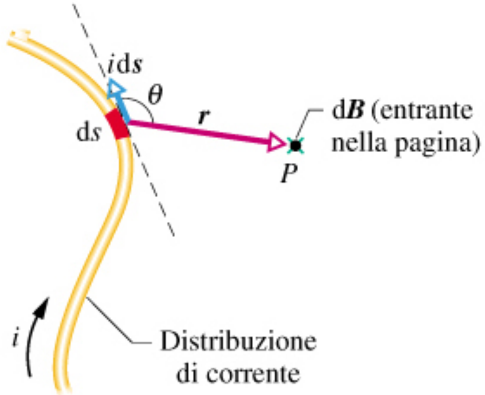
Il Corso di Fisica per Scienze Biologiche

- Prof. Attilio Santocchia
- Ufficio presso il Dipartimento di Fisica (Quinto Piano) Tel. 075-585 2708
- E-mail: attilio.santocchia@pg.infn.it
- Web: http://www.fisica.unipg.it/~attilio.santocchia
- Testo: Fondamenti di Fisica (Halliday-Resnick-Walker, Casa Editrice Ambrosiana)

Campo magnetico generato da correnti stazionarie

- La stretta correlazione fra fenomeni magnetici e fenomeni elettrici è ulteriormente testimoniata dal fatto che un campo magnetico può essere generato da un flusso di cariche elettriche, cioè da una corrente elettrica (stazionaria). Questi studi sono dovuti ad Ampère.
- Consideriamo un conduttore percorso da corrente *i*. Ad una distanza *r* dal tratto infinitesimo ***ds*** (da poter ritenere rettilineo) si misura un campo magnetico *dB* (vedi figura) dato dalla legge di Biort-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i(d\vec{s}\times\hat{r})}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,ds\sin\theta}{r^2}$$



- dove ho considerato ***ds*** un vettore orientato come *i*.
- La costante μ_0 è una costante di proporzionalità detta permeabilità magnetica del vuoto il cui valore esatto è per definizione:

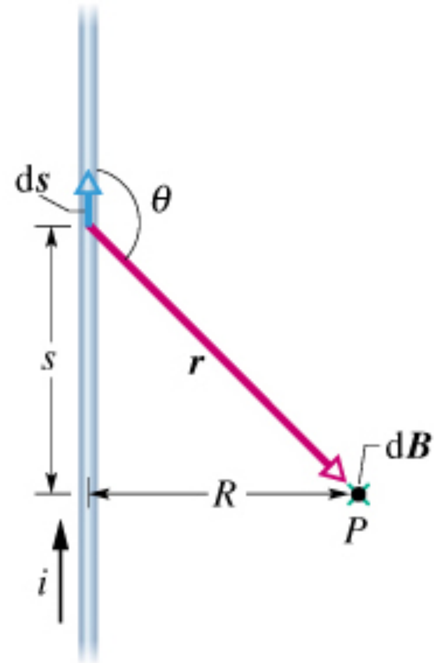
$$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\, Tm/A$$

- In un materiale generico bisogna sostituire a μ_0 la permeabilità del mezzo $\mu=\mu_0\mu_r$
  - Per sostanze diamagnetiche risulta $\mu_r<1$
  - Per sostanze paramagnetiche risulta $\mu_r>1$
  - Per sostanze ferromagnetiche risulta $\mu_r>>1$

Forza tra 2 conduttori paralleli

- Nella lezione precedente abbiamo studiato l'effetto di un campo magnetico su un filo percorso da corrente
- Ora abbiamo visto che una carica in movimento produce un campo magnetico, quindi possiamo calcolare il campo magnetico prodotto da un filo infinitamente lungo percorso da una corrente *i*

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} dB = 2\int_{0}^{+\infty} dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\theta \, ds}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$



