Banda di un segnale, filtri e cavi coassiali

ricordiamo: Equazione di sintesi e analisi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df$$

Eq. di sintesi

- un segnale continuo x(t) può essere scomposto esattamente nella somma di infiniti esponenziali complessi di ampiezza infinitesima |X(f)| df
- l’ insieme delle ampiezze |X(f)| df è definito lo spettro in frequenza del segnale x(t)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Eq. di analisi

Teorema (relazione) di Parseval

Consideriamo un segnale ad energia finita:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \leq \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) e^{-i2\pi f t} df \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt \, df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) X^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

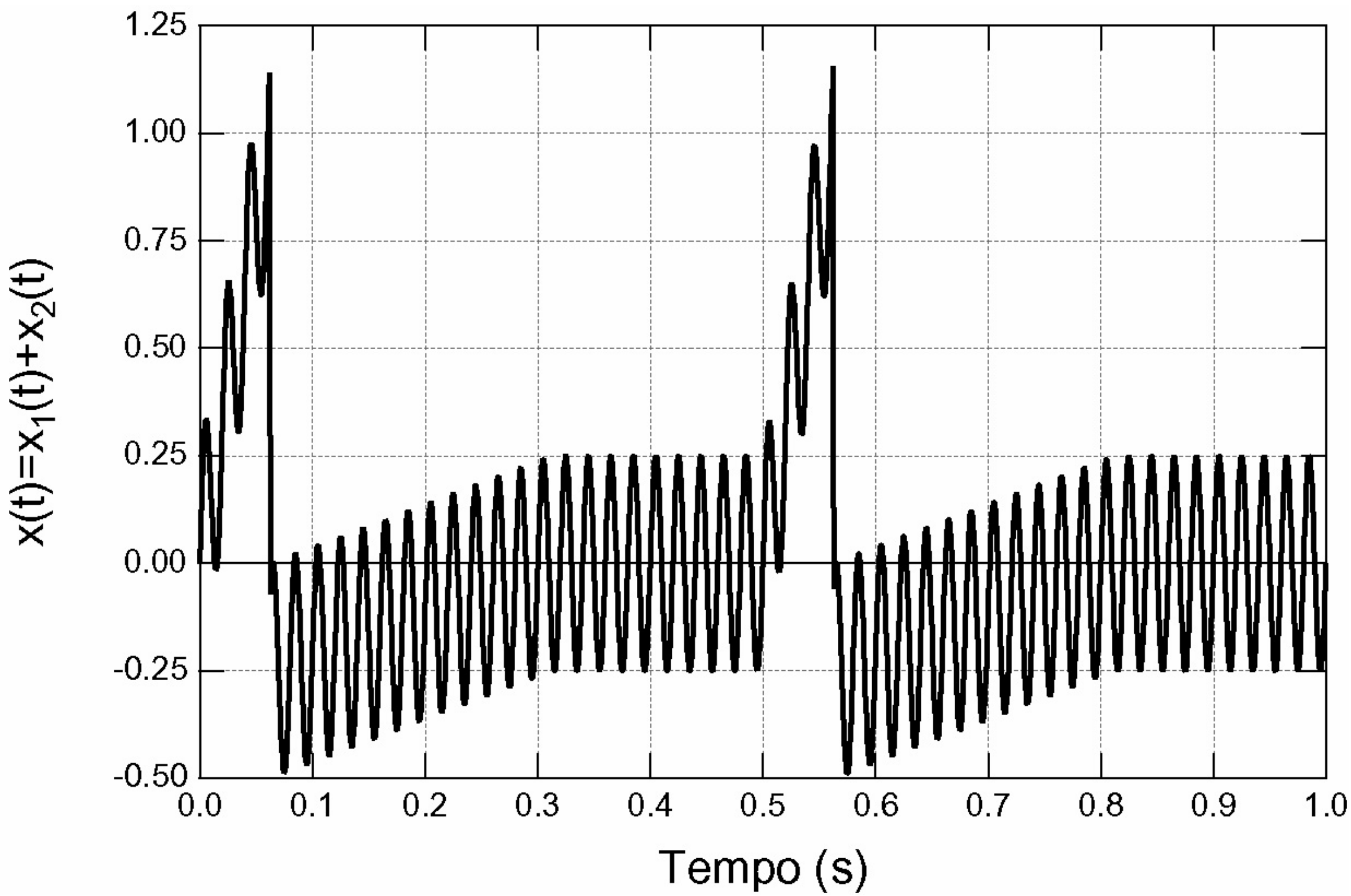
$$\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$$

Che significato ha?

