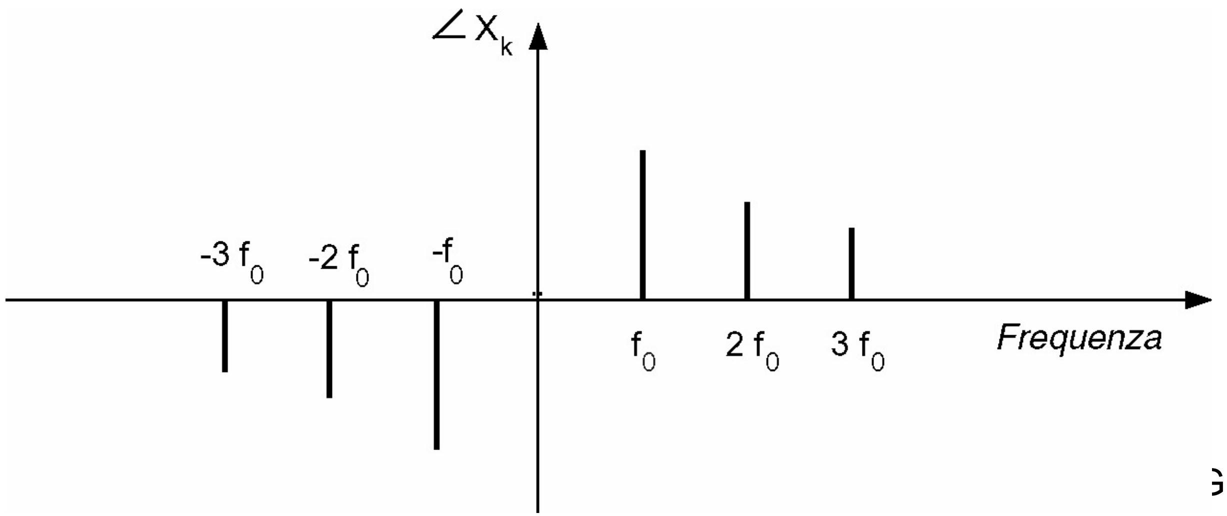
Sintesi

$$x(t) \Leftrightarrow X_k$$

(nota: X_k è in generale complessa)

Spettro di ampiezza e di fase





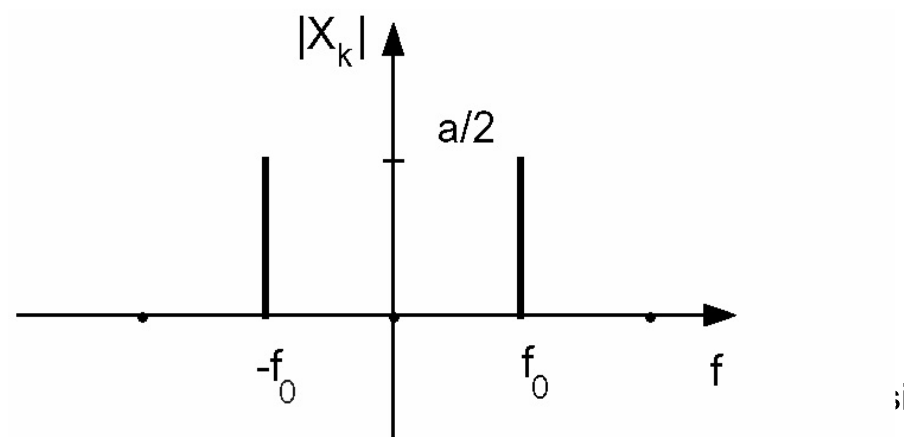
G. Ambrosi

Esercizio:

- Trasformata del segnale x(t)= a cos(2π f_o t)

$$x(t) = A_o + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(2\pi k f_o t + \theta_k)$$

- $X_o = A_o$; $X_k = A_k \exp(i\theta_k)$; $X_k = A_{-k} \exp(-i\theta_{-k})$
- $X_1 = a/2 \quad X_{-1} = a/2$