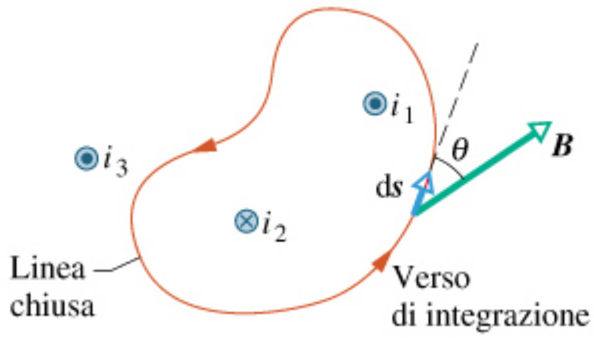
- Se ora poniamo un filo percorso da una corrente alla distanza R appena vista si può calcolare la Forza esercitata dal primo filo sul secondo per effetto del campo magnetico
- Si vede quindi che correnti parallele e concordi si attraggono mentre correnti discordi si respingono con modulo (in realtà la formula data riguarda l'effetto di un tratto *L* di lunghezza):

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi R}$$

- Da notare infine che proprio questa è la legge che permette di definire l'Ampere nel S.I.

Legge della Circuitazione di Ampere

- Consideriamo una linea chiusa l_c che circondi dei conduttori percorsi da corrente (i_1, i_2, ma non i_3)
- Consideriamo positive quelle correnti che, definito un verso di percorrenza per l_c, vedano questo verso antiorario (negative, se lo vedono orario) → Regola della mano destra



- Per ogni punto della linea l_c è possibile considerare un tratto rettilineo infinitesimo *dl* orientato come l_c
- Sia B il campo magnetico risultante generato dalle correnti i_1 e i_2
- Si definisce circuitazione l'integrale sulla linea chiusa:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \oint \left|\vec{B}\right| \cos\theta \, ds$$

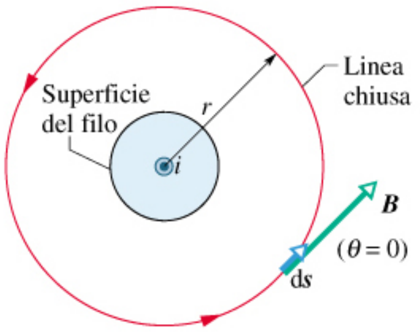
- La legge della circuitazione di Ampère sancisce che:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 \sum i_n = \mu_0 i$$

- dove i è la somma algebrica delle varie correnti concatenate, ciascuna con il proprio segno dato dalla regola precedente

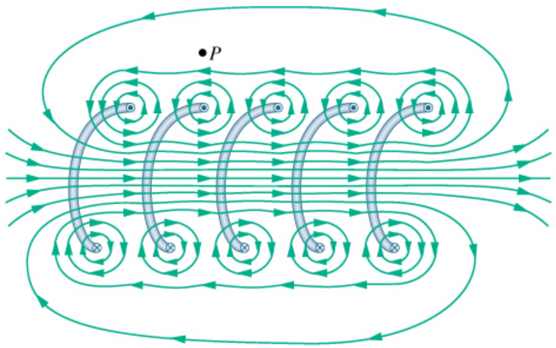
Il Campo Magnetico dalla Legge di Ampere

- Tramite la legge di Ampere è immediato ad esempio ottenere il risultato visto in precedenza (cioè calcolare il valore di *B* prodotto da un filo conduttore a distanza *R* dal filo)



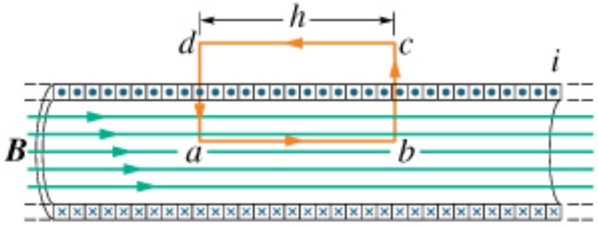
$$\oint \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds} = B2\pi R = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

- Allo stesso modo si può calcolare *B* per un solenoide infinito ideale (vedi anche nel libro altri esempi)



$$\oint \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds} = \overbrace{\int_a^b \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds}}^{=Bh} + \overbrace{\int_b^c \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds}}^{\text{nullo}} + \overbrace{\int_c^d \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds}}^{\text{nullo}} + \overbrace{\int_d^a \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds}}^{\text{nullo}} = Bh$$

