Metodi Matematici per la Fisica

Primo appello estivo - Primo luglio 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la somma della serie

$$央 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6+1} \, .$$

(Il carattere cinese 央 si pronuncia *Yāng* e significa "centrale".)

Soluzione del primo problema

Possiamo definite la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1} \, ,$$

cosicché la serie ha la forma

$$央 = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \, .$$

Usando il metodo dei residui si ha

$$0 = \lim_{n\to\infty} \oint_{|z|=n+1/2} f(z) \frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)} dz = 2i\pi \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=-n}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)}, p_j \right] + \sum_{k=0}^{5} \mathrm{Res}\left[f(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)}, z_k \right] \right) ,$$

dove $\left\{p_j = j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ e $\left\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/6}\right\}_{k=0}^{5}$ è sono gli insiemi dei poli semplici della funzione integranda dovuti, rispettivamente, alla funzione seno e al polinomio di sesto grado a denominatore della stessa funzione integranda. I residui sono

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}\left[f(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)}, p_j \right] = f(j) = \frac{1}{j^6+1} \, , && \forall\, j \in \mathbb{Z} \, , \\
&\mathrm{Res}\left[f(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)}, z_k \right] = \lim_{z\to z_k} f(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)}(z-z_k) = -\frac{\pi}{6}\frac{z_k\cos(z_k\pi)}{\mathrm{sen}(z_k\pi)} \, , && \forall\, k \in \{0,1,\ldots,5\} \, .
\end{aligned}$$

L'annullamento dell'integrale nel limite $n \to \infty$ è conseguenza del limite uniforme

$$\lim_{n\to\infty} f(z)\frac{\pi\cos(z\pi)}{\mathrm{sen}(z\pi)} z \overset{\mathrm{U.}}{=} 0 \, ,$$

sulla circonferenza centrata nell'origine e raggio $n+1/2$. Questo risultato si ottiene considerando la maggiorazione seguente, $\forall\, z$, tali che $|z| = n+1/2$,

$$0 \leq \left| f(z) \frac{\pi \cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} z \right| = \frac{\pi(n+1/2)}{|z^6+1|} \left| \frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \right| \leq \frac{\pi(n+1/2)}{(n+1/2)^6 - 1} \underbrace{\left| \frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)} \right|}_{\leq 1} \leq \frac{\pi(n+1/2)}{(n+1/2)^6 - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,.$$

L'annullamento implica un'equazione per la serie, ovvero si ottiene

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j^6+1} = \frac{\pi}{6} \sum_{k=0}^{5} \frac{z_k \cos(z_k\pi)}{\operatorname{sen}(z_k\pi)} \,.$$

Considerando la parità del termine della serie e il fatto che i sei poli semplici dell'insieme $\{z_k\}_{k=0}^{5}$ sono tre coppie di complessi coniugati, con, in particolare: $z_5 = z_0^*$, $z_4 = z_1^*$ e $z_2 = z_3^*$, si ha

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j^6+1} = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^6+1} + 1 = 2\text{央} + 1 = \frac{\pi}{6} \sum_{k=0}^{5} \frac{z_k \cos(z_k\pi)}{\operatorname{sen}(z_k\pi)} = \frac{\pi}{3} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{2} \frac{z_k \cos(z_k\pi)}{\operatorname{sen}(z_k\pi)} \right),$$

da cui

$$\text{央} = \frac{\pi}{6} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{2} \frac{z_k \cos(z_k\pi)}{\operatorname{sen}(z_k\pi)} \right) - \frac{1}{2} \,.$$

In generale, indicando con x e $y \in \mathbb{R}$ la parte reale e immaginaria di $z \in \mathbb{C}$, si hanno

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z) &= \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{senh}(y)\,,\\
\cos(z) &= \cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)\,,\\
|\operatorname{sen}(z)|^2 &= \operatorname{sen}^2(x)\cosh^2(y) + \cos^2(x)\operatorname{senh}^2(y) = \operatorname{sen}^2(x)\cosh^2(y) + \left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right)\operatorname{senh}^2(y) = \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y)\,.
\end{aligned}$$

