Il Corso di Fisica per Scienze Biologiche

- Prof. Attilio Santocchia
- Ufficio presso il Dipartimento di Fisica (Quinto Piano) Tel. 075-585 2708
- E-mail: attilio.santocchia@pg.infn.it
- Web: http://www.fisica.unipg.it/~attilio.santocchia/
- Testo: Fondamenti di Fisica (Halliday-Resnick-Walker, Casa Editrice Ambrosiana)

Indice della Lezione

- Cenni di calcolo delle Probabilità
- Cenni di calcolo statistico
- La Media aritmetica
- Lo scarto quadratico medio
- Distribuzione Binomiale
- Distribuzione di Gauss.

Come migliorare la misura?

- Esempi di diversi casi di misurazione:
  - il diametro di una matita con un righello oppure con un calibro molto preciso
  - Il tempo impiegato da un atleta a percorrere i 400 metri
  - la quantità di alberi in un bosco
  - il numero di colpi di batteria in un pezzo musicale
  - la velocità di un’automobile (istantanea? media?)
  - la frequenza di un’onda elettromagnetica monocromatica

Variabili Aleatorie

- Una variabile aleatoria (o variabile casuale o variabile stocastica o random variable) può essere pensata come il risultato numerico di un esperimento quando questo non è prevedibile con certezza (ossia non è deterministico).
- Tutte le misure fatte con uno strumento di misura sono riconducibili ad una variabile aleatoria con una distribuzioni particolare che vedremo alla fine della lezione (La distribuzione di Gauss)
- La natura aleatoria compare quando la misura viene ripetuta numerose volte e il valore misurato oscilla intorno ad un valore centrale

Come migliorare la misura

- Spesso, ripetendo la misura, nelle stesse condizioni e con lo stesso strumento non si ottiene lo stesso risultato a causa di vari fattori che fanno fluttuare la determinazione
- A volte la fluttuazione è di natura intrinseca (agitazione termica ad esempio)
- La ripetizione della misura ci porta a trattare argomenti di natura STATISTICA
- Usando alcuni concetti elementari di statistica possiamo migliorare il nostro risultato

La Media Aritmetica

- Semplicemente ripetendo la misura molte volte…
- …e facendo poi la media aritmetica!

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\overline{x}$
90	90	88	91	89	89	91	89	89,6

- Che relazione c'è tra la media 89,6 e le singole misure?
- Quanto è buona questa misura?

Lo Scarto Quadratico Medio

- Come sono distribuiti i valori misurati rispetto alla media? Riprendiamo la tabella precedente…
  - Lo scarto della singola misura è la differenza tra la misura e il valor medio
  - Lo scarto quadratico è il quadrato dello scarto
  - Lo scarto quadratico medio è la radice quadrata della varianza
  - Lo scarto quadratico medio è la radice quadratica della varianza

	Valore	90	90	88	91	89	89	91	89
$x_i - \bar{x}$	Scarto	0,38	0,38	-1,63	1,38	-0,63	-0,63	1,38	-0,63
$(x_i - \bar{x})^2$	Scarto Quadratico	0,14	0,14	2,64	1,89	0,39	0,39	1,89	0,39
	Media Aritmetica	89,63		Varianza	0,98		Scarto Quadratico Medio	0,99	

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \qquad \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

- Lo scarto quadratico medio (detta anche deviazione standard) da una indicazione della dispersione dei dati attorno al valore atteso (la media della serie di misure)

Statistica ⇔ Probabilità

- La probabilità (nel caso finito) del verificarsi di un evento è definita come il rapporto fra il numero di casi favorevoli N_f (che l'evento accada) ed il numero di casi possibili N_p:

$$p = N_f/N_p \quad 0 \le p \le 1$$

- Il concetto di probabilità è astratto. Si può tuttavia enunciare il seguente principio:

Se si ripete una prova un numero arbitrariamente grande di volte N, il rapporto fra il numero di volte in cui si verifica un evento N_f ed N, verifica:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N_f}{N} = p$$

Statistica ⇔ Probabilità

- Un problema di Calcolo delle Probabilità:
  - Se abbiamo una probabilità p=0.5 di ottenere croce nel lancio di una moneta, qual è la probabilità di ottenere in 1000 lanci meno di 450 teste?
- Lo stesso problema in Statistica:
  - In 1000 lanci di una moneta si ottengono 450 croci, qual è la stima della probabilità vera di ottenere testa?
- Una misurazione si può dire completa quando ho valutato l'attendibilità del valore ottenuto e quantificato l'errore
  - Occorre quindi cercare il valore più probabile in una serie di misure
  - Occorre poi valutare la probabilità di ottenere valori diversi dal valore più probabile…
  - … e sulla base della distribuzione di probabilità si può quindi quantificare l'errore sul valore misurato

