Il Corso di Fisica per Scienze Biologiche

- Prof. Attilio Santocchia
- Ufficio presso il Dipartimento di Fisica (Quinto Piano) Tel. 075-585 2708
- E-mail: attilio.santocchia@pg.infn.it
- Web: http://www.fisica.unipg.it/~attilio.santocchia/
- Testo: Fondamenti di Fisica (Halliday-Resnick-Walker, Casa Editrice Ambrosiana)

Indice della Lezione

- Teoria degli errori.
- Errori sistematici. Errori statistici.
- Errore su una misura e su una variabile aleatoria.
- Propagazione degli errori per misure strumentali e per variabili aleatorie.
- Errore sulla media.
- Cifre significative.

Cenni di teoria degli errori

- Il valore vero di una misura è inaccessibile (tranne in un caso…quale? Proposte?)
- La misura di una grandezza fisica è una stima che si avvicina più o meno al valore vero
- Ogni misura è affetta da due tipi di errori
  - errori sistematici
  - errori statistici (casuali, accidentali)

Errori Sistematici

- Sono errori che sono sempre presenti nella misura di una grandezza.
- Sono dovuti *ad esempio* alla cattiva taratura degli strumenti, oppure alle loro caratteristiche costruttive
- Questo tipo di errori causano la *sistematica* sovrastima (o sottostima) della grandezza da misurare

Errori Statistici

- Sono dovuti ad innumerevoli cause:
  - errore di chi effettua la misura
  - fluttuazioni delle condizioni di misura (temperatura, umidità…)
  - rumore elettronico degli strumenti
  - moto di agitazione termica dei campioni
  - principio di indeterminazione quantistico
- Sono sempre riducibile (ma mai azzerabili)
- Determinano casualmente sottostime e sovrastime della misura

Errori Assoluti e Relativi

- Una misura può essere espressa sempre nel seguente modo: $x = x_m \pm \delta x$
- δx è l'errore assoluto (può essere sia di origine sistematica che statistica, o la combinazione di entrambi)
- $\delta x / x_m$ è invece l'errore relativo (che si può esprimere anche in percentuale)

Esempio: x=(90 ±2) cm

L'errore assoluto è 2 cm

L'errore relativo è 2/90 = 0,022 = 2,2%

Come si valuta l'errore…

- Ora sappiamo come calcolare il valore migliore per un set finito di misure: dobbiamo costruire la **distribuzione** delle misure ottenute e confrontarla con una distribuzione normale per ricavare il valore del centro della campana e della deviazione standard…
- … ma con un po' di semplice algebra (che vi risparmio) si dimostra che:
  - Il centro della campana (valore più probabile) è uguale alla **media aritmetica**… e questa è anche la migliore stima del valore vero (che non conosciamo)
  - L'errore sulla **singola misura**, o meglio la migliore stima dell'errore, (cioè la larghezza della campana o deviazione standard, spesso chiamato anche sigma) è dato dalla formula:

$$\boxed{\sigma = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

- Il termine *1/(n-1)* ci insegna molte cose:
  - Se faccio una sola misura l'errore statistico è indefinito…logico!
  - Se aumento il numero di misure (al limite infinito) l'errore statistico si annulla!

Propagazione degli Errori

- Si possono distinguere due casi:
  - Lettura di uno strumento
    - Lettura di un calibro
    - Misurazione di un intervallo di tempo tramite un cronometro
  - Misura di una grandezza soggetta a fluttuazioni casuali (variabile aleatoria)
    - Altezza dei maschi nati nel 1985
    - Durata totale di una partita di Basket
    - Quantità di persone presenti in Corso Vannucci alle 19.00 di Sabato Sera

Propagazione degli Errori (Lettura Strumenti)

- Dato $G=f(A,B)$ dobbiamo calcolare ΔG se misuriamo A e B
  - ΔA e ΔB sono semplicemente dati dalla sensibilità dello strumento
  - In genere il numero di misure è piccolo (non serve fare molte misure)
- L'errore è dato da:

$$\Delta G = \left|\frac{\partial f(A,B)}{\partial A}\right|\Delta A + \left|\frac{\partial f(A,B)}{\partial B}\right|\Delta B$$