Da cui segue

$$\begin{aligned}
\frac{z_k \cos(z_k\pi)}{\operatorname{sen}(z_k\pi)} &= (x_k + iy_k)\, \frac{[\cos(x_k\pi)\cosh(y_k\pi) - i\operatorname{sen}(x_k\pi)\operatorname{senh}(y_k\pi)]\,[\operatorname{sen}(x_k\pi)\cosh(y_k\pi) - i\cos(x_k\pi)\operatorname{senh}(y_k\pi)]}{\operatorname{sen}^2(x_k\pi) + \operatorname{senh}^2(y_k\pi)}\\
&= (x_k + iy_k)\, \frac{\cos(x_k\pi)\operatorname{sen}(x_k\pi)\cosh^2(y_k\pi) - \cos(x_k\pi)\operatorname{sen}(x_k\pi)\operatorname{senh}^2(y_k\pi)}{\operatorname{sen}^2(x_k\pi) + \operatorname{senh}^2(y_k\pi)}\\
&\quad - i\,(x_k + iy_k)\, \frac{\operatorname{sen}^2(x_k\pi)\operatorname{senh}(y_k\pi)\cosh(y_k\pi) + \cos^2(x_k\pi)\operatorname{senh}(y_k\pi)\cosh(y_k\pi)}{\operatorname{sen}^2(x_k\pi) + \operatorname{senh}^2(y_k\pi)}\\
&= (x_k + iy_k)\, \frac{\cos(x_k\pi)\operatorname{sen}(x_k\pi) - i\operatorname{senh}(y_k\pi)\cosh(y_k\pi)}{\operatorname{sen}^2(x_k\pi) + \operatorname{senh}^2(y_k\pi)}\\
&= \frac{x_k\cos(x_k\pi)\operatorname{sen}(x_k\pi) + y_k\operatorname{senh}(y_k\pi)\cosh(y_k\pi)}{\operatorname{sen}^2(x_k\pi) + \operatorname{senh}^2(y_k\pi)}\\
&\quad + i\,\frac{y_k\cos(x_k\pi)\operatorname{sen}(x_k\pi) - x_k\operatorname{senh}(y_k\pi)\cosh(y_k\pi)}{\operatorname{sen}^2(x_k\pi) + \operatorname{senh}^2(y_k\pi)}\,, \qquad \forall\, k \in \{0,1,2\}\,.
\end{aligned}$$

Infine, avendo

$$\begin{aligned}
x_0 &= \operatorname{Re}\left(e^{i\pi/6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, & x_1 &= \operatorname{Re}\left(e^{i\pi/2}\right) = 0\,, & x_2 &= \operatorname{Re}\left(e^{5i\pi/6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\
y_0 &= \operatorname{Im}\left(e^{i\pi/6}\right) = \frac{1}{2}\,, & y_1 &= \operatorname{Im}\left(e^{i\pi/2}\right) = 1\,, & y_2 &= \operatorname{Im}\left(e^{5i\pi/6}\right) = \frac{1}{2}\,,
\end{aligned}$$

la parte reale della somma dei tre residui è

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{2}\frac{z_k\cos(z_k\pi)}{\mathrm{sen}(z_k\pi)}\right) &= \sum_{k=0}^{2}\frac{x_k\cos(x_k\pi)\,\mathrm{sen}(x_k\pi)+y_k\,\mathrm{senh}(y_k\pi)\cosh(y_k\pi)/2}{\mathrm{sen}^2(x_k\pi)+\mathrm{senh}^2(y_k\pi)}\\
&= \frac{\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi/2)\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\pi/2)/2+\,\mathrm{senh}(\pi/2)\cosh(\pi/2)/2}{\mathrm{sen}^2(\sqrt{3}\pi/2)+\mathrm{senh}^2(\pi/2)}\\
&\quad+\frac{\mathrm{senh}(\pi)\cosh(\pi)}{\mathrm{senh}^2(\pi)}\\
&\quad+\frac{\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi/2)\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\pi/2)/2+\,\mathrm{senh}(\pi/2)\cosh(\pi/2)/2}{\mathrm{sen}^2(\sqrt{3}\pi/2)+\mathrm{senh}^2(\pi/2)}\\
&= \frac{\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\pi/2)\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\pi/2)+\mathrm{senh}(\pi/2)\cosh(\pi/2)}{\mathrm{sen}^2(\sqrt{3}\pi/2)+\mathrm{senh}^2(\pi/2)}+\coth(\pi)\\
&= \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\pi)/2+\mathrm{senh}(\pi)/2}{\left(1-\cos(\sqrt{3}\pi)\right)/2+(\cosh(\pi)-1)/2}+\coth(\pi)\\
&= \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\pi)+\mathrm{senh}(\pi)}{\cosh(\pi)-\cos(\sqrt{3}\pi)}+\coth(\pi)\,.
\end{aligned}$$

