Metodi Matematici per la Fisica

Prova parziale del primo marzo 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/60)

Si calcoli l'integrale

$$\mathbb{L} = \int_0^{2\pi} e^{\operatorname{sen}(\beta)} d\beta \,.$$

Utilità. Il risultato è in forma di serie.
Curiosità. Il carattere $\mathbb{L}$, che rappresenta la lira, è il simbolo di Apollo. Nella mitologia greca e romana Apollo è il dio che si occupa della musica, dell'intelletto, della medicina, della scienza e della profezia.

Soluzione del primo problema

Usiamo la formula di Eulero per la funzione seno e facciamo il cambiamento di variabile $z = e^{i\beta}$, cosicché il percorso d'integrazione diventa la circonferenza unitaria nel piano complesso z. Si ha $\beta = -i\ln(z)$, $d\beta = -i dz/z$, quindi

$$\mathbb{L} = -i \oint_{|z|=1} \exp\left(\frac{z}{2i} - \frac{1}{2iz}\right) \frac{dz}{z} = -i \oint_{|z|=1} \frac{e^{z/(2i)} e^{-1/(2iz)}}{z} dz \,.$$

La funzione integranda ha al finito la sola singolarità essenziale nell'origine dovuta al secondo esponenziale dell'ultimo membro e alla z a denominatore. Usiamo il teorema dei residui

$$\mathbb{L} = 2\pi \operatorname{Res}\left[\frac{e^{z/(2i)} e^{-1/(2iz)}}{z}, z = 0\right],$$

per calcolare il residuo consideriamo la serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine. La otteniamo a partire dalla serie di Taylor dell'esponenziale, che usiamo per i due fattori, si ha quindi la doppia serie

$$\frac{e^{z/(2i)} e^{-1/(2iz)}}{z} = \frac{1}{z} \sum_{j,k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^j \left(-\frac{1}{2iz}\right)^k \frac{1}{j!k!} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{-j-k} 2^{-j-k}}{j!k!} z^{j-k-1} \,.$$

Il coefficiente della potenza z^{-1} è dato dalla doppi serie con la delta di Kronecker $\delta_{j,k}$, selezione solo la potenza z^{-1}, si ha

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{z/(2i)} e^{-1/(2iz)}}{z}, z = 0\right] = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{-j-k} 2^{-j-k}}{j!k!} \delta_{j,k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j i^{-2j} 2^{-2j}}{(j!)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-2j}}{(j!)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j j!)^2} \,.$$

Il risultato è

$$\mathbb{L} = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j j!)^2} \,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 7/60)

Si calcoli l'integrale

$$\text{💘} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)} \,.$$

Curiosità. Il carattere 💘 è il simbolo di Cupido, che nella mitologia greca è il dio del desiderio sessuale e dell'amore.

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa, ha un polo di ordine 7 nell'origine e poli di ordine 3 negli zeri della funzione seno diversi dall'origine. Il percorso d'integrazione è la circonferenza unitaria, che avvolge una volta solo il polo nell'origine. Applicando il teorema dei residui

$$\text{💘} = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)}, 0\right] = 2i\pi \left. \frac{1}{6!} \frac{d^6}{dz^6} \frac{z^3}{\operatorname{sen}^3(z)} \right|_{z=0} .$$

Il residuo può essere ottenuto più agevolmente coefficiente -1 della serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine. Possiamo sfruttare la serie di Taylor della funzione seno e la derivata seconda della somma della serie geometrica. Per quest'ultima si ha

