

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PRIMA PROVA PARZIALE DEL PRIMO MARZO 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di semplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/60)

Si calcoli l'integrale

$$\mathbb{U} = \int_0^{2\pi} e^{\text{sen}(\beta)} d\beta.$$

Utilità. Il risultato è in forma di serie.

Curiosità. Il carattere \mathbb{U} , che rappresenta la lira, è il simbolo di Apollo. Nella mitologia greca e romana Apollo è il dio che si occupa della musica, dell'intelletto, della medicina, della scienza e della profezia.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Usiamo la formula di Eulero per la funzione seno e facciamo il cambiamento di variabile $z = e^{i\beta}$, cosicché il percorso d'integrazione diventa la circonferenza unitaria nel piano complesso z . Si ha $\beta = -i \ln(z)$, $d\beta = -i dz/z$, quindi

$$\mathbb{U} = -i \oint_{|z|=1} \exp\left(\frac{z}{2i} - \frac{1}{2iz}\right) \frac{dz}{z} = -i \oint_{|z|=1} \frac{e^{z/(2i)} e^{-1/(2iz)}}{z} dz.$$

La funzione integranda ha al finito la sola singolarità essenziale nell'origine dovuta al secondo esponenziale dell'ultimo membro e alla z a denominatore. Usiamo il teorema dei residui

$$\mathbb{U} = 2\pi \text{Res}\left[\frac{e^{z/(2i)} e^{-1/(2iz)}}{z}, z=0\right],$$

per calcolare il residuo consideriamo la serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine. La otteniamo a partire dalla serie di Taylor dell'esponenziale, che usiamo per i due fattori, si ha quindi la doppia serie

$$\frac{e^{z/(2i)} e^{-1/(2iz)}}{z} = \frac{1}{z} \sum_{j,k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^j \left(-\frac{1}{2iz}\right)^k \frac{1}{j!k!} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{-j-k} 2^{-j-k}}{j!k!} z^{j-k-1}.$$

Il coefficiente della potenza z^{-1} è dato dalla doppia serie con la delta di Kronecker $\delta_{j,k}$, selezione solo la potenza z^{-1} , si ha

$$\text{Res}\left[\frac{e^{z/(2i)} e^{-1/(2iz)}}{z}, z=0\right] = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{-j-k} 2^{-j-k}}{j!k!} \delta_{j,k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j i^{-2j} 2^{-2j}}{(j!)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-2j}}{(j!)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j j!)^2}.$$

Il risultato è

$$\mathbb{U} = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j j!)^2}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7/60)

Si calcoli l'integrale

$$\heartsuit = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)}.$$

Curiosità. Il carattere \heartsuit è il simbolo di Cupido, che nella mitologia greca è il dio del desiderio sessuale e dell'amore.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda è meromorfa, ha un polo di ordine 7 nell'origine e poli di ordine 3 negli zeri della funzione seno diversi dall'origine. Il percorso d'integrazione è la circonferenza unitaria, che avvolge una volta solo il polo nell'origine. Applicando il teorema dei residui

$$\heartsuit = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)}, 0 \right] = 2i\pi \left. \frac{1}{6!} \frac{d^6}{dz^6} \frac{z^3}{\operatorname{sen}^3(z)} \right|_{z=0}.$$

Il residuo può essere ottenuto più agevolmente coefficiente -1 della serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine. Possiamo sfruttare la serie di Taylor della funzione seno e la derivata seconda della somma della serie geometrica. Per quest'ultima si ha

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \alpha^{k-2} = 1 + 3\alpha + 6\alpha^2 + 10\alpha^3 + \mathcal{O}(\alpha^4),$$

per ogni ragione α , tale che: $|\alpha| < 1$.