Segnali pari e dispari

- Un segnale è pari se $x(t) = x(-t)$
  - $X_k = X_{-k}$

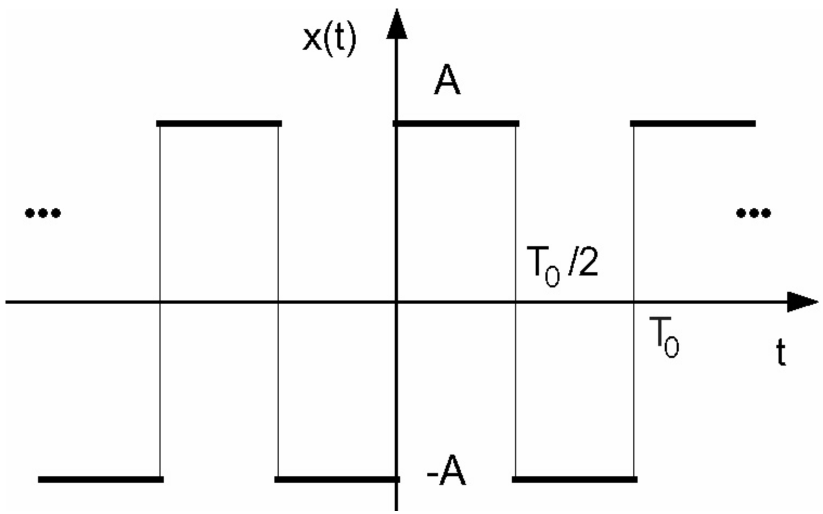
$$X_k = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t)cos(2\pi k f_o t)dt$$

- Un segnale è dispari se $x(t) = -x(-t)$
  - $X_k = - X_{-k}$

$$X_k = -\frac{2i}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t)sin(2\pi k f_o t)dt$$

Trasformta del segnale onda quadra

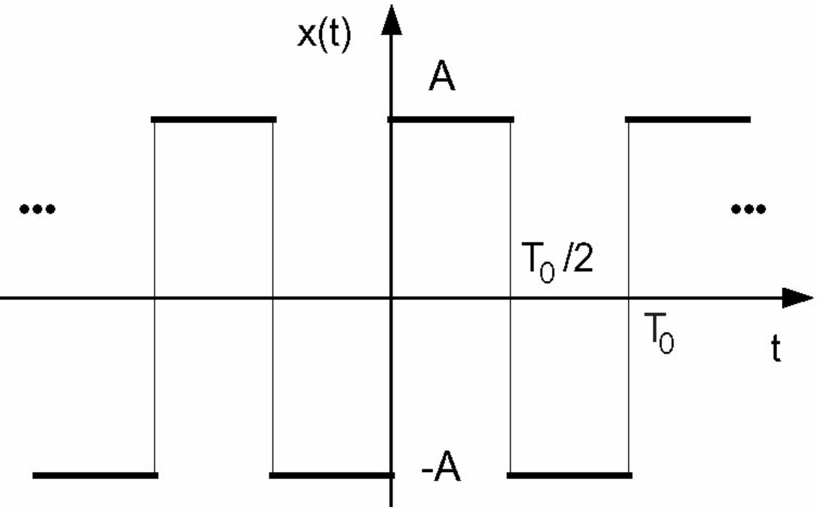
$$X_k = -\frac{2i}{T_o}\int_0^{T_o/2} x(t) sin(2\pi k f_o t)dt$$