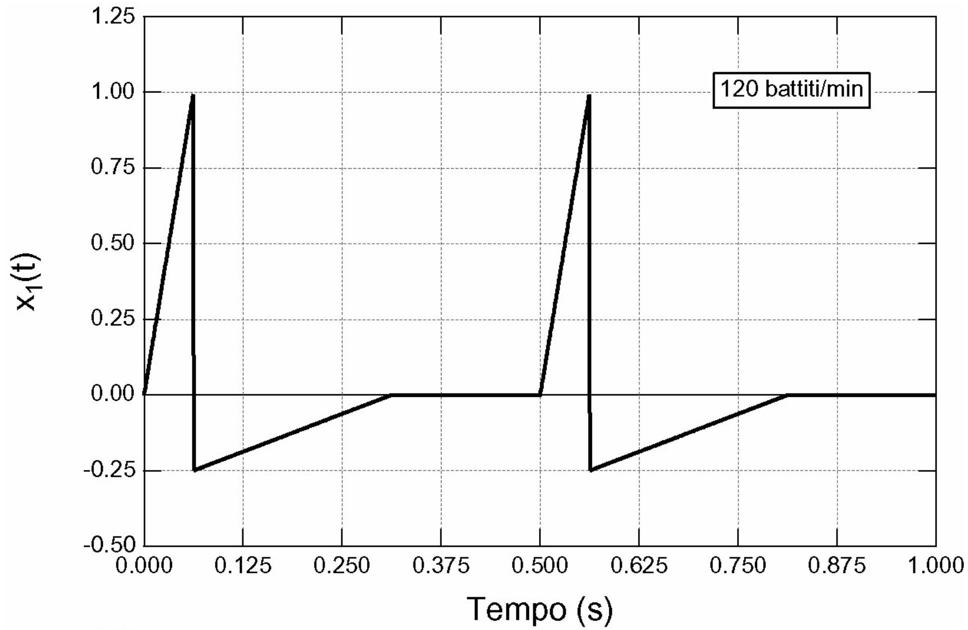
banda e durata di un segnale

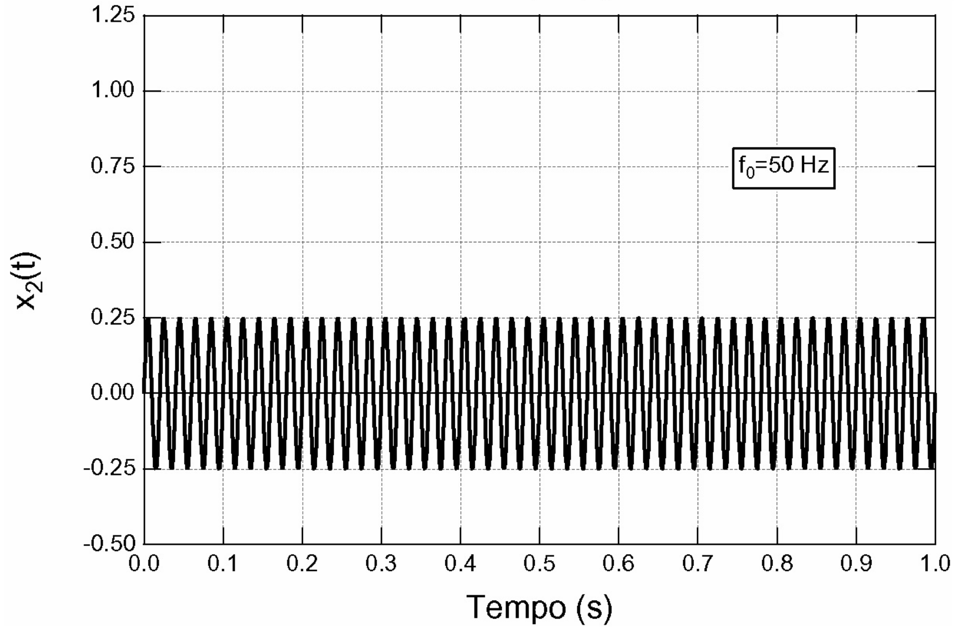
- banda di un segnale: intervallo di frequenze in cui X(f) è definita e diversa da 0.
- un segnale a durata limitata (esiste solo in un intervallo di tempo $[t_1;t_2]$) ha banda infinita
- un segnale con banda limitata ($X(f) \neq 0$ nell'intervallo $[f_1; f_2]$) ha durata infinita