La somma della serie è

$$央=\frac{\pi}{6}\left(\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}\pi)+\mathrm{senh}(\pi)}{\cosh(\pi)-\cos(\sqrt{3}\pi)}+\coth(\pi)\right)-\frac{1}{2}\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si determini l'insieme $\{C_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dei coefficienti della serie di Pierre Alphonse Laurent della funzione

$$电(z)=\frac{2+z^2}{z^5+z^8}\,,$$

centrata nell'origine e convergente in tutti gli zeri.
(Il carattere cinese 电 si pronuncia *diàn* e significa "luce".)

Soluzione del secondo problema

La funzione 电(z) è meromorfa essendo un rapporto di polinomi. Ha due zeri semplici in $p_\pm=\pm i\sqrt{2}$, mentre ha poli, di ordine 5 nell'origine e semplici nelle tre radici terze di -1, cioè nei punti $z_j=e^{(2j+1)i\pi/3}$, con $j=0,1,2$. Ne consegue che la stessa funzione ha due sviluppi di Laurent centrati nell'origine che si differenziano per i domini di convergenza. Il primo è lo sviluppo convergente nella corona circolare $C_{0,1}=\{z:0<|z|<1\}$, il secondo nella corona circolare $C_{1,\infty}=\{z:|z|>1\}$. Poiché gli zeri appartengono alla seconda corona, infatti per entrambi si ha $|p_{1,2}|=\sqrt{2}>1$, l'insieme dei coefficienti di Laurent da determinare è quello della serie convergente nella corona circolare $C_{1,\infty}$.
I coefficienti possono essere calcolati con la formula integrale

$$C_k=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\frac{电(z)}{z^{k+1}}dz\,,\qquad\forall\,k\in\mathbb{Z}\,,$$

dove il percorso d'integrazione è la circonferenza centrata nell'origine di raggio $r>1$ e quindi contenuta nella corona circolare $C_{1,\infty}$. Ne consegue che la suddetta circonferenza avvolge una sola volta tutti i poli della funzione 电(z), ovvero quello nell'origine e le tre radici terze di -1.
Manipolando opportunamente la funzione integranda, facendo uso in particolare della serie geometrica e sfruttando il teorema dei residui, $\forall\,k\in\mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{aligned}
C_k&=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\frac{2+z^2}{z^5+z^8}\frac{1}{z^{k+1}}dz=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\frac{2+z^2}{z^{k+9}(1+1/z^3)}dz=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\frac{2+z^2}{z^{k+9}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{z^{3j}}dz\\
&=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2(-1)^j}{z^{3j+k+9}}dz+\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{z^{3j+k+7}}dz=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\oint_{|z|=r}\frac{2dz}{z^{3j+k+9}}+\oint_{|z|=r}\frac{dz}{z^{3j+k+7}}\right),
\end{aligned}$$

la somma può essere estratta dall'integrale poiché la serie geometrica di ragione $(-1/z^3)$ converge in modo uniforme in ogni insieme chiuso contenuto nella corona circolare $C_{1,\infty}$. In generale si ha che l'unico polo avente integrale non nullo lungo un percorso chiuso che lo avvolge è quello semplice, tale integrale è proporzionale al numero di avvolgimenti, esplicitamente

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\frac{dz}{z^n}=\delta_{n1}=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases},$$

$\forall\, r>0$ e $n\in\mathbb{Z}$. Usando questo risultato, il k-esimo coefficiente di Laurent, con $k\in\mathbb{Z}$, vale

$$C_k=\frac{1}{2i\pi}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\oint_{|z|=r}\frac{2dz}{z^{3j+k+9}}+\oint_{|z|=r}\frac{dz}{z^{3j+k+7}}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,-k/3-8/3}+\delta_{j,-k/3-2}\right).$$