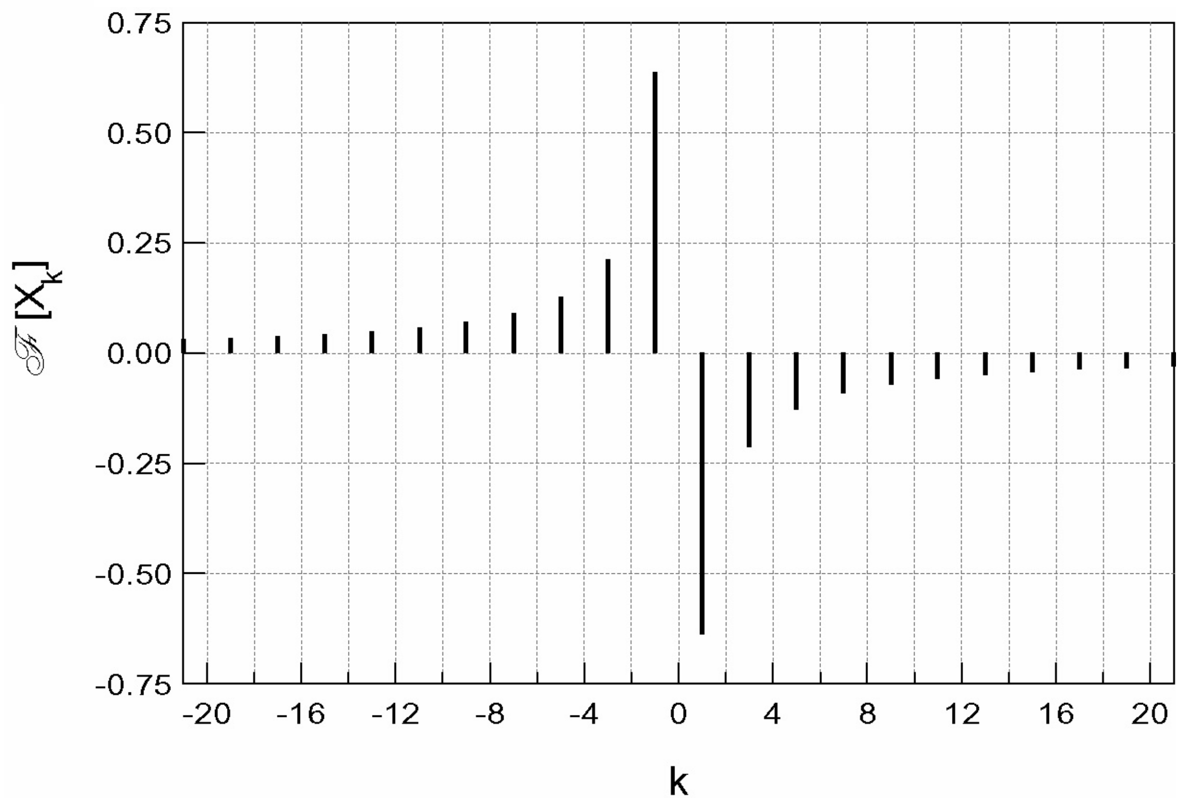


$$X_k = -\frac{2iA}{T_o}\int_0^{T_o/2} sin(2\pi k f_o t)dt = \frac{2iA}{2\pi k f_o T_o} cos(2\pi k f_o t)|_{t=0}^{t=T_o/2}$$

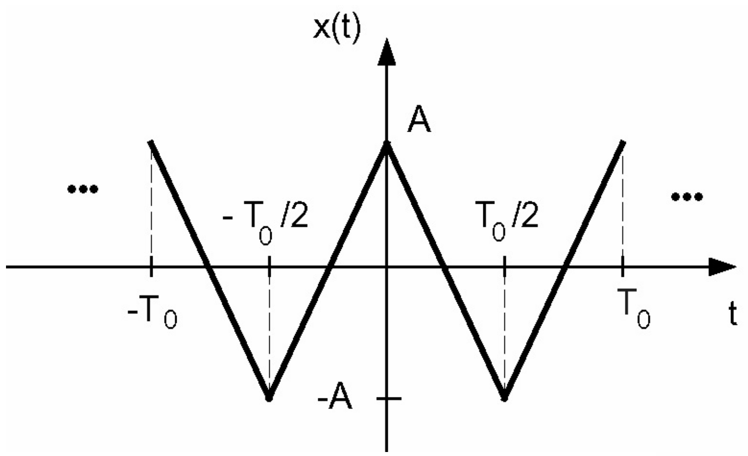
$$X_k = \frac{iA}{\pi k}[cos(\pi k) - 1] = \frac{iA}{\pi k}[(-1)^k - 1] = \frac{2A}{i\pi k}$$ k dispari