Filtri (?)



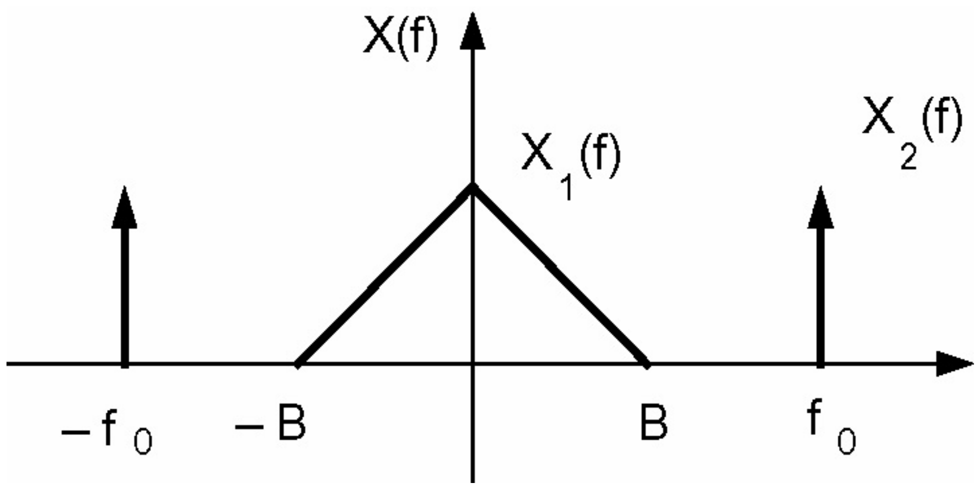
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$
Tempo (s)


120 battiti/min
$x_1(t)$
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
0.000
0.125
0.250
0.375
0.500
0.625
0.750
0.875
1.000
Tempo (s)