Si ha che tutti i coefficienti con indice maggiore di -6 sono nulli, perché i secondi coefficienti dei simboli delta di Kronecker sono minori di zero, mentre il primo, cioè j per entrambe, può assumere solo valori maggiori o uguali allo zero. Calcoliamo alcuni coefficienti

$$\begin{aligned}
C_{-\infty}&=0,\\
\cdots&=\cdots,\\
C_{-5}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,5/3-8/3}+\delta_{j,5/3-2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,-1}+\delta_{j,1/3}\right)=0,\\
C_{-6}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,6/3-8/3}+\delta_{j,6/3-2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,-2/3}+\delta_{j,0}\right)=1,\\
C_{-7}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,7/3-8/3}+\delta_{j,7/3-2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,-1/3}+\delta_{j,1/3}\right)=0,\\
C_{-8}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,8/3-8/3}+\delta_{j,8/3-2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,0}+\delta_{j,2/3}\right)=2,\\
C_{-9}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,9/3-8/3}+\delta_{j,9/3-2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,1/3}+\delta_{j,1}\right)=-1,\\
C_{-10}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,10/3-8/3}+\delta_{j,10/3-2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,2/3}+\delta_{j,4/3}\right)=0,\\
C_{-11}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,11/3-8/3}+\delta_{j,11/3-2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,1}+\delta_{j,5/3}\right)=-2,\\
C_{-12}&=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,12/3-8/3}+\delta_{j,12/3-2}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(2\delta_{j,4/3}+\delta_{j,2}\right)=1,\\
\cdots&=\cdots.
\end{aligned}$$

I simboli delta di Kronecker della somma non possono essere contemporaneamente diversi da zero, quindi i coefficienti di Laurent non nulli possano assumere solo i quattro valori: ±1, ±2.

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga l'espansione di Magnus Gustaf Mittag-Leffler della funzione

$$力(z)=\frac{d^2\ln(\Gamma(z))}{dz^2},$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione Gamma di Leonhard Euler.
(Il carattere cinese 力 si pronuncia *lì* e significa "forza".)

Soluzione del terzo problema

La funzione Gamma di Leonhard Euler è meromorfa ha un'infinità di poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = -k\}_{k=0}^{\infty}$ e non ha zeri. È nota l'espansione di Weierstrass della funzione inversa $1/\Gamma(z)$, che, poiché la funzione $\Gamma(z)$ non ha zeri, è una funzione intera, si ha

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k},$$

dove γ è la costante di Euler-Mascheroni e vale

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \simeq 0,5772.$$

Dall'espansione di Weirstrass si ottiene direttamente quella di Mittag-Leffler per la derivata logaritmica seconda. Infatti, il logaritmo naturale di ambo i membri dell'espressione di $1/\Gamma(z)$ dà l'identità

$$\ln\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right) = -\ln(\Gamma(z)) = \ln(z) + \gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - \frac{z}{k} \right],$$

da cui

$$\ln(\Gamma(z)) = -\ln(z) - \gamma z - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - \frac{z}{k} \right].$$

Derivando due volte ambo i membri si ottiene

$$\frac{d^2 \ln(\Gamma(z))}{dz^2} = -\frac{d^2}{dz^2} \left\{ \ln(z) + \gamma z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{z}{k}\right) - \frac{z}{k} \right] \right\} = -\frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right] \right\}$$
$$\frac{d^2 \ln(\Gamma(z))}{dz^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2},$$

possiamo inserire il polo doppio $1/z^2$ nella somma includendo il termine con $k = 0$.
In definitiva, lo sviluppo di Mittag-Leffler richiesto è

$$力(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Indicando con $\hat{R}_\lambda(\hat{A})$ l'operatore risolvente dell'operatore $\hat{A}$, cioè $\hat{R}_\lambda(\hat{A}) = \left(\lambda \hat{I} - \hat{A}\right)^{-1}$, si dimostri che per ogni operatore regolare $\hat{A}$ vale l'identità

$$\hat{R}_\lambda\left(\hat{A}^{-1}\right) = -\lambda^{-1} \hat{A} \hat{R}_{\lambda^{-1}}\left(\hat{A}\right).$$

Si verifichi l'identità calcolando esplicitamente le matrici che ne rappresentano i due membri, nel caso in cui l'operatore $\hat{A}$ sia definito in uno spazio di Hilbert a tre dimensioni e sia a rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quarto problema

L'operatore risolvente dell'operatore $\hat{A}^{-1}$ è definito come

$$\hat{R}_\lambda\left(\hat{A}^{-1}\right) = \left(\lambda \hat{I} - \hat{A}^{-1}\right)^{-1}.$$