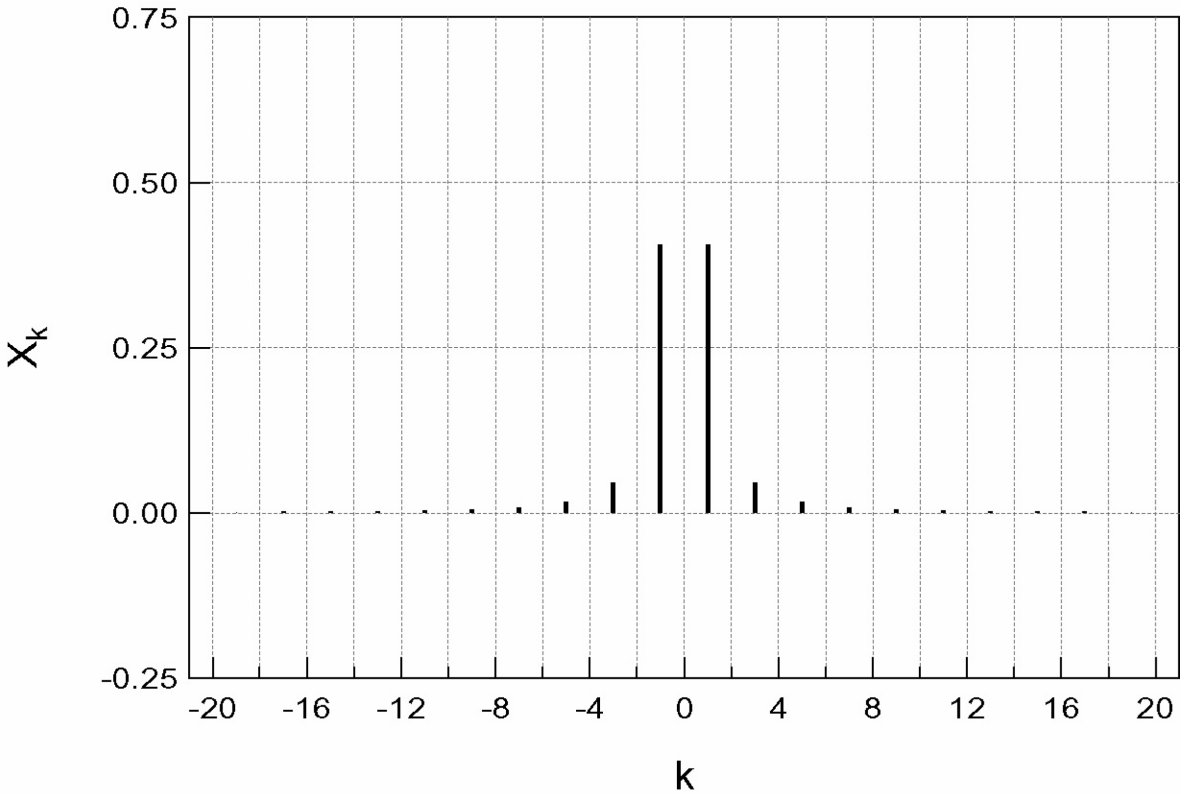
Trasformata dell' onda quadra

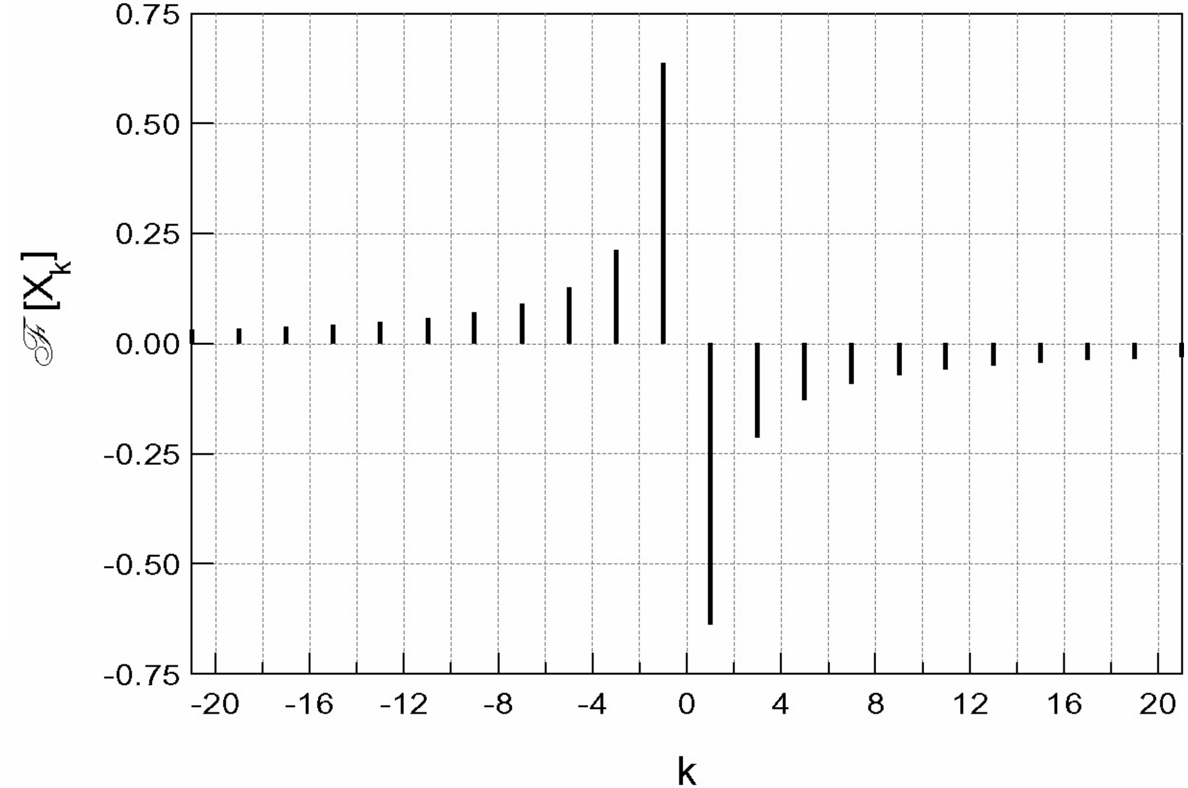


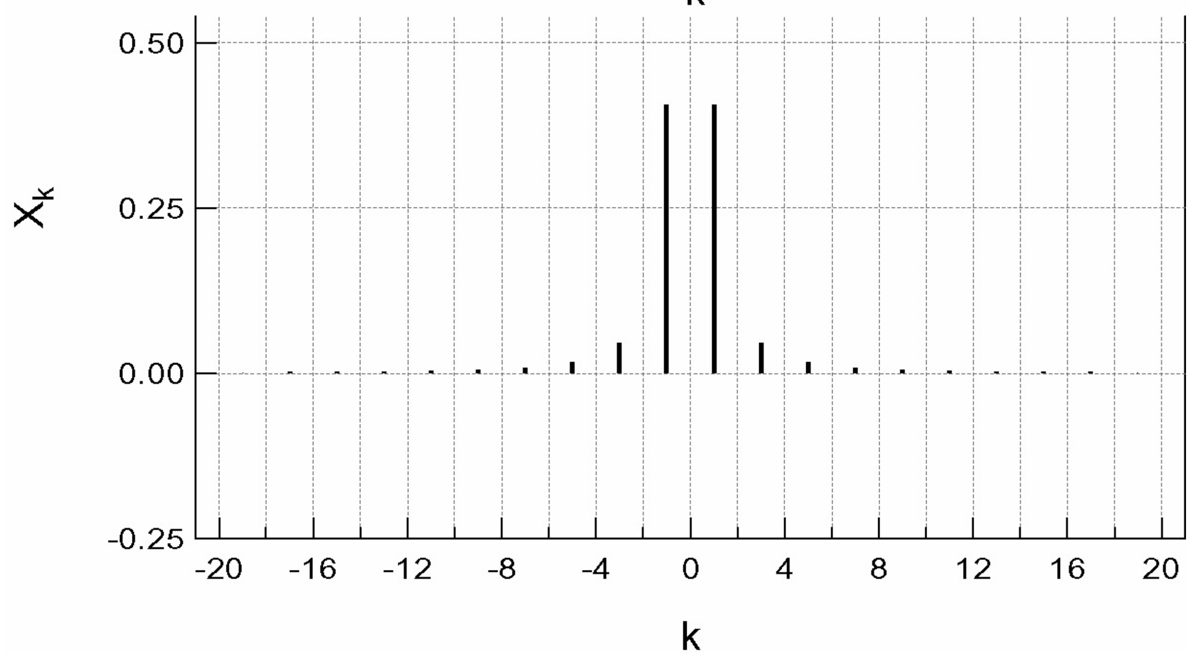


Trasformata dell' onda triangolare






0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
-0.75
ℱ[X_k]
-20 -16 -12 -8 -4 0 4 8 12 16 20
k


0.50
0.25
0.00
-0.25
X_k
-20 -16 -12 -8 -4 0 4 8 12 16 20
k

G. Ambrosi

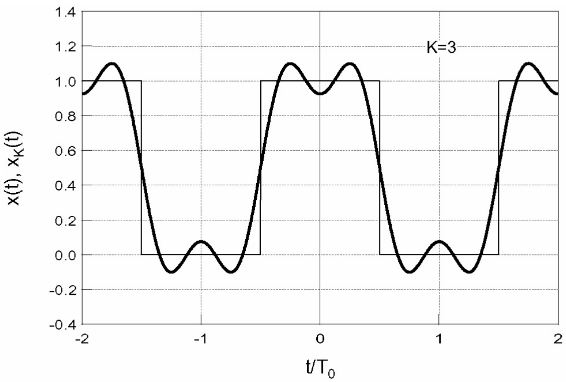
Esercizio n° 0.1

- Si scriva un VI per:
  - sintetizzare un segnale di onda quadra a partire di suoi coefficenti di Fourier:

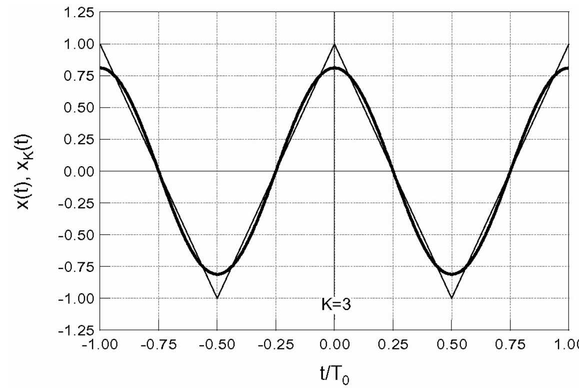
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k f_o t}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{(k-1)/2} cos(2\pi k f_o t) \qquad k\ dispari$$

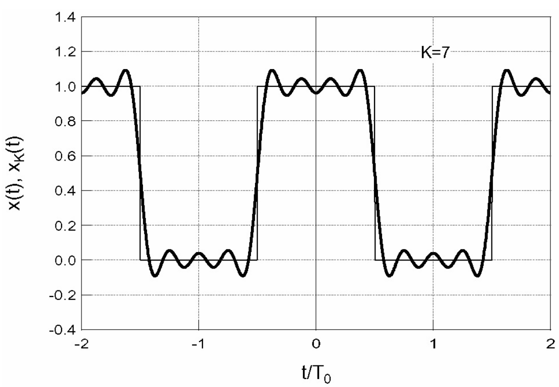
Sintesi



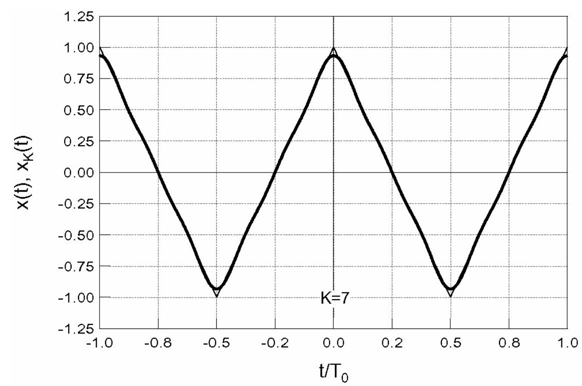
(a)



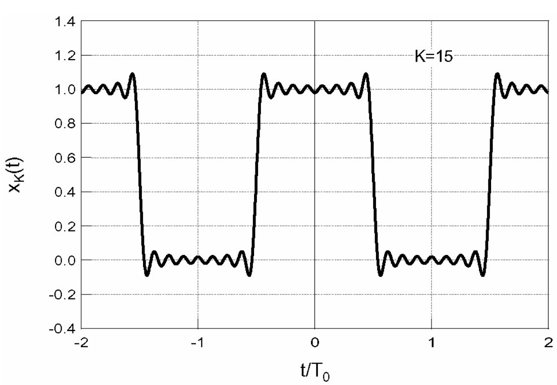
(a)



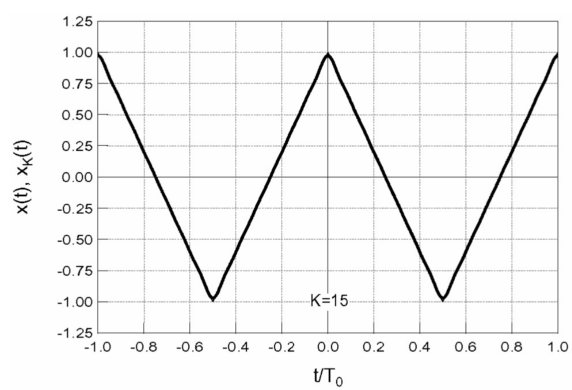
(b)



(b)



(c)



(c)

nbrosi