Esempi di Calcolo della Probabilità

- La probabilità che esca 32 in una estrazione del lotto è 1 (successo, esce il 32) fratto 90 (il numero possibile di estrazioni diverse) $p_{32}=1/90$
- La probabilità che, lanciando un dado, esca 3 è $p_3=1/6$
- La probabilità che esca 3 in due lanci è $p_{3\text{-}3}=1/36$
- La probabilità che, lanciando un dado, esca un numero minore o uguale a 2 è $p_{1o2}=2/6$

Regole Importanti

- La probabilità che 2 eventi scorrelati (l'estrazione di 2 volte 3 nel lancio di un dado) o più eventi di probabilità $p_1, \ldots, p_n$ si verifichino è:

$$p_{1\ldots n} = p_1 \times \ldots \times p_n$$

- La probabilità che 2 eventi (l'estrazione di 1 o 2 nel lancio di un dado) o più eventi di probabilità $p_1, \ldots, p_n$ si verifichino in alternativa è:

$$p_{1\ldots n} = p_1 + \ldots + p_n$$

Fluttuazioni

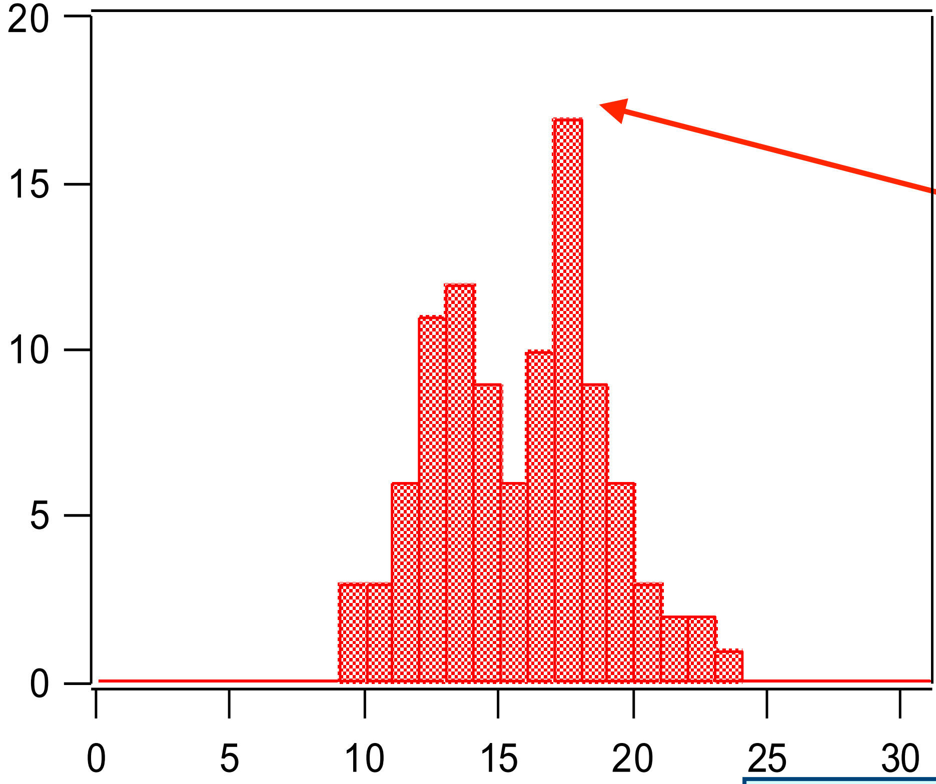
Quante *croci* possiamo <u>veramente</u> aspettarci se lanciamo una moneta 30 volte?