Per la funzione integranda, nel limite $z \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)} &= \frac{1}{z^4 (z - z^3/3! + z^5/5! + \mathcal{O}(z^7))^3} = \frac{1}{z^7 [1 - (z^2/3! - z^4/5! + \mathcal{O}(z^6))]^3} \\ &= \frac{1}{z^7} \left[1 + 3 \left(\frac{z^2}{7!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right) + 6 \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right)^2 + 10 \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}(z^6) \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Il coefficiente -1 , che coincide con il residuo è quello della potenza z^6 nell'espressione nelle parentesi quadre, ad esso contribuiscono termini provenienti dalle tre espressioni in parentesi tonde elevate rispettivamente alla prima, alla seconda e alla terza. Infatti, il termine della parentesi tonda alla quarta, sottintesa nell'espressione precedente, dà come potenza minima z^8 . Si ha

$$\frac{1}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)} = \frac{1}{z^7} \left[\dots + z^6 \left(\frac{3}{7!} - \frac{6 \cdot 2}{3!5!} + \frac{10}{(3!)^3} \right) + \dots \right],$$

le tre frazioni nella parantesi tonda, la cui somma dà il coefficiente -1 della serie di Laurent è anche il residuo e vale

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^4 \operatorname{sen}^3(z)}, 0 \right] = \frac{3}{7!} - \frac{6 \cdot 2}{3!5!} + \frac{10}{(3!)^3} = \frac{457}{15120}.$$

L'integrale richiesto è

$$\heartsuit = \frac{914i\pi}{15120}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/60)

Si ottengano le espressioni dei coefficienti della serie di Laurent con centro in $z = 1$ e convergente nell'origine della funzione che ha rappresentazione

$$\Psi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^{2j}.$$

Curiosità. Il carattere Ψ è il simbolo di Bacco, che nella mitologia greca (Dioniso) e romana è il dio del divertimento un po' folle, del piacere dei sensi, del vino e della vendemmia.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La serie che rappresenta la funzione può essere sommata nel suo dominio di convergenza, il cerchio unitario. Infatti, è la serie geometrica di ragione z^2 privata del termine costante ovvero l'unità. Quindi, per valori di z , tali che $|z^2| = |z|^2 < 1$, cioè per $|z| < 1$, si ha

$$\Psi(z) = \frac{z^2}{1 - z^2}.$$

La riscriviamo come

$$\Psi(z) = \frac{z^2}{1 - z^2} = \frac{(z - 1 + 1)^2}{(1 + z)(1 - z)} = \frac{(z - 1)^2 + 2(z - 1) + 1}{(1 + z)(1 - z)} = \frac{(z - 1)^2 + 2(z - 1) + 1}{(z - 1 + 2)(1 - z)},$$

in modo la variabile z compaia sempre come binomio $(z - 1)$. La funzione è meromorfa, ha solo due poli semplici in $z = -1$ e $z = 1$, ne consegue che ci sono due serie di Laurent centrate in $z = 1$, la prima convergente nella corona circolare $\{z : 0 < |z - 1| < 2\}$, la seconda nella corona circolare $\{z : |z - 1| > 2\}$. La serie richiesta è la prima, infatti, l'origine, $z = 0$ verifica la condizione $0 < |0 - 1| = 1 < 2$, appartiene, cioè, alla prima corona circolare. Alla luce di questa constatazione, mettiamo in evidenza 2 a denominatore della funzione e si ha

$$\Psi(z) = \frac{(z - 1)^2 + 2(z - 1) + 1}{2(1 - z)} \frac{1}{1 + (z - 1)/2} = \left(-\frac{z - 1}{2} - 1 - \frac{1}{2(z - 1)} \right) \frac{1}{1 + (z - 1)/2},$$

l'ultimo fattore è la somma di una serie geometrica di ragione $-(z - 1)/2$ poiché nella corona circolare $\{z : 0 < |z - 1| < 2\}$ vale la condizione di convergenza: $|z - 1|/2 < 1$, quindi

$$\Psi(z) = \left(-\frac{z - 1}{2} - 1 - \frac{1}{2(z - 1)} \right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z - 1)^j}{2^j}.$$