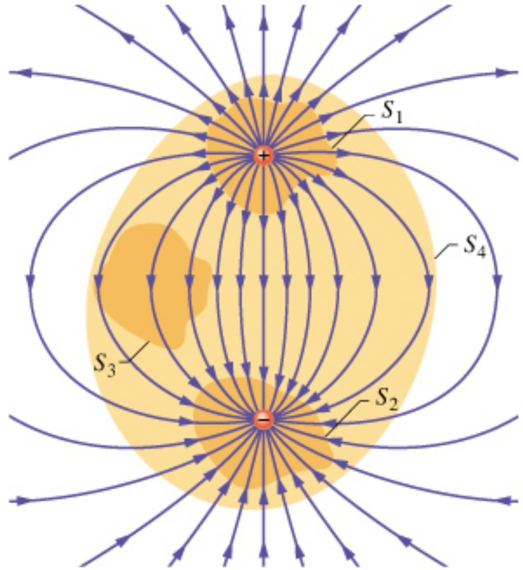
$$i_{tot} = iN = inh \Rightarrow Bh = \mu_0 inh \Rightarrow B = \mu_0 in$$



- Dove *N* è il numero totale di spire all'interno del rettangolo *abcd* e *n* è la densità lineare di spire

Legge di Gauss per il magnetismo…

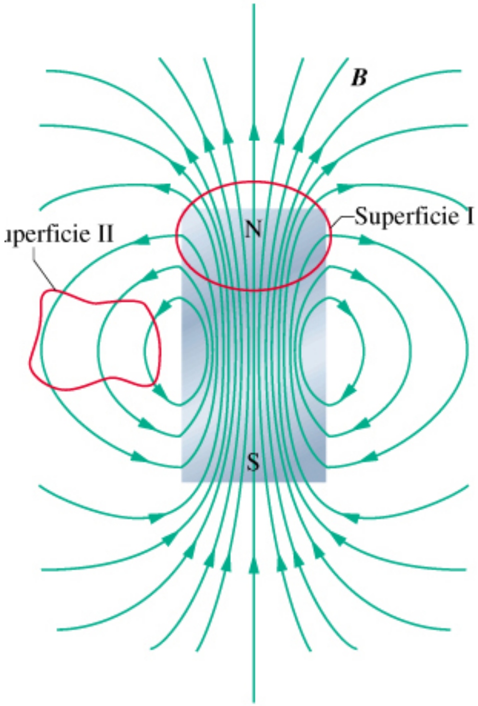
- Consideriamo le linee di forza del campo elettrico di una carica elettrica o di un dipolo elettrico:
- La presenza delle cariche costituisce una *sorgente* di campo (carica positiva) o un *pozzo* per le linee di campo (carica negativa)
- Una superficie chiusa (S_3) che non contenga tali pozzi o sorgenti ha tante linee di campo entranti quante uscenti, ma una che contenga cariche (S_1 o S_2) ha delle linee che nascono da esse (se positive) o muoiono in esse (se negative)
- Il teorema di Gauss per il campo elettrico si giustifica dicendo che il flusso del campo elettrico è non nullo quando nella superficie chiusa S inglobiamo dei pozzi o delle sorgenti (cioè delle cariche, la cui somma algebrica sia non nulla).



$$\varphi(E) = \int_{S_{chiusa}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

... legge di Gauss per il magnetismo 2

- Il campo magnetico non ha pozzi o sorgenti poiché tutte le linee di campo sono linee chiuse. Per questo motivo il flusso del campo magnetico *B* attraverso una qualunque superficie chiusa *S* è nullo:
- Un campo siffatto si dice solenoidale e il teorema di Gauss per il magnetismo sancisce l'assenza di monopoli magnetici.



$$\varphi(B) = \int_{S_{chiusa}} \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

Conclusioni sul campo magnetostatico

- Il campo magnetico è un campo Solenoidale, cioè tutte le linee di forza sono linee chiuse. Questo è dovuto (o implica) dal fatto che non esistono cariche magnetiche (poli) isolate. In un magnete sono sempre presenti entrambi i poli magnetici
- La legge della circuitazione di Ampère implica che il campo magnetico non è un campo conservativo. Infatti la circuitazione di ***B*** non è nulla su una linea chiusa.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_n = \mu_0 i \neq 0$$