Facciamo un esperimento e ripetiamo molte volte 30 lanci contando quante *croci* otteniamo per ogni set di lanci…

11, 16, 17, 15, 17, 16, 19, 18, 15, 14, 13, 16, 18…

Facciamo un Esperimento

Rappresentiamo in un grafico la frequenza ottenuta dai vari esperimenti (che si chiama anche distribuzione dei risultati)



Questo è il risultato di 100 esperimenti…

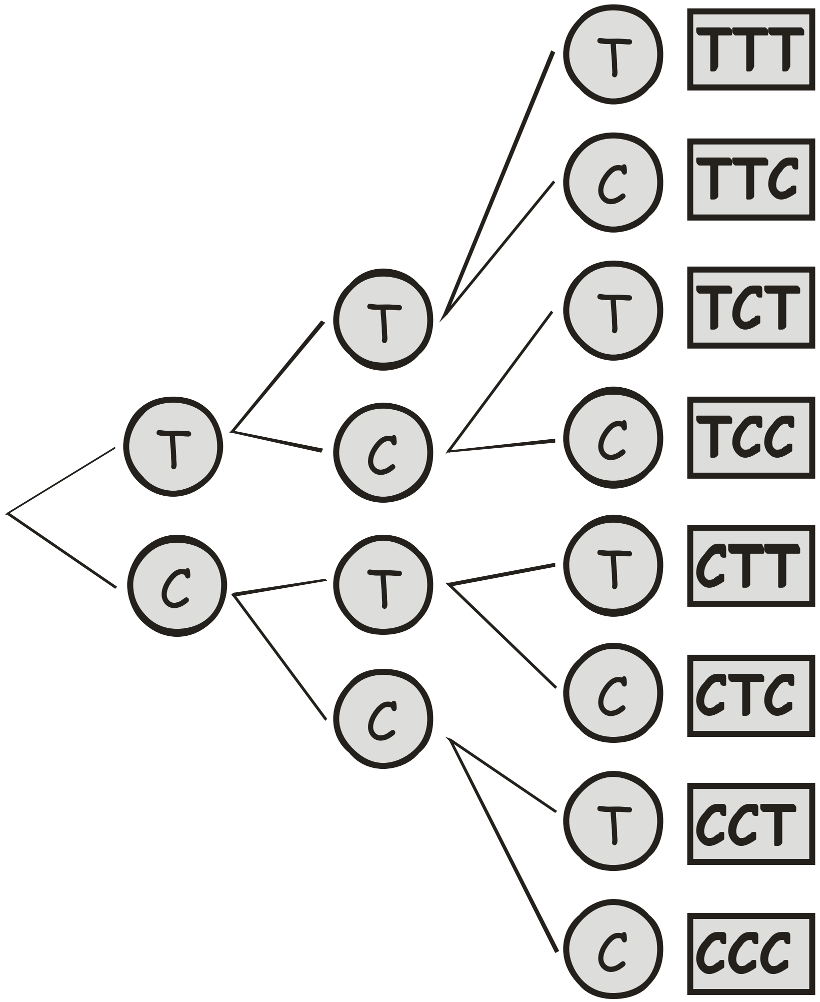
Possiamo dedurre da questo grafico che il valore più probabile è 17?

Ma se contiamo il numero totale di croci (1521) e i tentativi fatti (100*30=3000) il risultato non è strano! (1521/3000=0.507)

La domanda corretta è

Qual è la probabilità di ottenere 17 croci in un esperimento di 30 lanci?

Calcoliamo la Probabilità



Esempio su 3 Lanci (n):

N_{croci} (k)	Successi	Probabilità
0	1	12.5%
1	3	37.5%
2	3	37.5%
3	1	12.5%

Con un po' di logica è possibile ricavare la legge per il calcolo delle permutazioni: i successi non sono altro che i coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Distribuzione Binomiale

A questo punto siamo in grado di calcolare la distribuzione di probabilità per un esperimento dove lanciamo n volte una moneta e otteniamo k croci.