Il punto $z = 1$ è un polo semplice quindi sono il coefficiente -1 della parte principale della serie di Laurent è diverso da zero, formalmente possiamo scrivere

$$\Psi(z) = \left(-\frac{z - 1}{2} - 1 - \frac{1}{2(z - 1)} \right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z - 1)^j}{2^j} = \sum_{k=-1}^{\infty} C_k (z - 1)^k,$$

da cui si hanno i primi due coefficienti non nulli

$$C_{-1} = -\frac{1}{2}, \quad C_0 = -1 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{4},$$

cui contribuiscono rispettivamente solo il terzo, e il secondo e il terzo termine dell'espressione nella parentesi tonda che moltiplica la serie. I coefficienti della successione $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ si ottengono dalla somma dei tre contributi dei tre termini dell'espressione nella parentesi tonda, il k -esimo

$$C_k = -\frac{1}{2} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}} - \frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{1}{2} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{(-1)^k}{2^k} \left(1 - 1 + \frac{1}{4} \right) = \frac{(-1)^k}{2^{k+2}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/60)

Sapendo che la funzione

$$u(x, y) = \operatorname{sen}\left(e^{\cos(x)\cosh(y)} \cos(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y))\right) \cosh\left(e^{\cos(x)\cosh(y)} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y))\right)$$

verifica l'identità

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

si determini la funzione analitica $\rightarrow(z)$, tale che

$$\operatorname{Re}(\rightarrow(z)) = u(x, y), \quad \rightarrow(0) = u(0, 0).$$

Curiosità. Il carattere \rightarrow è il simbolo della dea Diana. Figlia di Giove e Latona, gemella di Apollo, nella mitologia romana e poi italiana, Diana è la protettrice degli animali selvatici, delle foreste, delle sorgenti e delle donne, che beneficia garantendo loro parti senza dolore.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Per ottenere la funzione analitica $\rightarrow(z)$ usiamo la formula

$$\rightarrow(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0),$$

che è applicabile in questo caso poiché la funzione è reale nell'origine, infatti si ha

$$\rightarrow(0) = u(0, 0) \in \mathbb{R},$$

cioè $\operatorname{Im}(\rightarrow(0)) = 0$. Calcoliamo

$$u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \operatorname{sen}\left(e^{\cos(z/2)\cosh(z/(2i))} \cos(\operatorname{sen}(z/2)\operatorname{senh}(z/(2i)))\right) \cosh\left(e^{\cos(z/2)\cosh(z/(2i))} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(z/2)\operatorname{senh}(z/(2i)))\right),$$

usiamo

$$\cosh\left(\frac{z}{2i}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right), \quad \operatorname{senh}\left(\frac{z}{2i}\right) = -i \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right),$$

e la formula di duplicazione della funzione seno, segue che

$$\begin{aligned} u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) &= \operatorname{sen}\left(e^{\cos^2(z/2)} \cos(-i \operatorname{sen}^2(z/2))\right) \cosh\left(e^{\cos^2(z/2)} \operatorname{sen}(-i \operatorname{sen}^2(z/2))\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(e^{\cos^2(z/2)} \frac{e^{\operatorname{sen}^2(z/2)} + e^{-\operatorname{sen}^2(z/2)}}{2}\right) \cosh\left(e^{\cos^2(z/2)} \frac{e^{\operatorname{sen}^2(z/2)} - e^{-\operatorname{sen}^2(z/2)}}{2i}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{e + e^{\cos(z)}}{2}\right) \cosh\left(\frac{e - e^{\cos(z)}}{2i}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{e + e^{\cos(z)}}{2}\right) \cos\left(\frac{e - e^{\cos(z)}}{2}\right) \\ &= \left[\operatorname{sen}(e/2) \cos(e^{\cos(z)}/2) + \cos(e/2) \operatorname{sen}(e^{\cos(z)}/2)\right] \\ &\quad \left[\cos(e/2) \cos(e^{\cos(z)}/2) + \operatorname{sen}(e/2) \operatorname{sen}(e^{\cos(z)}/2)\right] \\ &= \operatorname{sen}(e^{\cos(z)}/2) \cos(e^{\cos(z)}/2) (\operatorname{sen}^2(e/2) + \cos^2(e/2)) \\ &\quad + \operatorname{sen}(e/2) \cos(e/2) (\operatorname{sen}^2(e^{\cos(z)}/2) + \cos^2(e^{\cos(z)}/2)) \\ &= \operatorname{sen}(e^{\cos(z)}/2) \cos(e^{\cos(z)}/2) + \operatorname{sen}(e/2) \cos(e/2) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(e^{\cos(z)})}{2} + \frac{\operatorname{sen}(e)}{2}. \end{aligned}$$