- Considerando ***dl*** come uno spostamento, il fatto che la circuitazione sia nulla era uno dei requisiti per stabilire la conservatività di un campo (***B*** in effetti non è una forza, ma ***F*** è strettamente legata a ***B***)
- Questo non vuol dire che ***B*** sia dissipativo (il lavoro di ***B*** è sempre nullo!), ma che non è possibile introdurre una energia potenziale magnetica come invece si è fatto finora per le altre forze conservative. Infatti non è possibile definire una funzione della sola posizione $W(r)$ tale per cui sia:

$$\cancel{\int_{r_A}^{r_B} \vec{B}\cdot d\vec{l} = -\Delta W}$$

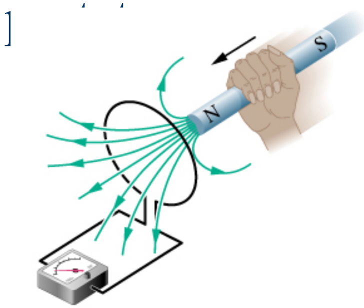
... conclusioni sul campo magnetostatico 2

- Nei prossimi lucidi vedremo che campo elettrico e campo magnetico sono fortemente legati e che sono aspetti di una sola interazione (elettromagnetica) regolata da delle equazioni dette di Maxwell.
- Per ora possiamo riassumere le equazioni finora viste per il campo elettrico e per il campo magnetico statico, definendole le equazioni del campo elettromagnetico statico nel vuoto:

Legge	**Forma Integrale**
Legge di Gauss per il Campo Elettrico	$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$
Legge di Gauss per il Campo Magnetico	$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = 0$
Circolazione del Campo Elettrico	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
Circolazione del Campo Magnetico (Ampere)	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$

Legge di Faraday

- L'induzione elettromagnetica è un fenomeno scoperto intorno al 1830 ed è il principio alla base del funzionamento dei generatori elettrici
- Supponiamo di immergere un conduttore formate un circuito chiuso (una spira ad esempio) in un campo magnetico. Se il flusso magnetico ϕ_m concatenato con il circuito varia con il tempo, si può osservare che nel circuito si instaura una corrente mentre il flusso varia…
- Lo studio sperimentale dell'induzione elettromagnetica ha
formulare la seguente relazione:



$$Fem = -\frac{d\varphi}{dt}$$

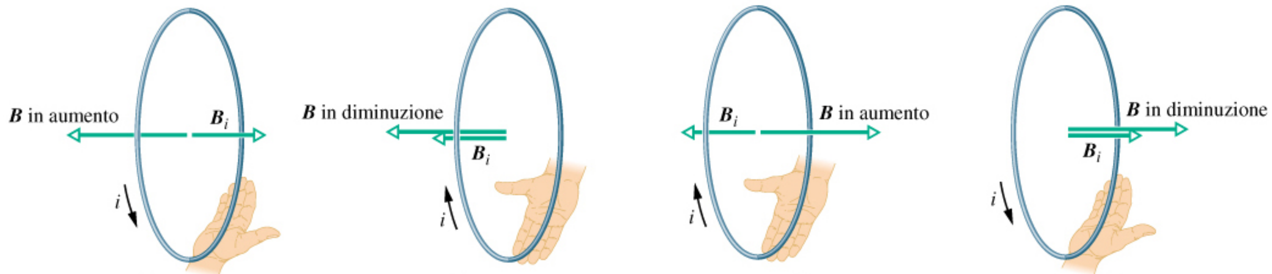
- Inoltre ricordando la definizione di flusso e la relazione tra *Fem* e il campo elettrico ***E***, tale relazione si può scrivere come:

$$V = \oint_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} \quad \text{e} \quad \varphi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{u}\, dS \Rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot \hat{u}\, dS$$

- che va sotto il nome di Legge di Faraday

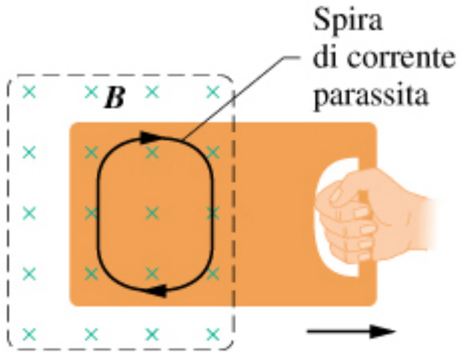
Ancora sull'Induzione…

- Per stabilire il verso della corrente indotta è utile ricordare la legge di Lenz: la corrente indotta in una spira ha un verso tale che il campo magnetico generato dalla corrente si oppone alla variazione del campo magnetico che l'ha indotta.