- Alcuni esempi semplici sono:
  - Se $f=x+y$ o $f=x-y \Rightarrow \Delta f = \Delta x+\Delta y$
  - Se $f=xy$ o $f=x/y \Rightarrow \Delta f/f = |\Delta x/x|+|\Delta y/y|$
  - Se $f=kx \Rightarrow \Delta f = k\,\Delta x$
  - Se $f=x^k \Rightarrow \Delta f = |kx^{k-1}|\,\Delta x$

Propagazione degli Errori (Variabili Aleatorie)

- Abbiamo imparato come si trova l'errore per una quantità misurata *n* volte…
- Ma se stiamo facendo una **misura indiretta** dobbiamo ricavare l'errore sul valore che interessa.
- Dato $G=f(A,B)$ dobbiamo calcolare ΔG se misuriamo A e B (e quindi sappiamo come ricavare ΔA e ΔB)
- La risposta (vi risparmio ancora la dimostrazione) è:

$$\Delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial f(A,B)}{\partial A}\Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial f(A,B)}{\partial B}\Delta B\right)^2}$$

- Ecco alcuni esempi:
  - Se $f=x+y$ o $f=x-y \Rightarrow \Delta f = (\Delta x^2+\Delta y^2)^{1/2}$
  - Se $f=xy$ o $f=x/y \Rightarrow \Delta f/f = ((\Delta x/x)^2+(\Delta y/y)^2)^{1/2}$
  - Se $f=kx \Rightarrow \Delta f = k\,\Delta x$
  - Se $f=x^k \Rightarrow \Delta f/f = k\Delta x/x$

Ed ecco la formula finale…

- Abbiamo fatto le nostre n misure, ognuna di queste può essere scritta come $x_i \pm \Delta x$; cioè sappiamo che **questa singola misura x_i** ha il 68% di probabilità di cadere all'interno dell'intervallo intorno al valore medio…
- Quando facciamo la media però sommiamo n quantità afflitte tutte dallo stesso errore Δx, cioè:

$$\bar{x} \pm \overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\left(\left(x_1 \pm \Delta x\right) + \left(x_2 \pm \Delta x\right) + \ldots + \left(x_n \pm \Delta x\right)\right)$$

- Questo è un esercizio di propagazione dell'errore e quindi devo applicare la formula precedente per avere l'errore sulla media (quello precedente è l'errore sulla singola misura!):

$$\boxed{\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x^2} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}}$$

Cifre Significative

- Esiste anche un modo corretto e un modo sbagliato di scrivere una misura e il suo relativo errore…
- Si segue il principio di non indicare più cifre di quelle giustificate dalla precisione della misurazione
- L'errore si scrive in genere utilizzando solo una cifra

$$c = (2.94 \pm 0.04) \times 10^8 \, m \, s^{-1}$$

$$c = (2.94103 \pm 0.04) \times 10^8 \, ms^{-1}$$

$$c = (2.94103 \pm 0.0432) \times 10^8 \, ms^{-1}$$

$$c = (2.94 \pm 0.0432) \times 10^8 \, ms^{-1}$$

- Solo il primo esempio è corretto.

Game Over

Ricetta per una misura corretta:

1. Scelgo uno strumento adatto e una unità di misura
2. Controllo che lo strumento funzioni e sia calibrato correttamente
3. Una misura senza una valutazione corretta dell'errore non ha alcun significato, ad esempio per la velocità della luce: $c = (2.94 \pm 0.04) \times 10^8\, m\, s^{-1}$
4. Usare sempre un numero coerente di cifre significative, in casi molto rari ha senso usare più di una cifra per l'errore.
5. Poiché l'errore standard (o errore sulla media) va come $1/\sqrt{n}$, è spesso inutile fare troppe misure
   - fare 20 misure rispetto a 10 significa impiegare il doppio del tempo ma l'errore viene migliorato solo di un fattore $1/\sqrt{2}$
   - Valutare quindi bene il numero di misure da fare… in genere 10 è una scelta ragionevole ma dipende da cosa si vuole misurare
6. Valutare attentamente la possibile presenza di errori sistematici
7. Usare sempre il vecchio ma sempre utile **buon senso!**