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\alpha^{k-2} = 1 + 3\alpha + 6\alpha^2 + 10\alpha^3 + \mathcal{O}\left(\alpha^4\right),$$

per ogni ragione α, tale che: $|\alpha|<1$.
Per la funzione integranda, nel limite $z \to 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)} &= \frac{1}{z^4 \left(z - z^3/3! + z^5/5! + \mathcal{O}(z^7)\right)^3} = \frac{1}{z^7 \left[1 - (z^2/3! - z^4/5! + \mathcal{O}(z^6))\right]^3} \\ &= \frac{1}{z^7}\left[1 + 3\left(\frac{z^2}{7!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right) + 6\left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^2 + 10\left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^3 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Il coefficiente -1, che coincide con il residuo è quello della potenza z^6 nell'espressione nelle parentesi quadre, ad esso contribuiscono termi provenienti dalle tre espressioni in parentesi tonde elevate rispettivamente alla prima, alla seconda e alla terza. Infatti, il termine della parentesi tonda alla quarta, sottintesa nell'espressione precedente, dà come potenza minima z^8. Si ha

$$\frac{1}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)} = \frac{1}{z^7}\left[\cdots + z^6\left(\frac{3}{7!} - \frac{6 \cdot 2}{3!5!} + \frac{10}{(3!)^3}\right) + \cdots\right],$$

le tre frazioni nella parantesi tonda, la cui somma dà il coefficiente -1 della serie di Laurent è anche il residuo e vale

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)}, 0\right] = \frac{3}{7!} - \frac{6 \cdot 2}{3!5!} + \frac{10}{(3!)^3} = \frac{457}{15120} .$$

L'integrale richiesto è

$$\text{💘} = \frac{914 i\pi}{15120} .$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/60)

Si ottengano le espressioni dei coefficienti della serie di Laurent con centro in $z = 1$ e convergente nell'origine della funzione che ha rappresentazione

$$\Bacchus(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^{2j} .$$

Curiosità. Il carattere $\Bacchus$ è il simbolo di Bacco, che nella mitologia greca (Dioniso) e romana è il dio del divertimento un po' folle, del piacere dei sensi, del vino e della vendemmia.

Soluzione del terzo problema

La serie che rappresenta la funzione può essere sommata nel suo dominio di convergenza, il cerchio unitario. Infatti, è la serie geometrica di ragione z^2 privata del temine costante ovvero l'unità. Quindi, per valori di z, tali che $|z^2| = |z|^2 < 1$, cioè per $|z| < 1$, si ha

$$\Bacchus(z) = \frac{z^2}{1-z^2} .$$

La riscriviamo come

$$\Bacchus(z) = \frac{z^2}{1-z^2} = \frac{(z-1+1)^2}{(1+z)(1-z)} = \frac{(z-1)^2 + 2(z-1)+1}{(1+z)(1-z)} = \frac{(z-1)^2 + 2(z-1)+1}{(z-1+2)(1-z)} ,$$

in modo la variabile z compaia sempre come binomio $(z-1)$. La funzione è meromorfa, ha solo due poli semplici in $z = -1$ e $z = 1$, ne consegue che ci sono due serie di Laurent centrate in $z = 1$, la prima convergente nella corona circolare $\{z : 0 < |z-1| < 2\}$, la seconda nella corona circolare $\{z : |z-1| > 2\}$. La serie richiesta è la prima, infatti, l'origine, $z = 0$ verifica la condizione $0 < |0-1| = 1 < 2$, appartiene, cioè, alla prima corona circolare. Alla luce di questa constatazione, mettiamo in evidenza 2 a denominatore della funzione e si ha

$$\Bacchus(z) = \frac{(z-1)^2 + 2(z-1)+1}{2(1-z)} \frac{1}{1+(z-1)/2} = \left(-\frac{z-1}{2} - 1 - \frac{1}{2(z-1)}\right) \frac{1}{1+(z-1)/2} ,$$

l'ultimo fattore è la somma di una serie geometrica di ragione $-(z-1)/2$ poiché nella corona circolare $\{z : 0 < |z-1| < 2\}$ vale la condizione di convergenza: $|(z-1)/2| < 1$, quindi

$$\Bacchus(z) = \left(-\frac{z-1}{2} - 1 - \frac{1}{2(z-1)}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z-1)^j}{2^j} .$$