Ponendo $\hat{I} = \hat{A}\hat{A}^{-1}$ nella definizione precedente e si ha

$$\hat{R}_\lambda\left(\hat{A}^{-1}\right) = \left(\lambda\hat{I} - \hat{A}^{-1}\right)^{-1} = \left(\lambda\hat{A}\hat{A}^{-1} - \hat{A}^{-1}\right)^{-1} = \left[\left(\lambda\hat{A} - \hat{I}\right)\hat{A}^{-1}\right]^{-1},$$

mettiamo in evidenza lo scalare λ e cambiamo segno

$$\hat{R}_\lambda\left(\hat{A}^{-1}\right) = \left[\left(\lambda\hat{A} - \hat{I}\right)\hat{A}^{-1}\right]^{-1} = \left[\lambda\left(\hat{A} - \lambda^{-1}\hat{I}\right)\hat{A}^{-1}\right]^{-1} = -\lambda^{-1}\left[\left(\lambda^{-1}\hat{I} - \hat{A}\right)\hat{A}^{-1}\right]^{-1},$$

infine, poiché l'inverso del prodotto di due operatori regolari coincide con il prodotto degli inversi in ordine invertito, otteniamo

$$\hat{R}_\lambda\left(\hat{A}^{-1}\right) = -\lambda^{-1}\left[\left(\lambda^{-1}\hat{I} - \hat{A}\right)\hat{A}^{-1}\right]^{-1} = -\lambda^{-1}\left(\hat{A}^{-1}\right)^{-1}\left(\lambda^{-1}\hat{I} - \hat{A}\right)^{-1}.$$

Il primo operatore dell'ultimo membro è semplicemente $\hat{A}$, mentre il secondo è l'operatore risolvente dell'operatore $\hat{A}$ in λ^{-1}, ovvero $\hat{R}_{\lambda^{-1}}\left(\hat{A}\right)$, ne consegue

$$\hat{R}_\lambda\left(\hat{A}^{-1}\right) = -\lambda^{-1}\left(\hat{A}^{-1}\right)^{-1}\left(\lambda^{-1}\hat{I} - \hat{A}\right)^{-1} = -\lambda^{-1}\hat{A}\hat{R}_{\lambda^{-1}}\left(\hat{A}\right),$$

che è l'identità cercata.
Calcoliamo gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ nel caso in esame, ovvero quando lo stesso operatore sia rappresentato dalla matrice 3×3 A data. Risolviamo l'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det(\eta I - A) &= 0 \\
\begin{pmatrix} \eta - 1 & -1 & -2 \\ -1 & \eta + 1 & 0 \\ 1 & -1 & \eta - 1 \end{pmatrix} &= 0 \\
(\eta - 1)^2(\eta + 1) + (1 - \eta) - 2(1 - \eta - 1) &= 0 \\
(\eta - 1)^2(\eta + 1) + 1 + \eta &= 0 \\
\left[(\eta - 1)^2 + 1\right](\eta + 1) &= 0,
\end{aligned}$$

gli zeri, e quindi gli autovalori, sono

$$\eta_1 = -1, \qquad \eta_{2,3} = 1 \pm i.$$

Le rappresentazioni degli autovettori $|e_k\rangle$, con $k = 1, 2, 3$, si ottengono come soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} \eta_k - 1 & -1 & -2 \\ -1 & \eta_k + 1 & 0 \\ 1 & -1 & \eta_k - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1_{(k)} \\ e^2_{(k)} \\ e^3_{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

dove $e^j_{(k)}$ è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore. Il primo autovettore, con autovalore $\eta_1 = -1$, ha $e^1_{(1)} = 0$, come si evince dalla seconda equazione, e $e^3_{(1)} = -e^2_{(1)}/2$. Normalizzando all'unità si ha

$$|e_1\rangle \hookleftarrow e_1 = \frac{1}{|e^2_{(1)}|\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2e^2_{(1)} \\ -e^2_{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dove si è posto, senza perdita di generalità, $e^2_{(1)} = 1$. Il secondo e terzo hanno rappresentazioni mutuamente complesse coniugate, poiché gli autovalori sono $\eta_3 = \eta_2^*$.
I due sistemi omogenei sono

