

Teorema. Un operatore \hat{A} nello spazio di Hilbert E è compatto se e solo se trasforma successione debolmente convergenti in successioni convergenti.

Dim.: (\Rightarrow) Siano \hat{A} un operatore compatto e $\{|x_k\rangle\}_{k=1}^\infty$ una successione debolmente convergente a $|x\rangle \in E$. Supponiamo, per assurdo che la successione $\{\hat{A}|x_k\rangle\}_{k=1}^\infty$ non tenda al vettore $\hat{A}|x\rangle \in E$, ovvero esistono un $\varepsilon > 0$ ed una sotto-successione $\{|x_{q_k}\rangle\}_{k=1}^\infty$, tali che

$$\|\hat{A}|x_{q_k}\rangle - \hat{A}|x\rangle\| \geq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Il fatto che la successione e quindi anche la sotto-successione $\{|x_{q_k}\rangle\}_{k=1}^\infty$ siano debolmente convergenti implica che $\{|x_{q_k}\rangle\}_{k=1}^\infty$ sia anche limitata e che, quindi, la sua trasformata tramite un operatore compatto deve avere una ulteriore sotto-successione convergente, sia $\{\hat{A}|x_{p_k}\rangle\}_{k=1}^\infty$ tale sotto-successione. In altri termini $\{p_k\}_{k=1}^\infty \subset \{q_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$. Quindi, $\exists |a\rangle \in E$, tale che

$$\hat{A}|x_{p_k}\rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |a\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle b|\hat{A}|x_{p_k}\rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle b|a\rangle, \quad \forall \langle b| \in E^*.$$

D'altro canto, si ha la convergenza debole, ovvero $\forall \langle c| \in E^*$, si ha $\langle c|x_k\rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle c|x\rangle$, scegliendo $\langle c| = \langle b|\hat{A}$, $\forall \langle b| \in E^*$, avremo i limiti

$$\langle b|\hat{A}|x_k\rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle b|\hat{A}|x\rangle, \quad \Longrightarrow \quad \langle b|\hat{A}|x_{p_k}\rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle b|\hat{A}|x\rangle,$$

che, confrontati con il precedente risultato, implicano $|a\rangle = \hat{A}|x\rangle$. Abbiamo concluso che la successione $\{\hat{A}|x_{p_k}\rangle\}_{k=1}^\infty$ converge al vettore $\hat{A}|x\rangle$ in contraddizione con la limitazione di Eq. (2.2), quindi

$$\hat{A}|x_k\rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \hat{A}|x\rangle,$$

come volevasi dimostrare.

Dim.: (\Leftarrow) Avendo per ipotesi che: $\forall \{|x_k\rangle\}_{k=1}^\infty \subset E$ debolmente convergente al vettore $|x\rangle \in E$, si ha $\hat{A}|x_k\rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \hat{A}|x\rangle$, vogliamo dimostrare che \hat{A} è compatto. Ovvero che $\forall \{|y_k\rangle\}_{k=1}^\infty \subset E$ limitata, con $\|y_k\| \leq M < \infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$, la successione $\{\hat{A}|y_k\rangle\}_{k=1}^\infty$ ha una sotto-successione convergente. Sia $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^\infty \subset E$ una successione limitata, ovvero $\exists K \in (0, \infty)$, tale che $\|a_k\| \leq K$, $\forall k \in \mathbb{N}$, allora anche la successione scalare $\{\langle b|a_k\rangle\}_{k=1}^\infty \subset S \subset \mathbb{C}$, $\forall \langle b| \in E^*$, è limitata, infatti, usando la disuguaglianza di Schwartz

$$0 \leq |\langle b|a_k\rangle| \leq \|b\| \|a_k\| \leq \|b\| K \in (0, \infty).$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sotto-successione $\{\langle b|a_{q_k}\rangle\}_{k=1}^\infty \subset \{\langle b|a_k\rangle\}_{k=1}^\infty$ convergente. Ne consegue che la sotto-successione $\{|a_{q_k}\rangle\}_{k=1}^\infty \subset \{|a_k\rangle\}_{k=1}^\infty$ è debolmente convergente e quindi che la sotto-successione $\{\hat{A}|a_{q_k}\rangle\}_{k=1}^\infty$ converge, in quanto, per ipotesi l'operatore \hat{A} trasforma successioni debolmente convergenti in successioni convergenti.