(a) (b) (c) (d)

- Nel caso che la carica non sia vincolata ad un filo ma, ad esempio sia libera di muoversi all'interno di una lastra metallica, si stabiliscono ancora delle correnti dette di Foucault (correnti parassite) che dissipano energia meccanica (il movimento che produce la variazione del flusso concatenato) in energia termica.



Induttori e Induttanze

- In precedenza abbiamo imparato che un condensatore produce un campo elettrico opportuno in una regione di spazio
- un **induttore** (o più comunemente **induttanza**) è un dispositivo equivalente che può essere utilizzato per produrre un campo magnetico noto in una regione determinata
- L'esempio più semplice di induttanza è il solenoide
- Se si stabilisce una corrente *i* in un solenoide si produce un campo magnetico costante diretto lungo l'asse del solenoide e di conseguenza si può calcolare il flusso magnetico ϕ_B del solenoide definito attraverso una sezione del solenoide
- Si definisce induttanza di un induttore la quantità:

$$L = \frac{N\phi_B}{i}$$

- Per un solenoide ideale abbiamo calcolato il campo magnetico $B=\mu_0 in$ quindi:

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{(nl)(BA)}{i} = \frac{(nl)(\mu_0 inA)}{i} = \mu_0 n^2 Al$$

- e si può vedere che l'induttanza di un solenoide dipende solo da fattori geometrici

Autoinduzione

- Consideriamo un generico circuito dove fluisce della corrente i. Esisterà un flusso del campo magnetico $\boldsymbol{B}$ concatenato col circuito stesso dovuto alla propria corrente i. Se i varia nel tempo, anche il flusso autoconcatenato varierà, generando una corrente aggiuntiva (in realtà, vedremo, sottrattiva)
- Il flusso autoconcatenato è dato da:

$$\phi_C = Li$$

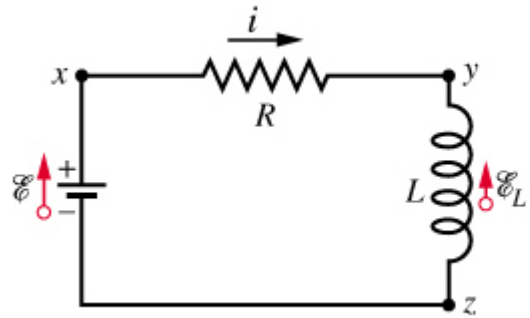
- Se tale flusso varia nel tempo, la *fem* autoindotta è:

$$Fem = -\frac{d\phi_C}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

- Dove il coefficiente L è detto autoinduzione o induttanza del circuito considerato e dipende dalla caratteristiche geometriche e dalla permeabilità magnetica del mezzo ove il circuito risiede.
- Come prima, il segno meno significa che questa *fem* è responsabile di una corrente autoindotta che si oppone a quella circolante nel circuito e che genera la *fem* indotta stessa.

Circuiti RL

- In ogni circuito elettrico quindi esiste una corrente autoindotta che dipende dalla geometria del circuito
- Consideriamo quindi il circuito più semplice composto da una resistenza e una induttanza come in figura



- Se la corrente che scorre nel circuito è costante (AC corrente continua) l’induttanza non riveste alcun ruolo, se invece la corrente è alternata (DC) allora il ruolo dell’induttanza diventa importante
- Possiamo applicare il teorema delle maglie per ottenere una eq.ne differenziale che ci permette, una volta risolta, di vedere come varia la corrente all’interno di tale circuito quando considero un generatore di tensione variabile:

$$-iR - L\frac{di}{dt} + Fem = 0 \Rightarrow Fem = iR + L\frac{di}{dt}$$

- Ricordiamo inoltre che il teorema della maglia è una rappresentazione del principio di conservazione dell’energia

