2.34.7 Completezza e chiusura

Un sistema $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$ di funzioni linearmente indipendenti si dice **chiuso** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ le uniche funzioni ortogonali a tutte le $e_k(x)$ del sistema stesso sono le funzioni QDN.
Dimostriamo l'equivalenza tra completezza e chiusura, ovvero completezza $\Leftrightarrow$ chiusura.
Dim.: ($\Longrightarrow$) Assumiamo che il sistema sia completo e facciamo vedere che una funzione ortogonale a tutte le funzioni del sistema stesso è necessariamente una funzione QDN. A partire dal sistema $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ di funzioni linearmente indipendenti, costruiamo, con il metodo di Gram-Schmidt, il sistema ON $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Sia $q(x)$ una funzione di $L_p^2(E)$ tale che

$$(u_k, q) = 0\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

allora, usando l'equazione di Parseval per la funzione $q(x)$, si ha che il prodotto scalare della funzione per sé stessa è nullo essendo nulli tutti i coefficienti di Fourier, ovvero

$$(q,q) = \sum_{k=1}^{\infty} |(u_k, q)|^2 = 0\,.$$

Ma, considerando il prodotto scalare in forma integrale, si ha

$$0 = (q,q) = \int_E |q(x)|^2 p(x) dx\,,$$

che definisce la funzione $q(x)$ come una funzione QDN.
Dim.: ($\Longleftarrow$) Per dimostrare che la chiusura implica la completezza si sfrutta la **transitività della completezza** stessa, ovvero il fatto che, dato un sistema completo $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$, ogni altro sistema che si ottiene attraverso una trasformazione invertibile di tale sistema completo è esso stesso completo.
Consideriamo un sistema $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ che sia ON e chiuso in $L_p^2(E)$. La richiesta di ortonormalità non comporta perdita di generalità, in quanto il metodo di Gram-Schmidt rappresenta una trasformazione invertibile che conserva la completezza. Per una generica funzione $f(x) \in L_p^2(E)$ si ha, rispetto al sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, la serie formale di Fourier

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, f) e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f^k e_k(x)\,,$$

inoltre, usando la disuguaglianza di Bessel, si ha che la serie dei moduli quadri dei coefficinti è convergente, infatti

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|f^k\right|^2 \le (f,f) < \infty\,.$$

Per il teorema di Fischer-Riesz, allora, deve esistere una funzione $\tilde{f}(x) \in L_p^2(E)$ che ha come coefficienti di Fourier rispetto al sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, proprio gli scalari dell'insieme $\left\{f^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, cioè

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} f^k e_k(x) = \tilde{f}(x).$$

Ovviamente, tale sistema ON è completo rispetto alla funzione $\tilde{f}(x)$ per costruzione. Le due funzioni $f(x)$ e $\tilde{f}(x)$ coincidono in media. Infatti, detta $d(x) = \tilde{f}(x) - f(x)$ la loro differenza, si dimostra che questa è una funzione QDN. Lo verifichiamo ricordando che, per ipotesi, il sistema

$\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ è chiuso, quindi le uniche funzioni ortogonali a tutte le sue funzioni sono appunto le funzioni QDN. I coefficienti di Fourier della funzione differenza $d(x)$ sono tutti nulli, infatti

$$(e_k, d) = (e_k, \tilde{f}) - (e_k, f) = \left(e_k, \sum_{j=1}^{\infty} f^j e_j \right) - f^k = \sum_{j=1}^{\infty} f^j \delta_{kj} - f^k = 0\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

quindi la funzione $d(x)$, essendo ortogonale a tutte le funzioni di un sistema chiuso è una funzione QDN. Ne consegue, infine, che

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} f^k e_k(x) = f(x)\,,$$

e, per l'arbitrarietà della $f(x)$, si ha la completezza del sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$.