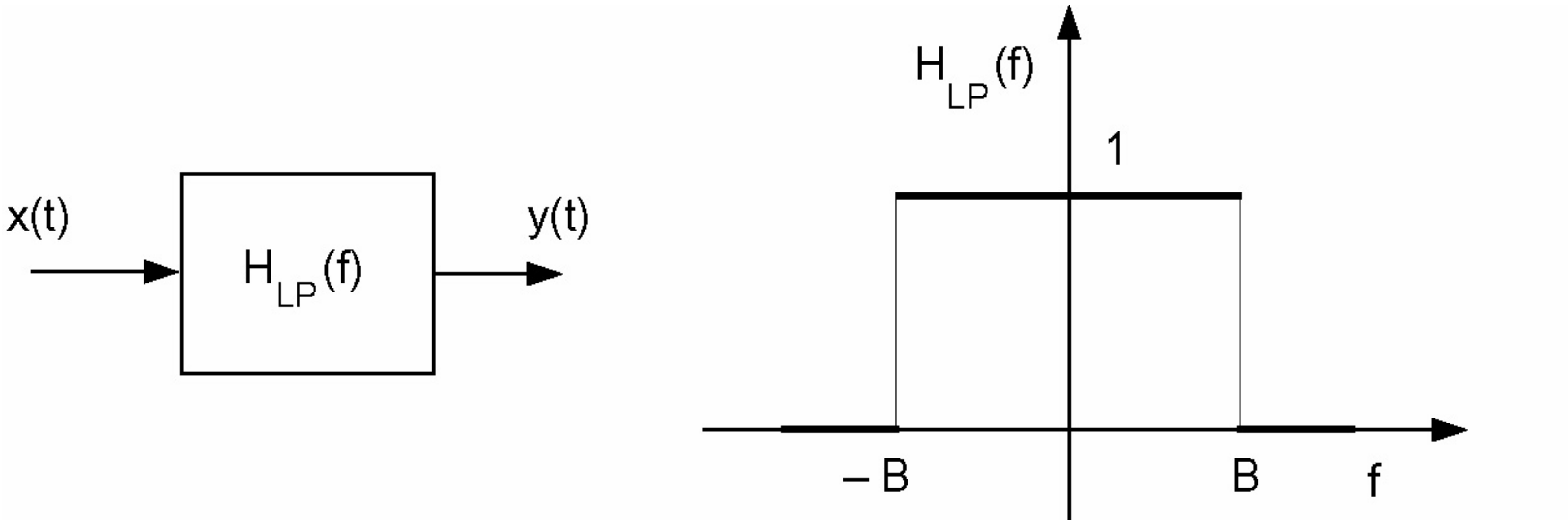

f_0=50 Hz
$x_2(t)$
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
Tempo (s)

Passiamo al dominio frequenziale

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f)$$



Abbiamo bisogno di un apparato con caratteristiche di selettività delle differenti componenti frequenziali del segnale: un filtro