Densità di Energia del Campo Magnetico

- Supponiamo di avere un circuito come nella figura precedente, supponiamo inoltre che all'istante *t=0* chiudiamo il circuito tramite un interruttore
- La corrente (vedi nel libro la soluzione del problema del lucido precedente) salirà in tempi rapidi fino ad assumere un valore costante
- Durante questa fase viene creato un campo magnetico che circonda il circuito e verrà inoltre spesa dell'energia che viene immagazzinata nel campo
- Questa energia, nella rappresentazione ideale, è quella immagazzinata nell'induttore tramite il fenomeno dell'autoinduzione.
- Sia ora *V* il valore della *Fem* applicata al circuito dopo la chiusura dell'interruttore. Prendo ora l'eq.ne differenziale precedente e moltiplico ambo i membri per il valore della corrente *i* ottenendo:

$$P_{TOT} = \frac{dE_{TOT}}{dt} = \frac{dE_{TOT}}{dq}\frac{dq}{dt} = Vi = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$

- Il primo membro rappresenta la potenza totale fornita dal generatore, il primo termine del secondo membro rappresenta l'energia termica dissipata dalla corrente per muovere gli elettroni all'interno del filo nell'unità di tempo.
- Il secondo termine quindi, per il principio di conservazione dell'energia, rappresenta l'energia spesa nell'unità di tempo per la creazione del campo magnetico

Densità di Energia del Campo Magnetico 2

- Il termine *Li(di/dt)* rappresenta quindi la potenza dissipata per creare un campo magnetico dovuto alla corrente i. Cioè:

$$\frac{dE_L}{dt} = Li\frac{di}{dt} \Rightarrow dE_L = Li\, di \Rightarrow E_L = L\int_0^i i'\, di' = \frac{1}{2}Li^2$$

- Dove ho integrato per ottenere il valore dell'energia spesa per creare il campo magnetico dalla corrente *i*
- Nel caso di un solenoide ideale di sezione A e lunghezza *l* possiamo scrivere la densità di energia u_L, il campo magnetico e l'induttanza come:

$$u_L = \frac{E_L}{Al} \quad \text{e} \quad B = \mu_0 n i \quad \text{e} \quad L = \mu_0 n^2 A l$$

- da cui si deduce che

$$u_L = \frac{E_L}{Al} = \frac{1}{2}Li^2\frac{1}{Al} = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 A l)i^2\frac{1}{Al} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

- Questa è valida in generale e rappresenta in generale l'energia immagazzinata a causa della presenza di un campo magnetico nel vuoto

Campi Magnetici Indotti

- Abbiamo imparato che la variazione di campo magnetico produce un campo elettrico…
- viceversa si può mostrare che la variazione di un campo elettrico produce un campo magnetico indotto…
- abbiamo in pratica simmetrizzato il fenomeno… il successo di questa osservazione è dovuto proprio al fatto che i campi B ed E sono semplicemente due aspetti dello stesso fenomeno…
- La relazione che lega il campo magnetico indotto e la variazione di flusso elettrico è nota come legge dell'induzione di Maxwell:

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = +\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\varphi_E}{dt}$$

- combinando questa relazione con la legge di Ampere vista in precedenza si ottiene la legge di Ampere-Maxwell che lega la circuitazione del Campo Magnetico con il campo Elettrico e la corrente elettrica:

$$\oint_{C_S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}_S \, dS$$

Le Equazioni di Maxwell

- Come più volte accennato, campo elettrico e campo magnetico sono due manifestazioni dell'interazione elettromagnetica. Chi riorganizzò la visione di tali fenomeni fino a realizzare una teoria completa dell'interazione elettromagnetica fu Maxwell.
- Maxwell capì la natura unica delle interazioni elettriche e magnetiche e pose delle equazioni di base per il campo elettromagnetico (nel vuoto):
- Siamo quindi ora in condizione di elencare 4 equazioni che vanno sotto il nome di **equazioni di Maxwell** che permettono di spiegare tutti i fenomeni elettrici e magnetici nel vuoto di cui siamo a conoscenza...
- Le stesse equazioni sono ancora valide in un mezzo materiale a patto di considerare la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del mezzo e non del vuoto…
- A queste equazioni va poi aggiunta la Forza di Lorentz e in questo modo abbiamo tutto quello che ci serve per studiare tutti i fenomeni elettromagnetici (classici) che ci interessano…

Le Equazioni di Maxwell

Legge	**Forma Integrale**
Forza di Lorentz	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
Legge di Gauss per il Campo Elettrico	$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$
Legge di Gauss per il Campo Magnetico	$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = 0$
Legge di Faraday-Henry	$\oint_{C_S} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = -\dfrac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS$
Legge di Ampere-Maxwell	$\oint_{C_S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}_S\, dS$