2.34.8 Sistemi completi in L^2

L'insieme delle funzioni trigonometriche più la funzione costante

$$\{1, \mathrm{sen}(x), \cos(x), \mathrm{sen}(2x), \cos(2x), \ldots, \mathrm{sen}(nx), \cos(nx), \ldots\}\,,$$

definite nell'intervallo simmetrico $(-\pi, \pi)$, con la funzione peso $p(x) = 1$, rappresenta un sistema ON in $L^2(-\pi, \pi)$. Verifichiamo l'ortogonalità, considerando inizialmente i prodotti misti seno-coseno, che, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, sono tutti nulli, infatti

$$\begin{aligned}
(\mathrm{sen}(nx), \cos(mx)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(nx)\cos(mx)dx \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} [\mathrm{sen}(nx+mx) + \mathrm{sen}(nx-mx)]\,dx & m \neq n \\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(2mx)dx & m = n \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos(nx+mx)}{n+m} + \dfrac{\cos(nx-mx)}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & m \neq n \\[2ex] -\dfrac{1}{4m}[\cos(2mx)]_{-\pi}^{\pi} = 0 & m = n \end{cases}.
\end{aligned}$$

Per i prodotti seno-seno e coseno-coseno, si hanno i seguenti risultati, $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{sen}(nx), \mathrm{sen}(mx)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(nx)\mathrm{sen}(mx)dx \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big[\cos(mx-nx) - \cos(mx+nx)\big]dx = 0 & m \neq n \\[2ex] \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}^2(mx)dx = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big[1 - \cos(2mx)\big]dx = \pi & m = n \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\cos(nx), \cos(mx)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big[\cos(mx-nx) + \cos(mx+nx)\big]dx = 0 & m \neq n \\[2ex] \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big[1 + \cos(2mx)\big]dx = \pi & m = n \end{cases},
\end{aligned}$$

sono nulli nei casi $m \neq n$, mentre sono uguali a π se $m = n$. Infine, è immediato verificare che i prodotti con la funzione costante delle funzioni seno e coseno sono nulli in virtù dell'annullamento degli integrali di suddette funzioni su intervalli contenenti un numero intero di periodi. Includendo le opportune normalizzazioni, cosicché il prodotto scalare di ciascuna funzione per sé stessa sia unitario, si ottiene il sistema ON

$$\mathscr{T} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\text{sen}(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}.$$

Verifichiamo la completezza di tale sistema ON, provandone la chiusura, in quanto, come già dimostrato, sono proprietà equivalenti.
Sia $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$ una funzione ortogonale a tutte le funzioni del sistema $\mathscr{T}$, sarà quindi ortogonale anche a un qualunque **polinomio trigonometrico** $P(x) \in L^2(-\pi, \pi)$, dato da una generica combinazione delle funzioni del sistema ON $\mathscr{T}$.
Consideriamo due casi.

1. La funzione $f(x)$ è **continua**, allora, l'ortogonalità implica che sia una funzione QDN, cioè

$$\left. \begin{array}{l} 0 = (P, f) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P^*(x) f(x) dx \\ \forall P(x) \in L^2(-\pi, \pi) \end{array} \right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \forall x \in (-\pi, \pi) \end{array} \right. .$$

   Infatti, se la $f(x)$ non fosse nulla nell'intervallo $(-\pi, \pi)$, esisterebbe un punto $x_0 \in (-\pi, \pi)$, tale che $f(x_0) = \phi \neq 0$ e assumiamo, senza perdita di generalità, che $\phi > 0$. Se questo valore fosse strettamente negativo, procederemmo con la stessa dimostrazione per la funzione $-f(x)$.
   Dalla condizione di continuità segue che la funzione $f(x)$ è positiva in un intorno di x_0 e quindi si ha anche che $\exists\, \delta > 0$, tale che

$$f(x) > \frac{\phi}{2}, \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

   Usando questi risultati, defiiamo il polinomio trigonometrico

$$p(x) = 1 - \cos(\delta) + \cos(x - x_0),$$

   e osserviamo che esso stesso, così come ogni sua potenza $n \in \mathbb{N}$ verifica le seguenti condizioni

$$\left\{ \begin{array}{ll} p(x)^n > 1 & |x - x_0| < \delta \\ p(x)^n = 1 & |x - x_0| = \delta \\ p(x)^n < 1 & |x - x_0| > \delta \end{array} \right. .$$