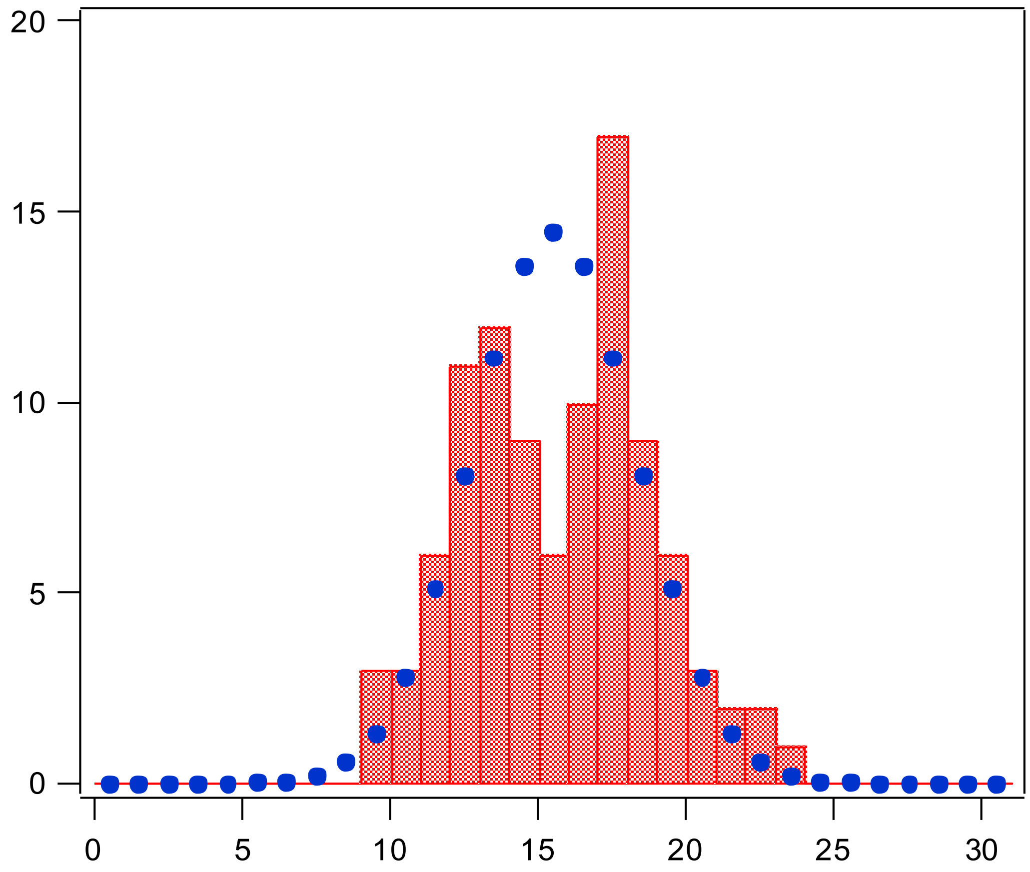
La distribuzione di probabilità (ottenuta tramite la definizione di probabilità) non è altro che il rapporto tra i successi k (calcolati tramite i coefficienti binomiali) ed il numero totale di casi possibili (semplicemente 2^n).

$$P(k,n) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

La distribuzione di probabilità non è altro che la funzione $P(k,n)$

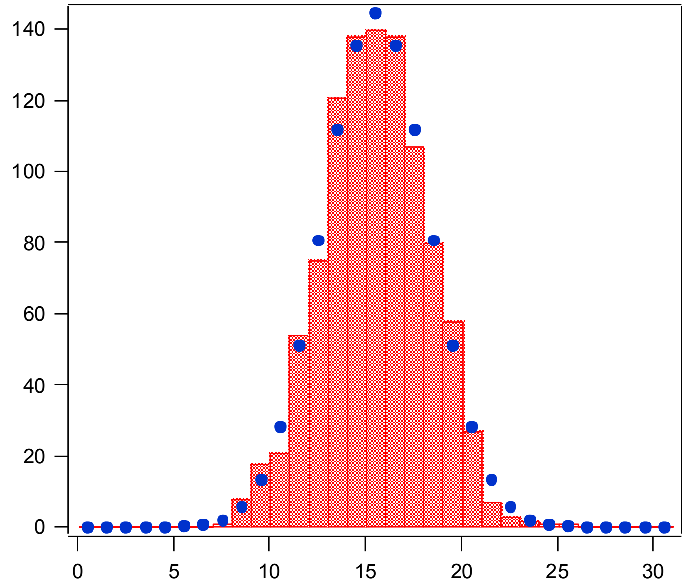
Calcoliamo la Probabilità

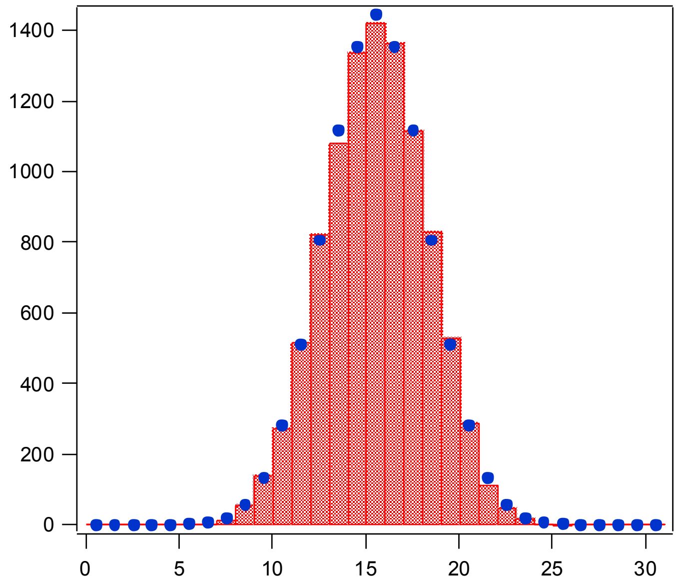
Distribuzione Binomiale nel caso n=30 e k=0, 1 … 30