$$\begin{pmatrix} \pm i & -1 & -2 \\ -1 & 2 \pm i & 0 \\ 1 & -1 & \pm i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^1_{(2,3)} \\ e^2_{(2,3)} \\ e^3_{(2,3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

in funzione di $e^1_{(2)} = e^1_{(3)} = e \neq 0$ si hanno

$$e^2_{(2,3)} = \frac{e}{2 \pm i} = e\frac{2 \mp i}{5}, \qquad e^3_{(2,3)} = \frac{\pm ie - e^2_{(2,3)}}{2} = e\frac{\pm i - 1/(2 \pm i)}{2} = e\frac{\pm i - 1}{2 \pm i} = e\frac{-1 \pm 3i}{5},$$

da cui, posto $e=1$ e normalizzando all'unità,

$$e_{2,3}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5\\ 2\mp i\\ -1\pm 3i\end{pmatrix}.$$

I tre autovettori sono linearmente indipendenti pur non essendo ortogonali. L'indipendenza lineare si deduce verificando che il determinate della matrice avente come colonne (ovvero righe) gli elementi degli autovettori sia non nullo, infatti

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 0 & 5/4 & 5/4\\ 2/\sqrt{5} & (2-i)/4 & (2+i)/4\\ -1/\sqrt{5} & (-1+3i)/4 & (-1-3i)/4\end{pmatrix} &= \frac{5}{4}\left[-\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{-1-3i}{4}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2+i}{4}+\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{-1+3i}{4}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2-i}{4}\right]\\ &= \frac{5}{4}\left[\frac{3i}{\sqrt{5}}-\frac{i}{2\sqrt{5}}\right]=\frac{5i\sqrt{5}}{8}\neq 0\,.\end{aligned}$$

L'operatore è quindi diagonalizzabile, esiste cioè una matrice regolare R tale che

$$A_d=\mathrm{diag}\,(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=R^{-1}AR\,.$$

Si ha, inoltre, che la stessa matrice R diagonalizza anche gli operatori risolventi $\hat{R}_\lambda\left(\hat{A}^{-1}\right)$ e $\hat{R}_{\lambda^{-1}}\left(\hat{A}\right)$

$$\begin{aligned}\left(R_\lambda\left(A^{-1}\right)\right)_d &= \left(\left(\lambda I-A^{-1}\right)^{-1}\right)_d=R^{-1}R_\lambda\left(A^{-1}\right)R=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda-1/\eta_1},\frac{1}{\lambda-1/\eta_2},\frac{1}{\lambda-1/\eta_3}\right)\\ &= \mathrm{diag}\left(\frac{\eta_1}{\lambda\eta_1-1},\frac{\eta_2}{\lambda\eta_2-1},\frac{\eta_3}{\lambda\eta_3-1}\right),\\ \left(R_{\lambda^{-1}}\left(A\right)\right)_d &= \left(\left(\lambda^{-1}I-A\right)^{-1}\right)_d=R^{-1}R_{\lambda^{-1}}\left(A\right)R=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda^{-1}-\eta_1},\frac{1}{\lambda^{-1}-\eta_2},\frac{1}{\lambda^{-1}-\eta_3}\right)\\ &= -\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda}{\lambda\eta_1-1},\frac{\lambda}{\lambda\eta_2-1},\frac{\lambda}{\lambda\eta_3-1}\right).\end{aligned}$$

Infine, la relazione cercata in forma matriciale e, in particolare, nella rappresentazione diagonale è

$$\begin{aligned}\left(R_\lambda\left(A^{-1}\right)\right)_d &= -\lambda^{-1}\left(AR_{\lambda^{-1}}\left(A\right)\right)_d=-\lambda^{-1}A_d\left(R_{\lambda^{-1}}\left(A\right)\right)_d\\ \mathrm{diag}\left(\frac{\eta_1}{\lambda\eta_1-1},\frac{\eta_2}{\lambda\eta_2-1},\frac{\eta_3}{\lambda\eta_3-1}\right) &= -\frac{1}{\lambda}\mathrm{diag}\,(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\left(-\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda}{\lambda\eta_1-1},\frac{\lambda}{\lambda\eta_2-1},\frac{\lambda}{\lambda\eta_3-1}\right)\right)\\ &= \mathrm{diag}\,(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda\eta_1-1},\frac{1}{\lambda\eta_2-1},\frac{1}{\lambda\eta_3-1}\right)\\ &= \mathrm{diag}\left(\frac{\eta_1}{\lambda\eta_1-1},\frac{\eta_2}{\lambda\eta_2-1},\frac{\eta_3}{\lambda\eta_3-1}\right).\end{aligned}$$