In definitiva, abbiamo ottenuto che: per ogni successione limitata $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^\infty \subset E$, esiste una sotto-successione $\{q_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, tale che la successione $\{\hat{A}|a_{q_k}\rangle\}_{k=1}^\infty$ converge, quindi l'operatore \hat{A} è compatto.

Ogni successione ortonormale è, ovviamente limitata e debolmente convergente al vettore nullo. Infatti, sia $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^\infty$ tale che

$$\langle u_k|u_j\rangle = \delta_{kj}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N},$$

allora, $\forall \langle a | \in E^*$, grazie alla decomposizione $\langle a | = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j*} \langle u_j |$, si ha

$$\langle a | u_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j*} \langle u_j | u_k \rangle = a^{k*} = a_k.$$

In altri termini, la successione numerica $\{\langle a | u_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$ non è altro che la successione delle componenti covarianti (controvarianti complesse coniugate) del vettore $|a\rangle$ rispetto alla base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$. Poiché, in generale,

$$\infty > \|a\|^2 = \langle a | a \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2,$$

la serie dei moduli quadri delle componenti converge e quindi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle a | u_k \rangle = 0.$$

L'ultima identità rappresenta la condizione di convergenza debole della successione ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$. Si quindi il seguente corollario.

Corollario. Un operatore compatto trasforma successioni ortonormali in successioni convergenti al vettore nullo.

Dim.: La dimostrazione segue dal precedente teorema e dal fatto che ogni successione ortonormale è debolmente convergente al vettore nullo.

Dal teorema precedente segue anche che l'operatore inverso di un operatore compatto, quando esiste, non è limitato. Infatti l'inverso trasforma successioni convergenti in successioni non convergenti e questo è sufficiente a definirne la non limitatezza³.

2.27.1 L'operatore risolvente, l'insieme risolvente e lo spettro di un operatore

Come già anticipato, l'equazione operatoriale

$$\hat{A}|u\rangle = \lambda|u\rangle,$$

con \hat{A} operatore limitato, $\hat{A} \in \mathcal{L}(E)$, si chiama **equazione agli autovalori** per l'operatore $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$, $|u\rangle \neq |0\rangle$ è l'**autovettore** di \hat{A} relativo all'**autovalore** $\lambda \in S$, S è il campo scalare sui cui lo spazio vettoriale E_N è definito. Riscriviamo l'equazione nella forma

$$(\lambda \hat{I} - \hat{A})|u\rangle = |0\rangle,$$

Definiamo, qualora esista, l'inverso dell'operatore dipendente da λ , a primo membro, come

$$\hat{A}_\lambda = (\lambda \hat{I} - \hat{A})^{-1},$$

³Sia \hat{A} un operatore limitato, ovvero $\exists M \in (0, \infty)$, tale che: $\|\hat{A}|a\rangle\| \leq M\|a\|$, $\forall |a\rangle \in E$. Ne consegue che $\forall \{|x_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ convergente, anche la successione $\{\hat{A}|x_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Infatti dire che la successione converge equivale a dire che è una successione di Cauchy e quindi: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tale che

$$\| |x_m\rangle - |x_n\rangle \| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq k_0(\varepsilon).$$

Nelle stesse condizioni consideriamo

$$\| \hat{A}|x_m\rangle - \hat{A}|x_n\rangle \| \leq \| \hat{A} \| \| |x_m\rangle - |x_n\rangle \| < M\varepsilon,$$

anche $\{\hat{A}|x_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy e quindi converge. Se un operatore, invece, trasforma successioni convergenti in successioni non convergenti è un operatore **non limitato**.

tale operatore si chiama **risolvente di \hat{A}** .

L'insieme risolvente dell'operatore limitato \hat{A} è definito come

$$\rho(\hat{A}) = \{ \alpha \in \mathbb{C} : \exists \text{limitato } \hat{A}_\alpha = (\alpha I - \hat{A})^{-1} \}.$$

Gli elementi di questo insieme si chiamano anche **punti regolari** dell'operatore \hat{A} .