Aumentiamo il numero degli esperimenti

1000 esperimenti
(14959 croci totali su 30000)
$N_f/N_p = 0,49863$



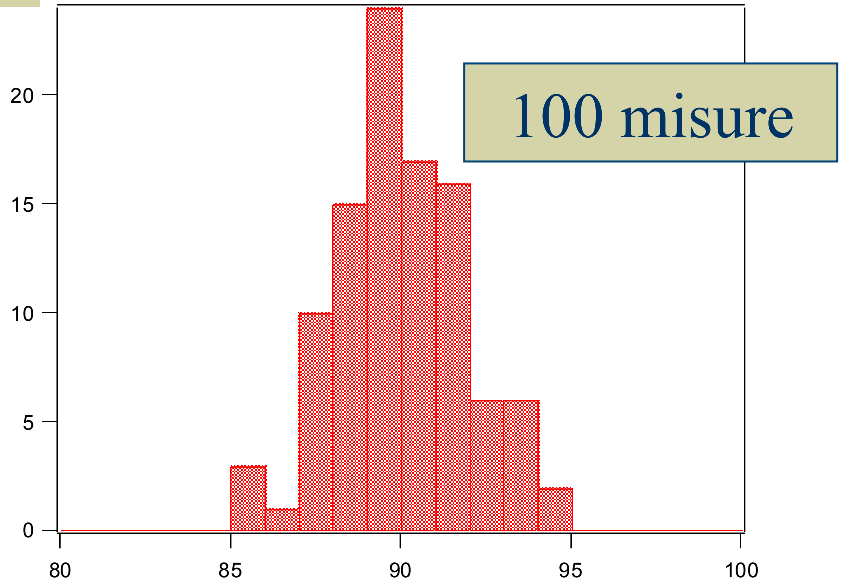


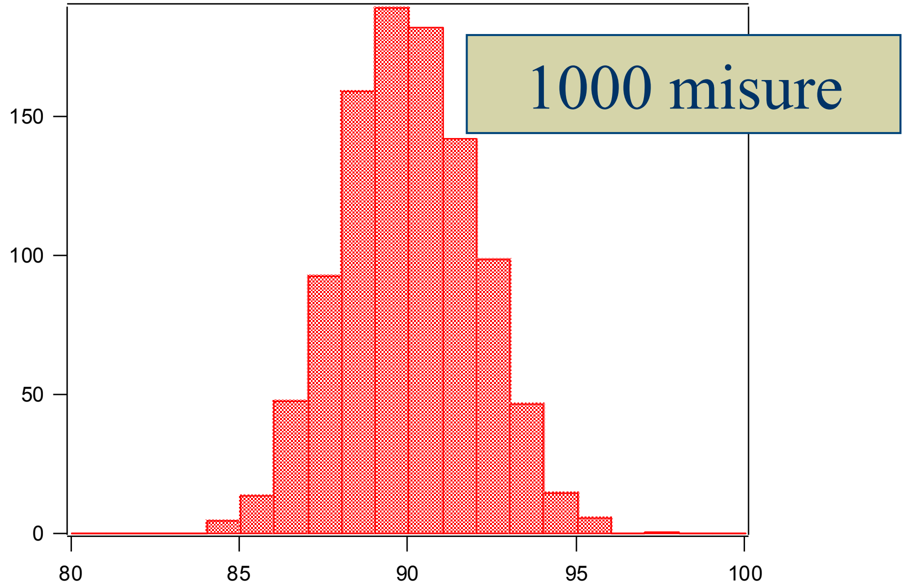
10000 esperimenti
(150079 croci totali su 300000)
$N_f/N_p = 0,50026$