Il punto $z = 1$ è un polo semplice quindi sono il coefficiente -1 della parte principale della serie di Laurent è diverso da zero, formalmente possiamo scrivere

$$\Bacchus(z) = \left(-\frac{z-1}{2} - 1 - \frac{1}{2(z-1)}\right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z-1)^j}{2^j} = \sum_{k=-1}^{\infty} C_k (z-1)^k ,$$

da cui si hanno i primi due coefficienti non nulli

$$C_{-1} = -\frac{1}{2}, \qquad C_0 = -1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4},$$

cui contribuiscono rispettivamente solo il terzo, e il secondo e il terzo termine dell'espressione nella parentesi tonda che moltiplica la serie. I coefficienti della successione $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ si ottengono dalla somma dei tre contributi dei tre termini dell'espressione nella parentesi tonda, il k-esimo

$$C_k = -\frac{1}{2}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}} - \frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{2^k}\left(1 - 1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{(-1)^k}{2^{k+2}} , \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} .$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/60)

Sapendo che la funzione

$$u(x,y)=\operatorname{sen}\left(e^{\cos(x)\cosh(y)}\cos\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right)\right)\cosh\left(e^{\cos(x)\cosh(y)}\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\right)\right)$$

verifica l'identità

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0\,,$$

si determini la funzione analitica $\rightarrowtail(z)$, tale che

$$\operatorname{Re}\left(\rightarrowtail(z)\right)=u(x,y)\,,\qquad \rightarrowtail(0)=u(0,0)\,.$$

Curiosità. Il carattere $\rightarrowtail$ è il simbolo della dea Diana. Figlia di Giove e Latona, gemella di Apollo, nella mitologia romana e poi italica, Diana è la protettrice degli animali selvatici, delle foreste, delle sorgenti e delle donne, che beneficia garantendo loro parti senza dolore.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Per ottenere la funzione analitica $\rightarrowtail(z)$ usiamo la formula

$$\rightarrowtail(z)=2\,u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-u(0,0)\,,$$

che è applicabile in questo caso poiché la funzione è reale nell'origine, infatti si ha

$$\rightarrowtail(0)=u(0,0)\in\mathbb{R}\,,$$

cioè $\operatorname{Im}\left(\rightarrowtail(0)\right)=0$. Calcoliamo

$$u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)=\operatorname{sen}\left(e^{\cos(z/2)\cosh(z/(2i))}\cos\left(\operatorname{sen}(z/2)\operatorname{senh}(z/(2i))\right)\right)\cosh\left(e^{\cos(z/2)\cosh(z/(2i))}\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(z/2)\operatorname{senh}(z/(2i))\right)\right)\,,$$

usiamo

$$\cosh\left(\frac{z}{2i}\right)=\cos\left(\frac{z}{2}\right)\,,\qquad \operatorname{senh}\left(\frac{z}{2i}\right)=-i\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)\,,$$