   Per ipotesi si ha che la funzione $f(x)$ è ortogonale a tutti i polinomi trigonometrici e quindi sarà ortogonale sia a $p(x)$, che a tutte le sue potenze intere, che sono ancora dei polinomi trigonometrici, cioè

$$\int_{-\pi}^{\pi} p^n(x) f(x) dx = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Dividiamo l'intervallo d'integrazione considerando l'intorno del punto x_0 in cui i polinomi trigonometrici sono strettamente maggiori dell'unità e la funzione $f(x)$ è strettamente maggiore di zero, ovvero

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} p^n(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{x_0 - \delta} p^n(x) f(x) dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} p^n(x) f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^{\pi} p^n(x) f(x) dx,$$

per il contributo di tale intorno, che risulta non negativo, si ottiene la seguente minorazione

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p^n(x) f(x) dx &= -\left(\int_{-\pi}^{x_0-\delta} p^n(x) f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} p^n(x) f(x) dx \right) \\
&= \left| \int_{-\pi}^{x_0-\delta} p^n(x) f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} p^n(x) f(x) dx \right| \\
&\leq \left| \int_{-\pi}^{x_0-\delta} p^n(x) f(x) dx \right| + \left| \int_{x_0+\delta}^{\pi} p^n(x) f(x) dx \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |p^n(x) f(x)|\, dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} |p^n(x) f(x)|\, dx \\
&< \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |f(x)|\, dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} |f(x)|\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty,
\end{aligned}
$$

l'ultima disuguaglianza segue dalla fatto che la funzione $f(x)$ sia a quadrato sommabile in $(-\pi,\pi)$. Questa proprietà fa sì che anche l'integrale del prodotto $p^n(x)f(x)$ sull'intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ sia limitato per ogni valore della potenza $n \in \mathbb{N}$.
D'altro canto, indicando con μ il minimo della funzione $p(x)$ in $(x_0-\delta/2, x_0+\delta/2)$, si ha $\mu > 1$, infatti tutti i polinomi trigonometrici sono uguali ad uno nei punti $x = x_0 \pm \delta$ e sono strettamente maggiori dell'unità nell'intervallo aperto $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ che contiene il chiuso $[x_0-\delta/2, x_0+\delta/2]$. Per l'integrale sull'intervallo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, che è maggiore o uguale a quello sull'intervallo $(x_0-\delta/2, x_0+\delta/2)$, in quanto la funzione integranda è non negativa, si ha quindi la minorazione

$$
\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p^n(x) f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} p^n(x) f(x) dx \geq \delta\, \frac{\phi}{2}\, \mu^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,
$$

che risulta divergente al divergere della potenza n, ciò è in contrasto con la limitatezza ottenuta in precedenza. L'assurdo è conseguenza dell'assunto secondo cui la funzione continua $f(x)$ non sia identicamente nulla, per cui si ha: $f(x) = 0$, $\forall x \in (-\pi,\pi)$.

2. Consideriamo una funzione $f(x)$ **non continua** e definiamo la funzione

$$
F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(x')dx',
$$

che, per costruzione, è invece continua e inoltre, come conseguenza della definizione e dell'ortogonalità della funzione $f(x)$ ad ogni polinomio trigonometrico e in particolare a quello unitario, si annulla agli estremi dell'intervallo, ovvero: $F(\pm\pi) = 0$. Infatti $F(\pi)$ non è altro che il prodotto scalare $(1, f) = 0$. Per ipotesi si ha

$$
0 = \int_{-\pi}^{\pi} P(x) f(x) dx, \qquad \forall P(x).
$$

Integriamo per parti e usando la $F(x)$ come integranda della $f(x)$, otteniamo

$$
0 = \underbrace{P(x)F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} P'(x)F(x)dx \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} P'(x)F(x)dx = 0.
$$