L'identità è stata verificata esplicitamente. È importante sottolineare che l'identità è invariante, ovvero non dipende dalla rappresentazione, quindi la verifica rispetto alla sola rappresentazione diagonale è generale e quindi sufficiente.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la funzione $f(x)$ che verifica l'identità

$$f''(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-x')g(x')dx'+g(x)\,,$$

con

$$g(x)=\frac{e^{-\sqrt{2}|x|}}{2\sqrt{2}}\,.$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Facendo la trasformata di Fourier di ambo i membri si ottiene un'equazione lineare per la trasformata di Fourier della funzione incognita, che indichiamo con $\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k[f]$,

$$(ik)^2\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k) + \tilde{g}(k) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}(k) = \frac{\tilde{g}(k)}{-k^2 - \sqrt{2\pi}\tilde{g}(k)} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2/\left(\sqrt{2\pi}\tilde{g}(k)\right)+1}\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione $g(x)$, che, parimenti a quanto fatto per la funzione $f(x)$, indichiamo con $\tilde{g}(k) = \mathscr{F}_k[g]$, vale

$$\begin{aligned}\tilde{g}(k) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2}|x|-ikx}dx = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(\sqrt{2}-ik)x}dx + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{(-\sqrt{2}-ik)x}dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-ik} + \frac{-1}{-\sqrt{2}-ik}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{2\sqrt{2}}{2+k^2}\,,\end{aligned}$$

ovvero

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2+k^2}\,.$$

Usiamo questo risultato nell'espressione della trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ e si ha

$$\tilde{f}(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2/\left(\sqrt{2\pi}\tilde{g}(k)\right)+1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{k^2(2+k^2)+1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(k^2+1)^2}\,.$$

L'anti-trasformata di Fourier dà la soluzione, infatti

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{f}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)e^{ikx}dk = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{(k^2+1)^2}dk = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{(k+i)^2(k-i)^2}dk \\ &= -\frac{1}{2\pi}\begin{cases} 2i\pi\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{ikx}}{(k+i)^2(k-i)^2}, k=i\right] = 2i\pi\dfrac{d}{dk}\dfrac{e^{ikx}}{(k+i)^2}\Big|_{k=i} = 2\pi\dfrac{x+1}{4}e^{-x} & x>0 \\ -2i\pi\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{ikx}}{(k+i)^2(k-i)^2}, k=-i\right] = -2i\pi\dfrac{d}{dk}\dfrac{e^{ikx}}{(k-i)^2}\Big|_{k=-i} = 2\pi\dfrac{-x+1}{4}e^{x} & x<0\end{cases},\end{aligned}$$

che può essere espressa con la legge unica

$$f(x) = -\frac{|x|+1}{4}e^{-|x|}\,.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Gli insiemi degli autovettori e autovalori dell'operatore normale $\hat{Q}$, definito in uno spazio di Hilbert a quattro dimensioni E_4, sono, rispettivamente, $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$ e $\{\mu_k\}_{k=1}^4 \subset \mathbb{C}$, ovvero si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{Q}|u_k\rangle = \mu_k|u_k\rangle\,, \qquad k = 1,2,3,4\,.$$

Rispetto alla base canonica ortonormale, i primi tre autovettori hanno le rappresentazioni

$$|u_1\rangle \hookleftarrow u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad |u_2\rangle \hookleftarrow u_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \qquad |u_3\rangle \hookleftarrow u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Si determinino, rispetto alla stessa base canonica ortonormale, le rappresentazioni matriciali del quarto autovettore $|u_4\rangle$ e quindi dell'operatore $\hat{Q}$, sapendo che $\hat{Q}^4 = \hat{I}$ e che le fasi degli autovalori, nella determinazione principale $[0, 2\pi)$, sono ordinate come: $0 \le \arg(\mu_1) < \arg(\mu_2) < \arg(\mu_3) < \arg(\mu_4) < 2\pi$.