e la formula di duplicazione della funzione seno, segue che

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)&=\operatorname{sen}\left(e^{\cos^2(z/2)}\cos\left(-i\operatorname{sen}^2(z/2)\right)\right)\cosh\left(e^{\cos^2(z/2)}\operatorname{sen}\left(-i\operatorname{sen}^2(z/2)\right)\right)\\
&=\operatorname{sen}\left(e^{\cos^2(z/2)}\frac{e^{\operatorname{sen}^2(z/2)}+e^{-\operatorname{sen}^2(z/2)}}{2}\right)\cosh\left(e^{\cos^2(z/2)}\frac{e^{\operatorname{sen}^2(z/2)}-e^{-\operatorname{sen}^2(z/2)}}{2i}\right)\\
&=\operatorname{sen}\left(\frac{e+e^{\cos(z)}}{2}\right)\cosh\left(\frac{e-e^{\cos(z)}}{2i}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{e+e^{\cos(z)}}{2}\right)\cos\left(\frac{e-e^{\cos(z)}}{2}\right)\\
&=\left[\operatorname{sen}(e/2)\cos\left(e^{\cos(z)}/2\right)+\cos(e/2)\operatorname{sen}\left(e^{\cos(z)}/2\right)\right]\\
&\qquad\left[\cos(e/2)\cos\left(e^{\cos(z)}/2\right)+\operatorname{sen}(e/2)\operatorname{sen}\left(e^{\cos(z)}/2\right)\right]\\
&=\operatorname{sen}\left(e^{\cos(z)}/2\right)\cos\left(e^{\cos(z)}/2\right)\left(\operatorname{sen}^2(e/2)+\cos^2(e/2)\right)\\
&\qquad+\operatorname{sen}(e/2)\cos(e/2)\left(\operatorname{sen}^2\left(e^{\cos(z)}/2\right)+\cos^2\left(e^{\cos(z)}/2\right)\right)\\
&=\operatorname{sen}\left(e^{\cos(z)}/2\right)\cos\left(e^{\cos(z)}/2\right)+\operatorname{sen}(e/2)\cos(e/2)\\
&=\frac{\operatorname{sen}\left(e^{\cos(z)}\right)}{2}+\frac{\operatorname{sen}(e)}{2}\,.
\end{aligned}$$

Infine, avendo

$$u(0,0)=\operatorname{sen}\left(e\cos(0)\right)\cosh(0)=\operatorname{sen}(e)\,,$$

si ottiene la funzione cercata

$$\nrightarrow(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, z2i\right) - u(0,0) = 2\left(\frac{\operatorname{sen}\left(e^{\cos(z)}\right)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(e)}{2}\right) - \operatorname{sen}(e),$$

cioè

$$\nrightarrow(z) = \operatorname{sen}\left(e^{\cos(z)}\right).$$

Quinto problema (punteggio massimo: 5/60)

Si ottenga l'espressione analitica della funzione meromorfa $\text{♄}(z)$, nulla all'infinito, avente poli doppi nei punti dell'insieme $\left\{z_k = k^2\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, con residui unitari e tali che il k-esimo polo ha coefficiente di Laurent -2, $C_{-2}^{(k)} = k^2 + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Curiosità. Il carattere ♄ è il simbolo di Cronos nella mitologia greca è il re dei Titani e dio del tempo.

Soluzione del quinto problema

Usiamo l'espansione di Mittag-Leffler

$$\text{♄}(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{C_{-2}^{(k)}}{(z-z_k)^2} + \frac{C_{-1}^{(k)}}{z-z_k}\right),$$

dove la funzione $\phi(z)$ è intera e ha lo stesso comportamento asintotico della funzione $\text{♄}(z)$. Sfruttiamo i dati del problema rispettivamente per le posizioni dei poli doppi e per i coefficienti della parti principali delle serie di Laurent: $z_k = k^2$, $C_{-2}^{(k)} = k^2+1$, $C_{-1}^{(k)} = 1$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. I valori dei coefficienti -1 sono tutti unitari poiché coincidono con i residui. Alla luce di questi dati, l'espansione di Mittag-Leffler diventa

$$\text{♄}(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{k^2+1}{(z-k^2)^2} + \frac{1}{z-k^2}\right).$$