Se ogni polinomio trigonometrico potesse essere ottenuto come derivata prima di un altro polinomio trigonometrico, allora l'ultima identità implicherebbe, per quanto dimostrato

nel caso precedente per funzioni continue, che $F(x) = 0$, $\forall x \in (-\pi, \pi)$ e che, quindi, la $f(x)$ sia una funzione QDN.
È però immediato osservare che l'affermazione secondo cui un generico polinomio trigonometrico possa essere ottenuto come la derivata prima di un altro opportuno polinomio sia vera per tutti i polinomi ad eccezione di quello costante. Ne consegue che questo caso debba essere discusso esplicitamente. Definiamo, a tal proposito, la funzione

$$G(x) = F(x) - C\,,$$

dove la costante C è determinata in modo che si annulli l'integrale della stessa funzione $G(x)$ sull'intervallo $(-\pi, \pi)$, ovvero

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_{-\pi}^{\pi} G(x)dx = 0\,.$$

Poiché, sia la funzione $F(x)$, che la funzione constante sono ortogonali a tutti i polinomi trigonometrici non costanti, la funzione $G(x)$ risulta ortogonale a tutti i polinomi trigonometrici, compresa la costante. Tale funzione è continua in quanto somma di due funzioni continue ed è quindi identicamente nulla in $(-\pi, \pi)$. In altri termini, la funzione $F(x)$ è costante ed uguale a C in tutto l'intervallo. Per costruzione avevamo però che $F(\pm\pi) = 0$ da cui, essendo la funzione continua, si ottiene che $F(x) = 0$, $\forall x \in (-\pi, \pi)$. Possiamo ora affermare che la funzione non continua $f(x)$ è una funzione QDN in $(-\pi, \pi)$.

Abbiamo quindi dimostrato che **il sistema ON delle funzioni trigonometriche, $\mathscr{T}$, è completo in $L^2(-\pi, \pi)$.**
Assieme al sistema delle funzioni trigonometriche $\mathscr{T}$ possiamo considerare quello della "fasi pure" o semplicemente "fasi" $\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Tale sistema è **completo** in $L^2(-\pi, \pi)$, infatti, anche in questo caso si può dimostrare la chiusura e quindi la completezza del sistema, usando quella per le funzioni trigonometriche attraverso le relazioni

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}\,, \qquad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\,, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Se esistesse una funzione non QDN ortogonale a tutte le fasi avremmo che tale funzione sarebbe necessariamente ortogonale a tutti i polmoni trigonometrici, ma questo è assurdo, poiché il sistema di tali polinomi è chiuso. Infine, si osserva come il sistema della fasi sia ortogonale e quindi possa essere normalizzato introducendo la costante reale $1/\mathscr{N}$,

$$\left(\frac{e^{ikx}}{\mathscr{N}}, \frac{e^{imx}}{\mathscr{N}}\right) = \frac{1}{\mathscr{N}^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(m-k)}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathscr{N}^2}\left.\dfrac{e^{ix(m-k)}}{i(m-k)}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 & m \neq k \\[2ex] \dfrac{2\pi}{\mathscr{N}^2} = 1 & m = k \end{cases}\,,$$

da cui $\mathscr{N} = \sqrt{2\pi}$.
Si è quindi ottenuto che il sistema delle fasi

$$\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}\,,$$

è ON e completo in $L^2(-\pi, \pi)$.