Soluzione del sesto Problema

L'operatore $\hat{Q}$ è normale, quindi gli autovettori sono ortogonali. Il quarto, non dato dal problema, si ottiene dalle condizioni di ortogonalità: $\langle u_j|u_4\rangle = 0$, $\forall\, j \in \{1,2,3\}$. Indicando con $u^k_{(4)}$ la k-esima componente contro-variante del quarto autovettore, le tre condizioni di ortogonalità danno le tre equazioni

$$\begin{array}{l} 0 = \langle u_1|u_4\rangle = u^1_{(4)} + u^2_{(4)} + u^3_{(4)} + u^4_{(4)} \\ 0 = \langle u_1|u_4\rangle = u^1_{(4)} - u^2_{(4)} + u^3_{(4)} - u^4_{(4)} \\ 0 = \langle u_1|u_4\rangle = u^1_{(4)} + u^2_{(4)} - u^3_{(4)} - u^4_{(4)} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} 0 = u^1_{(4)} + u^3_{(4)} \\ 0 = u^1_{(4)} - u^4_{(4)} \end{array} \; ,$$

da cui, posto $u^1_{(4)} = 1$, si hanno: $u^3_{(4)} = -1$, $u^4_{(4)} = 1$ e $u^2_{(4)} = -1$, quindi

$$|u_4\rangle \hookleftarrow u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La condizione $\hat{Q}^4 = \hat{I}$ definisce lo spettro discreto dell'operatore, infatti, essendo diagonalizzabile, nella rappresentazione diagonale, che si ottiene rispetto alla base degli autovettori, si ha

$$\hat{Q}^4 = \hat{I} \overset{u}{\hookleftarrow} Q^4_d = I \qquad \Rightarrow \qquad Q^4_d = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)^4 = \mathrm{diag}\left(\mu_1^4, \mu_2^4, \mu_3^4, \mu_4^4\right) = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$$

ne consegue che per gli autovalori vale l'equazione

$$\mu_k^4 = 1\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,3,4\}\,,$$

ovvero i quattro autovalori sono le quattro radice quarte dell'unità, cioè

$$\mu_k = e^{2i\pi(k-1)/4}\,, \qquad k = 1,2,3,4\,.$$

In questa forma l'ordine è quello richiesto poiché, nella determinazione principale $[0, 2\pi)$, avremo

$$0 \le \arg(\mu_1) = 0 < \arg(\mu_2) = \frac{\pi}{2} < \arg(\mu_3) = \pi < \arg(\mu_2) = \frac{3\pi}{2} < 2\pi\,.$$

L'operatore si ottiene con la rappresentazione spettrale

$$\hat{Q} = \sum_{k=1}^{4} \mu_k \hat{P}_k\,,$$

dove $\left\{\hat{P}_k\right\}_{k=1}^4$ è l'insieme dei proiettori ortogonali, che coprono tutto lo spazio e che si ottengono dagli autovettori normalizzati come

$$\hat{P}_k = \frac{|u_k\rangle\langle u_k|}{\langle u_k|u_k\rangle}\,, \qquad k = 1,2,3,4\,.$$

Indicando con $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$ la base canonica ortonormale, l'elemento (m, j) del k-esimo proiettore è

$$(P_k)^m_j = \langle e_m|\hat{P}_k|e_j\rangle = \frac{\langle e_m|u_k\rangle\langle u_k|e_j\rangle}{\langle u_k|u_k\rangle} = \frac{u^m_{(k)} u^{j*}_{(k)}}{4} = \frac{u^m_{(k)} u^j_{(k)}}{4}\,, \qquad k, m, j \in \{1,2,3,4\}\,,$$

l'ultima identità segue dalla realtà delle componenti dei quattro autovettori. Le matrici che rappresentano i proiettori sono

$$P_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che si tratta di matrici che rappresentano dei proiettori, infatti sono matrici hermitiane e idempotenti, sono ortogonali e coprono tutto lo spazio, ovvero

$$\sum_{k=1}^{4} P_k = I \,.$$

La matrice che rappresenta l'operatore $\hat{Q}$ rispetto alla base canonica ortonormale è

$$\hat{Q} \hookleftarrow Q = \sum_{k=1}^{4} \mu_k P_k = \frac{\mu_1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\mu_2}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\mu_3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\mu_4}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\pi/4} & e^{7i\pi/4} \\ 0 & 0 & e^{7i\pi/4} & e^{i\pi/4} \\ e^{i\pi/4} & e^{7i\pi/4} & 0 & 0 \\ e^{7i\pi/4} & e^{i\pi/4} & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$