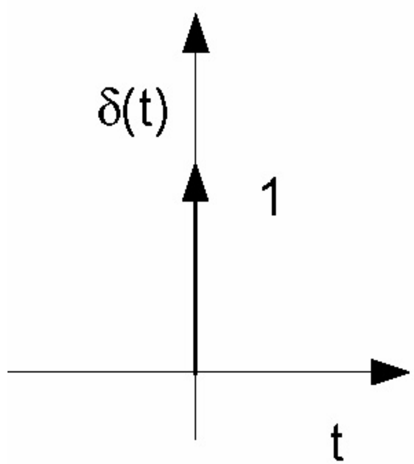


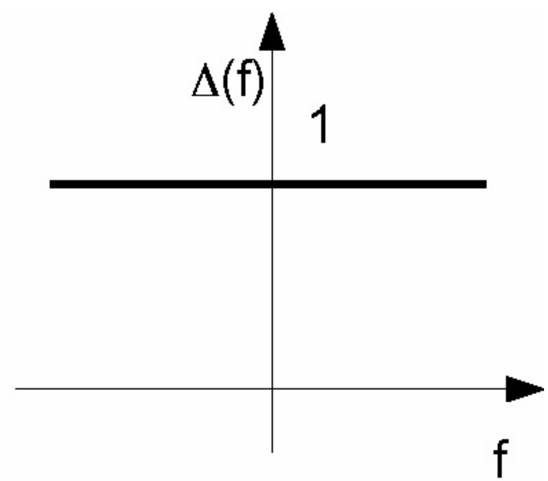
$$H_{LP}(f) = rect(\frac{f}{2B})$$

H_{LP} è la risposta in frequenza

δ di Dirac

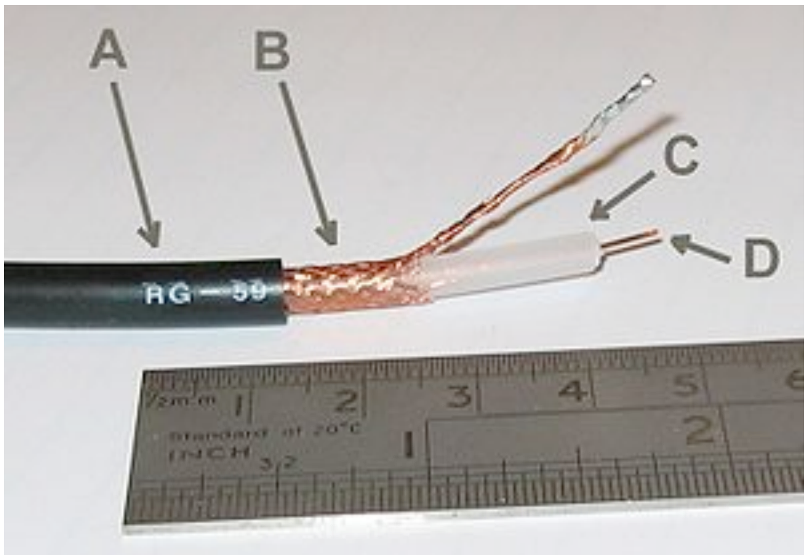
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i2\pi ft} dt = e^{-i2\pi ft}|_{t=0} = 1$$



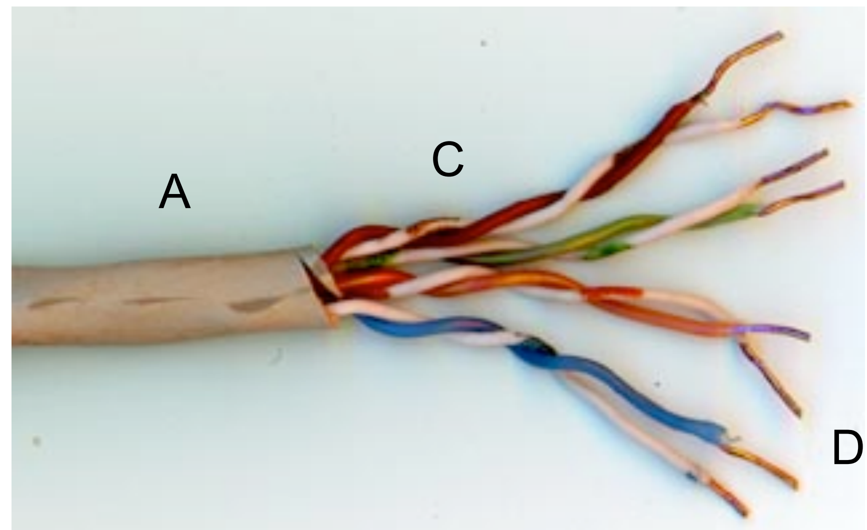


cavi …

cavo coassiale

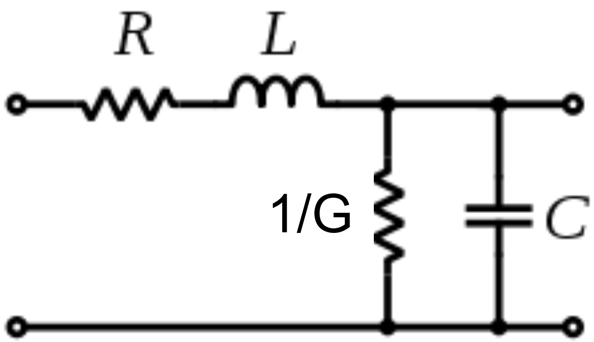


doppino



A – Guaina esterna
B – maglia di rame intrecciata
C – isolante dielettrico
D – nucleo di rame

elemento infinitesimo di cavo



$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = -L\frac{\partial I(t)}{\partial t} - RI(t)$$

$$\frac{\partial I(z)}{\partial z} = -GV(t) - C\frac{\partial V(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial^2 z} = LC\frac{\partial^2 V(t)}{\partial^2 t} + (LG + RC)\frac{\partial V(t)}{\partial t} + RGV(t)$$