2.34.9 Serie trigonometriche

Abbiamo dimostrato che il sistema delle funzioni trigonometriche in $(-\pi,\pi)$ è ON e completo, ciò significa che: $\forall f(x) \in L^2(-\pi,\pi)$ si ha la serie formale di Fourier

$$f(x) \sim \sum_k f^k e_k(x)\,, \qquad f^k = (e_k, f)\,,$$

dove le funzioni $e_k(x)$ appartengono all'insieme $\mathscr{T}$. La forma che si usa abitualmente è la cosiddetta **serie trigonometrica di Fourier**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right],$$

dove i coefficienti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ si ottengono dai prodotti scalari

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x)dx\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots\,,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x)dx\,, \qquad k = 1,2,3\ldots\,.$$

Poiché il sistema è completo si ha **l'equazione di Parseval**

$$(f,f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi\left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)\right].$$

La serie di Fourier converge in media alla funzione $f(x)$, detta $S_n(x)$ la somma parziale n-esima

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right],$$

si ha

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, S_n(x) = f(x)\,,$$

che equivale al limite numerico

$$\lim_{n\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]\right|^2 dx = 0\,.$$

Se $f(x)$ è una funzione continua in $(-\pi,\pi)$ allora la somma parziale n-esima, $S_n(x)$, della sua serie di Fourier trigonometrica coincide con la funzione stessa in $(2n+1)$ punti di $(-\pi,\pi)$. Infatti la funzione $S_n(x)$ ha $(2n+1)$ coefficienti, a_k, con $k = 0,1,\ldots,n$ e b_k, con $k = 1,2,\ldots,n$.

Teorema di Fejér. (Lipot Fejér, 9 febbraio 1880 - 15 ottobre 1959, Ungheria).
Sia $f(x) \in L(-\pi,\pi)$, una funzione sommabile in $(-\pi,\pi)$, **allora** la sua serie trigonometrica di Fourier è C_1**-sommabile** in ogni punto $x \in (-\pi,\pi)$ in cui esistono i limiti destro e sinistro $f(x^{\pm})$ della $f(x)$, e la somma è pari al valore medio dei due limiti, cioè

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}\,.$$

Nei punti estremi dell'intervallo si ha

$$\bar{f}(\pm\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2}\,.$$

C_1**-sommabilità**. La una serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, si dice C_1-sommabile $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = S\,, \qquad S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\,.$$

Se una serie converge la sua somma coincide la sua somma C_1. La C_1-sommabilità è più generale della convergenza ordinaria.
Come ulteriore conseguenza del teorema di Fejér si ha che, se una serie è C_1-sommabile e il termine n-esimo è $O(1/n)$ al divergere di n **allora** la serie è sommabile in senso ordinario e la somma coincide con il limite di C_1. Ovvero, se la serie trigonometrica di Fourier di una funzione $f(x) \in L(-\pi,\pi)$ ha coefficienti $a_k, b_k = O(1/k)$ per $k \to \infty$ ne consegue che la serie di Fourier converge in senso ordinario alla funzione

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}\,,$$

in ogni punto x in cui è definita ovvero in cui esistono i limiti destro e sinistro dell $f(x)$.

Esempio dell'onda quadra

Consideriamo la funzione a gradino

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ +1 & x>0 \end{cases}\,,$$

la funzione è a quadrato sommabile in $(-\pi,\pi)$ è quindi sommabile e ha sviluppo in serie trigonometrica di Fourier. La funzione è dispari, ne consegue che nella serie di Fourier ci sono soltanto le funzioni dispari cioè le funzioni seno, in altri termini i coefficienti a_k sono tutti nulli. Infatti si ha

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(kx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}\cos(kx')dx' + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(kx)dx = 0\,. \end{aligned}$$

I coefficienti b_k sono

$$\begin{aligned} b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(kx)dx = -\frac{2}{k\pi}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}\,. \end{aligned}$$

Quindi la serie di Fourier è

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\sin[(2k+1)x] = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1}\,.$$

Il valore di una generica somma n-esima nel punto di discontinuità $x=0$ è zero, ne consegue che la serie di Fourier tende a zero in $x=0$. Tale valore, come previsto dal teorema di Fejér, coincide con la media dei limiti destro $+1$ e sinistro -1. Lo stesso può dirsi per i valori agli estremi $x=\pm\pi$, infatti $f_n(\pm\pi)=0$.

La figura sottostante mostra la somma parziale con $n = 21$ in blu, sovrapposta alla funzione a gradino $f(x)$, in rosso.