All'infinito, ovvero nel limite $z \to \infty$, la funzione $\text{♄}(z)$ tende a zero, ciò implica che la funzione intera $\phi(z)$ sia identicamente nulla, l'espansione diventa

$$\text{♄}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{k^2+1}{(z-k^2)^2} + \frac{1}{z-k^2}\right) = (z+1)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-k^2)^2},$$

dove abbiamo sommato i due termini ed estratto dalla serie il binomio in z indipendente dall'indice k. La somma della serie può essere calcolata con il metodo dei residui. Poiché la serie è a segno costante, definiamo la funzione di lavoro

$$F(w) = \pi\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{1}{(z-w^2)^2},$$

che ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{w_k = k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, dovuti alla funzione $\operatorname{sen}(w\pi)$ a denominatore, ci sono inoltre due poli doppi $w_\pm = \pm\sqrt{z}$, coincidenti agli zeri doppi del polinomio di quarto grado $\left(z-w^2\right)^2$, anch'esso a denominatore. Consideriamo gli integrali della funzione $F(w)$ sulle circonferenze centrate nell'origine di raggio semi-intero $(n+1/2)$, con $n \in \mathbb{N}$. Fissato un valore z, scegliamo n tale che $(n+1/2) > |z|^{1/2}$, cosicché la circonferenza avvolga i due poli doppi $w_\pm = \pm\sqrt{z}$. Gli integrali, che dividiamo per $2i\pi$ per comodità nell'uso del teorema dei residui, sono

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=n+1/2} F(w)dw &= \frac{1}{2i}\oint_{|w|=n+1/2}\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{dw}{(z-w^2)^2} \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{\pi}{(z-w^2)^2}, k\right] \\
&\quad + \operatorname{Res}\left[\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{\pi}{(z-w^2)^2}, \sqrt{z}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{\pi}{(z-w^2)^2}, -\sqrt{z}\right] \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{(z-w^2)^2} + \operatorname{Res}\left[\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{\pi}{(z-w^2)^2}, \sqrt{z}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{\pi}{(z-w^2)^2}, -\sqrt{z}\right].
\end{aligned}$$

I residui dei due poli doppi sono

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{\pi}{(z-w^2)^2},\pm\sqrt{z}\right] &= \pi\,\frac{d}{dw}\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{1}{\left(w\pm\sqrt{z}\right)^2}\Bigg|_{\pm\sqrt{z}}\\
&= \pi\left(-\frac{\pi}{\left(w\pm\sqrt{z}\right)^2}-\frac{\cos^2(w\pi)}{\operatorname{sen}^2(w\pi)}\frac{\pi}{\left(w\pm\sqrt{z}\right)^2}-\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)}\frac{2}{\left(w\pm\sqrt{z}\right)^3}\right)_{\pm\sqrt{z}}\\
&= -\frac{\pi^2}{\left(w\pm\sqrt{z}\right)^2}\left(1+\cot^2(w\pi)+\cot(w\pi)\frac{2}{\pi\left(w\pm\sqrt{z}\right)}\right)_{\pm\sqrt{z}}\\
&= -\frac{\pi^2}{4z}\left(1+\cot^2(\sqrt{z}\pi)+\frac{\cot(\sqrt{z}\pi)}{\sqrt{z}\pi}\right).
\end{aligned}
$$

Nel limite $n\to\infty$ l'integrale tende a zero e si ha

$$
0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=n+1/2}F(w)dw=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-w^2)^2}-\frac{\pi^2}{2z}\left(1+\cot^2(\sqrt{z}\pi)+\frac{\cot(\sqrt{z}\pi)}{\sqrt{z}\pi}\right),
$$

da cui si ottiene la somma della serie

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-w^2)^2}=\frac{\pi^2}{2z}\left(1+\cot^2(\sqrt{z}\pi)+\frac{\cot(\sqrt{z}\pi)}{\sqrt{z}\pi}\right).
$$

La funzione cercata è

$$
\Upsilon(z)=(z+1)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-k^2)^2}=\pi^2\frac{z+1}{2z}\left(1+\cot^2\left(\sqrt{z}\pi\right)+\frac{\cot\left(\sqrt{z}\pi\right)}{\sqrt{z}\pi}\right).
$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/60)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$
\text{⚕}_n=\Pr\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z(z^n+1)},
$$

per un generico $n\in\mathbb{N}$.

Curiosità. Il carattere ⚕ simboleggia Igea, che nella mitologia greca e romana è la dea della salute e dell'igiene. Lo stesso sostantivo igiene deriva dal nome della dea.