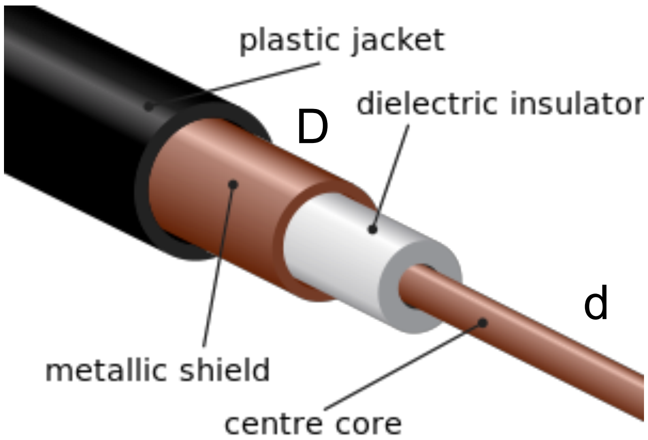
Cavo ideale (R = G = 0)

$$\frac{\partial^2 V(z)}{\partial^2 z} = LC\frac{\partial^2 V(t)}{\partial^2 t}$$

velocità di propagazione

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sim 2\ 10^8 m/s$$

cavo coassiale ideale



$$L = \frac{\mu}{2\pi} ln \frac{D}{d}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{ln\frac{D}{d}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o\mu_o}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} ln \frac{D}{d}$$

ricordiamo: La condizione di Nyquist

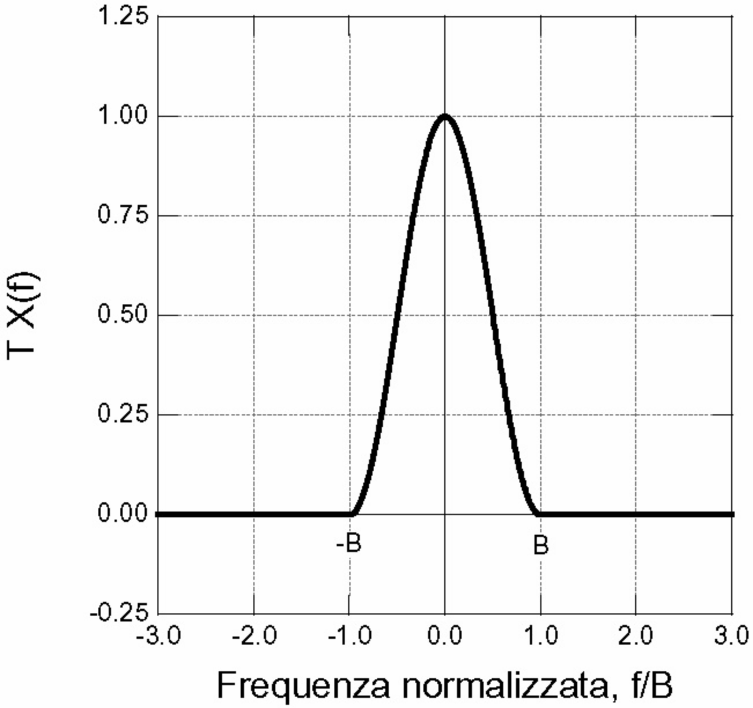
$$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{T})$$

La trasformata di Fourier di una sequenza è la periodicizzazione della trasformata del segnale originale, con una periodicità pari alla frequenza di campionamento $f_c = 1/\mathrm{T}$.