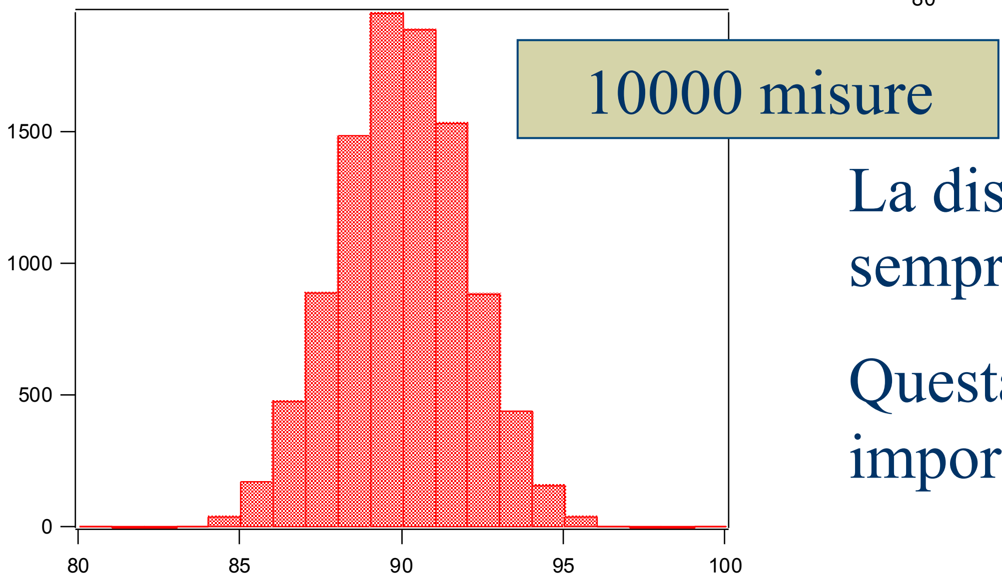
Torniamo alla Misura…

- Anche questo è un esperimento…
- Ripetiamo la misura molte volte…
- Costruiamo un Istogramma (questo è il nome del grafico che abbiamo visto per il lancio di una moneta)…
- … e osserviamo la distribuzione che otteniamo…

…100, 1000, 10000 misure







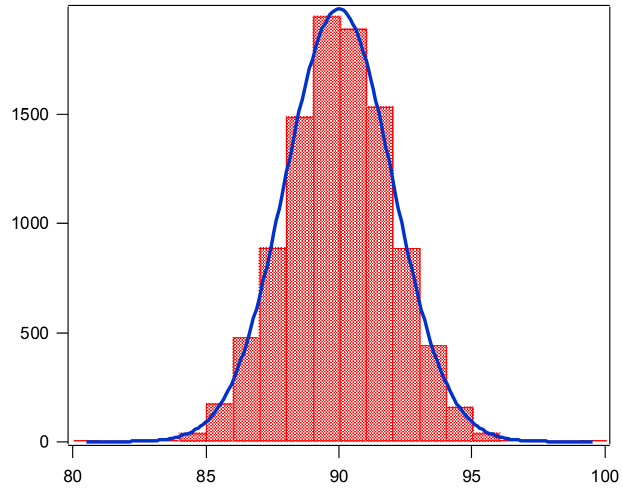
La distribuzione diventa sempre più regolare…

Questa distribuzione è molto importante e si chiama…

Distribuzione Normale (o Gaussiana)

- E' la distribuzione delle variabili aleatorie…
- La formula matematica di una distribuzione Gaussiana è la seguente:

$$p(x,m,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



- Tale curva ha una forma caratteristica a *Campana* centrata nel punto m e di larghezza σ (deviazione standard o sigma)

Proprietà della Gaussiana

- L'informazione che possiamo estrarre dalla Gaussiana è che la probabilità di ottenere una misura nell'intervallo $[x_1;x_2]$ è:

$$P[x_1;x_2] = \int_{x1}^{x2} p(x,\mu,\sigma)dx$$

- La funzione così rappresentata deve essere quindi normalizzata ad 1 (cioè la probabilità che la misura sia compresa nell'intervallo $[-\infty;+\infty]$ è 1) ed infatti risulta:

$$P[-\infty;+\infty] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,\mu,\sigma)dx = 1$$

- Alcuni valori da ricordare:
  - 68.3 % dei valori misurati cade nell'intervallo $m-\sigma \leq x \leq m+\sigma$
  - 95.4 % dei valori misurati cade nell'intervallo $m-2\sigma \leq x \leq m+2\sigma$
  - 99.7 % dei valori misurati cade nell'intervallo $m-3\sigma \leq x \leq m+3\sigma$