Infine, avendo

$$u(0, 0) = \operatorname{sen}(e \cos(0)) \cosh(0) = \operatorname{sen}(e),$$

si ottiene la funzione cercata

$$\rightarrow(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, z2i\right) - u(0, 0) = 2\left(\frac{\text{sen}(e^{\cos(z)})}{2} + \frac{\text{sen}(e)}{2}\right) - \text{sen}(e),$$

cioè

$$\rightarrow(z) = \text{sen}(e^{\cos(z)}).$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/60)

Si ottenga l'espressione analitica della funzione meromorfa $\mathbb{T}(z)$, nulla all'infinito, avente poli doppi nei punti dell'insieme $\{z_k = k^2\}_{k \in \mathbb{Z}}$, con residui unitari e tali che il k -esimo polo ha coefficiente di Laurent -2 , $C_{-2}^{(k)} = k^2 + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Curiosità. Il carattere \mathbb{T} è il simbolo di Cronos nella mitologia greca è il re dei Titani e dio del tempo.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Usiamo l'espansione di Mittag-Leffler

$$\mathbb{T}(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{C_{-2}^{(k)}}{(z - z_k)^2} + \frac{C_{-1}^{(k)}}{z - z_k} \right),$$

dove la funzione $\phi(z)$ è intera e ha lo stesso comportamento asintotico della funzione $\mathbb{T}(z)$. Sfruttiamo i dati del problema rispettivamente per le posizioni dei poli doppi e per i coefficienti della parti principali delle serie di Laurent: $z_k = k^2$, $C_{-2}^{(k)} = k^2 + 1$, $C_{-1}^{(k)} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. I valori dei coefficienti -1 sono tutti unitari poiché coincidono con i residui. Alla luce di questi dati, l'espansione di Mittag-Leffler diventa

$$\mathbb{T}(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k^2 + 1}{(z - k^2)^2} + \frac{1}{z - k^2} \right).$$

All'infinito, ovvero nel limite $z \rightarrow \infty$, la funzione $\mathbb{T}(z)$ tende a zero, ciò implica che la funzione intera $\phi(z)$ sia identicamente nulla, l'espansione diventa

$$\mathbb{T}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k^2 + 1}{(z - k^2)^2} + \frac{1}{z - k^2} \right) = (z + 1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - k^2)^2},$$

dove abbiamo sommato i due termini ed estratto dalla serie il binomio in z indipendente dall'indice k . La somma della serie può essere calcolata con il metodo dei residui. Poiché la serie è a segno costante, definiamo la funzione di lavoro

$$F(w) = \pi \frac{\cos(w\pi)}{\text{sen}(w\pi)} \frac{1}{(z - w^2)^2},$$

che ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{w_k = k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, dovuti alla funzione $\text{sen}(w\pi)$ a denominatore, ci sono inoltre due poli doppi $w_{\pm} = \pm\sqrt{z}$, coincidenti agli zeri doppi del polinomio di quarto grado $(z - w^2)^2$, anch'esso a denominatore. Consideriamo gli integrali della funzione $F(w)$ sulle circonferenze centrate nell'origine di raggio semi-intero $(n + 1/2)$, con $n \in \mathbb{N}$. Fissato un valore z , scegliamo n tale che $(n + 1/2) > |z|^{1/2}$, cosicché la circonferenza avvolga i due poli doppi $w_{\pm} = \pm\sqrt{z}$. Gli integrali, che dividiamo per $2i\pi$ per comodità nell'uso del teorema dei residui, sono

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=n+1/2} F(w)dw &= \frac{1}{2i} \oint_{|w|=n+1/2} \frac{\cos(w\pi)}{\text{sen}(w\pi)} \frac{dw}{(z - w^2)^2} \\ &= \sum_{k=-n}^n \text{Res} \left[\frac{\cos(w\pi)}{\text{sen}(w\pi)} \frac{\pi}{(z - w^2)^2}, k \right] \\ &\quad + \text{Res} \left[\frac{\cos(w\pi)}{\text{sen}(w\pi)} \frac{\pi}{(z - w^2)^2}, \sqrt{z} \right] + \text{Res} \left[\frac{\cos(w\pi)}{\text{sen}(w\pi)} \frac{\pi}{(z - w^2)^2}, -\sqrt{z} \right] \\ &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{(z - w^2)^2} + \text{Res} \left[\frac{\cos(w\pi)}{\text{sen}(w\pi)} \frac{\pi}{(z - w^2)^2}, \sqrt{z} \right] + \text{Res} \left[\frac{\cos(w\pi)}{\text{sen}(w\pi)} \frac{\pi}{(z - w^2)^2}, -\sqrt{z} \right]. \end{aligned}$$