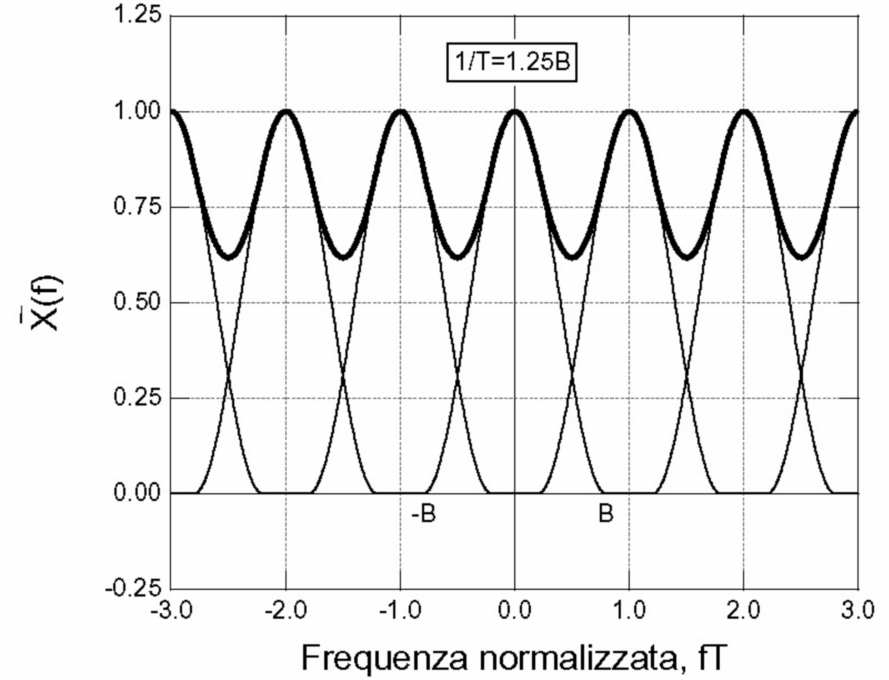
Per garantirsi l'assenza di $aliasing$, la frequenza di campionamento deve essere tale che:

$$f_c = \frac{1}{T} \geq 2B$$

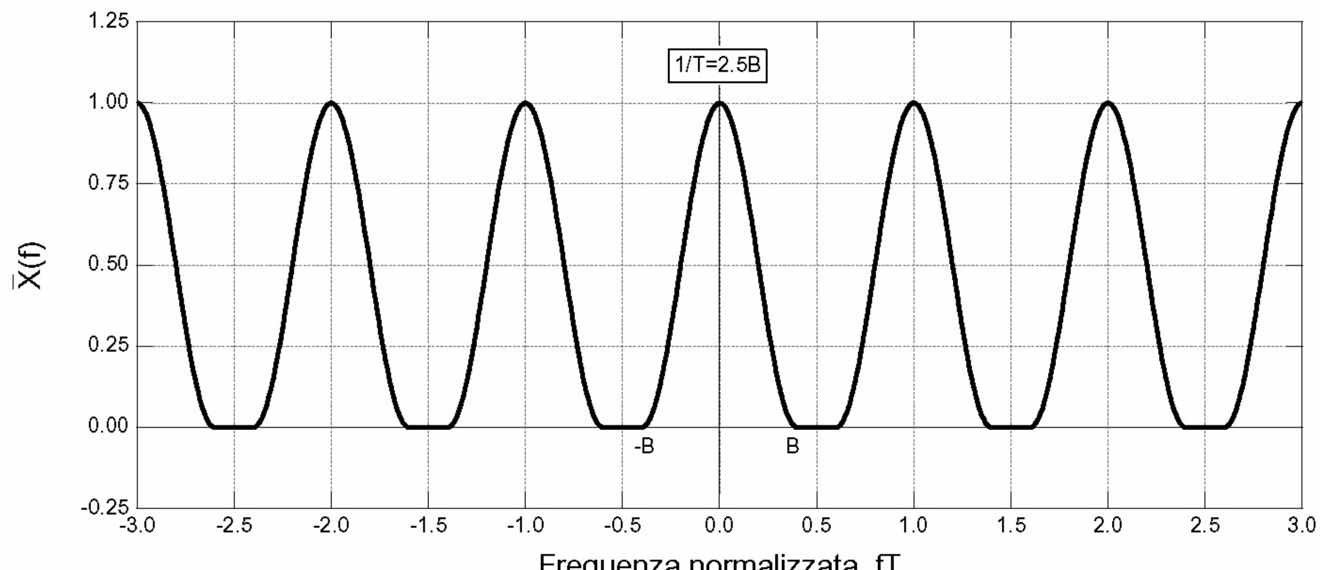
dove B è la banda del segnale.



(a)



(c)



(b)

G. Ambrosi, UniPG