Soluzione del sesto Problema

La funzione integranda ha $n+1$ poli semplici, uno nell'origine, gli altri n sono i punti dell'insieme $\left\{z_k=e^{(2k+1)i\pi/n}\right\}_{k=0}^{n-1}$, sono le radici n-esime di -1 e appartengono alla circonferenza unitaria, è su questi poli che va calcolato il valore principale. Consideriamo il percorso chiuso Γ_ϵ mostrato in figura in marrone cioccolato al latte. Si tratta della circonferenza unitari dentata internamente in corrispondenza delle n radici n-esime di -1, indicate da simboli "$\times$" neri. La generica dentatura $-\gamma_k$, con $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, è un arco di raggio ϵ e centro z_k. Nel limite $\epsilon\to 0^+$, l'angolo sotteso da ogni arco tende a π. L'integrale sul percorso chiuso Γ_ϵ, nel limite $\epsilon\to 0^+$

$$
2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\left(z^n+1\right)},0\right]=\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{\Gamma_\epsilon}\frac{dz}{z\left(z^n+1\right)}=\text{⚕}_n+\sum_{k=0}^{n-1}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\gamma_k}\frac{dz}{z\left(z^n+1\right)},
$$

da cui

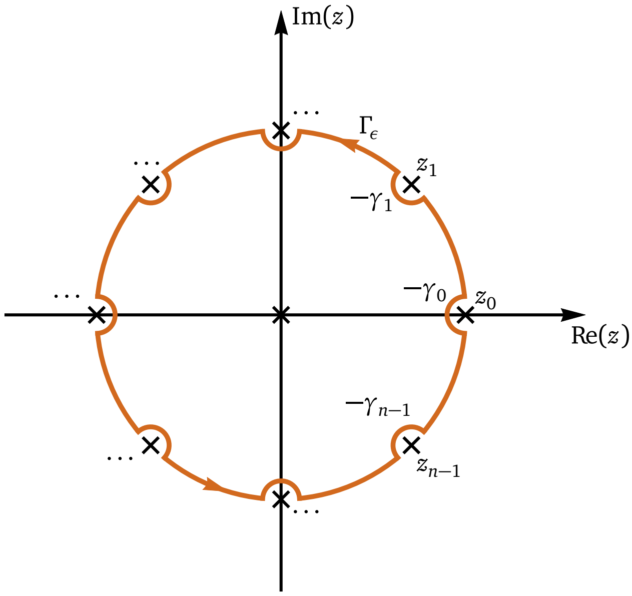
$$
\text{⚕}_n=2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\left(z^n+1\right)},0\right]-\sum_{k=0}^{n-1}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\gamma_k}\frac{dz}{z\left(z^n+1\right)}=2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\left(z^n+1\right)},0\right]+\sum_{k=0}^{n-1}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\gamma_k}\frac{dz}{z\left(z^n+1\right)}.
$$

Il residuo nell'origine vale

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z\,(z^n+1)},0\right]=\left.\frac{1}{z^n+1}\right|_{z=0}=1\,.$$

Il limite dell'integrale sul k-esimo arco, con $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, è

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\gamma_k}\frac{dz}{z\,(z^n+1)}=i\pi\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{z\,(z^n+1)}=i\pi\lim_{z\to z_k}\frac{1}{z_k n z^{n-1}}=\frac{i\pi}{n\,\underbrace{z_k^n}_{-1}}=-\frac{i\pi}{n}\,.$$



Sostituendo questi risultati nell'espressione dell'integrale cercato si ha

$$\mathcal{I}_n=2i\pi+\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{i\pi}{n}\right),$$

il termine della somma non dipende dall'indice, quindi la somma vale $-i\pi$ e il risultato finale è indipendente da n, ovvero

$$\mathcal{I}_n=i\pi\,.$$