I residui dei due poli doppi sono

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)} \frac{\pi}{(z-w^2)^2}, \pm\sqrt{z} \right] &= \pi \left. \frac{d}{dw} \frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)} \frac{1}{(w \pm \sqrt{z})^2} \right|_{\pm\sqrt{z}} \\ &= \pi \left(-\frac{\pi}{(w \pm \sqrt{z})^2} - \frac{\cos^2(w\pi)}{\operatorname{sen}^2(w\pi)} \frac{\pi}{(w \pm \sqrt{z})^2} - \frac{\cos(w\pi)}{\operatorname{sen}(w\pi)} \frac{2}{(w \pm \sqrt{z})^3} \right)_{\pm\sqrt{z}} \\ &= -\frac{\pi^2}{(w \pm \sqrt{z})^2} \left(1 + \cot^2(w\pi) + \cot(w\pi) \frac{2}{\pi(w \pm \sqrt{z})} \right)_{\pm\sqrt{z}} \\ &= -\frac{\pi^2}{4z} \left(1 + \cot^2(\sqrt{z}\pi) + \frac{\cot(\sqrt{z}\pi)}{\sqrt{z}\pi} \right). \end{aligned}$$

Nel limite $n \rightarrow \infty$ l'integrale tende a zero e si ha

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=n+1/2} F(w)dw = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-w^2)^2} - \frac{\pi^2}{2z} \left(1 + \cot^2(\sqrt{z}\pi) + \frac{\cot(\sqrt{z}\pi)}{\sqrt{z}\pi} \right),$$

da cui si ottiene la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-w^2)^2} = \frac{\pi^2}{2z} \left(1 + \cot^2(\sqrt{z}\pi) + \frac{\cot(\sqrt{z}\pi)}{\sqrt{z}\pi} \right).$$

La funzione cercata è

$$\mathbb{F}(z) = (z+1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-k^2)^2} = \pi^2 \frac{z+1}{2z} \left(1 + \cot^2(\sqrt{z}\pi) + \frac{\cot(\sqrt{z}\pi)}{\sqrt{z}\pi} \right).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/60)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\mathfrak{C}_n = \operatorname{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(z^n+1)},$$

per un generico $n \in \mathbb{N}$.

Curiosità. Il carattere \mathfrak{C} simboleggia Igea, che nella mitologia greca e romana è la dea della salute e dell'igiene. Lo stesso sostantivo igiene deriva dal nome della dea.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

La funzione integranda ha $n+1$ poli semplici, uno nell'origine, gli altri n sono i punti dell'insieme $\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/n}\}_{k=0}^{n-1}$, sono le radici n -esime di -1 e appartengono alla circonferenza unitaria, è su questi poli che va calcolato il valore principale. Consideriamo il percorso chiuso Γ_ϵ mostrato in figura in marrone cioccolato al latte. Si tratta della circonferenza unitaria dentata internamente in corrispondenza delle n radici n -esime di -1 , indicate da simboli "x" neri. La generica dentatura $-\gamma_k$, con $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, è un arco di raggio ϵ e centro z_k . Nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, l'angolo sotteso da ogni arco tende a π . L'integrale sul percorso chiuso Γ_ϵ , nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$

$$2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z(z^n+1)}, 0 \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{z(z^n+1)} = \mathfrak{C}_n + \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\gamma_k} \frac{dz}{z(z^n+1)},$$

da cui

$$\mathfrak{C}_n = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z(z^n+1)}, 0 \right] - \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\gamma_k} \frac{dz}{z(z^n+1)} = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z(z^n+1)}, 0 \right] + \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z(z^n+1)}.$$