Si definisce **spettro dell'operatore \hat{A}** l'insieme

$$\sigma(\hat{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \rho(\hat{A}) \},$$

complementare di $\rho(\hat{A})$ in \mathbb{C} . La parte discreta o puntuale, $\sigma_p(\hat{A})$, dello spettro è rappresentata dall'insieme degli **autovalori non nulli** di \hat{A} . In particolare, lo spettro puntuale contiene tutti i valori λ per i quali non esiste l'operatore risolvente, ovvero, se $\lambda \in \sigma_p(\hat{A})$ allora $(I\lambda - \hat{A})$ non è invertibile. I valori di $\sigma(\hat{A})$ non appartenenti allo spettro puntuale rappresentano lo **spettro continuo** $\sigma_c(\hat{A})$. Si ha che $\forall \lambda \in \sigma_c(\hat{A})$, l'operatore $(I\lambda - \hat{A})$ è invertibile quindi esiste il risolvente ma **non è limitato**. In definitiva: $\sigma(\hat{A}) = \sigma_p(\hat{A}) \cup \sigma_c(\hat{A})$.

2.27.2 Soluzione dell'equazione agli autovalori

Al fine di risolvere l'equazione agli autovalori di un operatore $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$, ovvero

$$(\lambda \hat{I} - \hat{A}) |u\rangle = |0\rangle,$$

dobbiamo utilizzare una rappresentazione matriciale e quindi scegliere una base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ dello spazio vettoriale E_N . Gli operatori ed i vettori sono quindi rappresentati da matrici e vettori, cioè:

$$\hat{A} \xleftrightarrow{e} A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_N^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^N & A_2^N & \dots & A_N^N \end{pmatrix}, \quad \hat{I} \xleftrightarrow{e} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad |u\rangle \xleftrightarrow{e} u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix},$$

l'equazione diventa un'identità tra vettori colonna $N \times 1$ il cui k -esimo elemento è

$$(\lambda \delta_j^k - A_j^k) u^j = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Le precedenti rappresentano le N equazioni di un **sistema lineare omogeneo** con matrice dei coefficienti $I\lambda - A$ e vettore delle incognite u . Questo sistema ammette soluzioni non banali solo se

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Questa condizione equivale alla **non invertibilità** della stessa matrice dei coefficienti e quindi alla non esistenza del risolvente. I valori di λ che la verificano rappresentano lo **spettro discreto di \hat{A}** , cioè gli **autovalori** dell'operatore.

Interpretata come un'equazione per la variabile λ , la condizione di annullamento del determinante della matrice dei coefficienti si chiama **equazione caratteristica** o **secolare** dell'operatore \hat{A} .

L'aggettivo "secolare" fu introdotto da Lagrange (Joseph-Louis Lagrange, 25 gennaio 1736 - 10 aprile 1813, Italia) poiché l'equazione da lui ottenuta descriveva, appunto, perturbazioni secolari, ovvero con periodi dell'ordine di centinaia di anni, alle orbite dei pianeti del Sistema Solare.

L'identità: $\det(\lambda I - A) = 0$, rappresenta un'equazione di grado N , dove N è la dimensione dello spazio vettoriale, ed ha quindi N soluzioni. Tali soluzioni sono gli autovalori e risultano indipendenti dalla rappresentazione sono quindi **invarianti** così come il determinante di \hat{A} . Ha senso, quindi, parlare di **autovalori di un operatore**, senza la necessità di specificare la base

usata per calcolarli.

L'equazione è

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda - A_1^1 & -A_2^1 & \dots & -A_N^1 \\ -A_1^2 & \lambda - A_2^2 & \dots & -A_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_1^N & -A_2^N & \dots & \lambda - A_N^N \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^M (\lambda - \lambda_k)^{m_k},$$

le $M \leq N$ soluzioni distinte λ_k , ciascuna con molteplicità $m_k \geq 1$, quindi $\sum_{k=1}^M m_k = N$, rappresentano gli **autovalori** di \hat{A} , ovvero lo spettro discreto dell'operatore. A seconda della molteplicità di ciascun autovalore come soluzione dell'equazione secolare, si hanno le seguenti notazioni.

AE1. Se $m_j > 1$, l'autovalore corrispondente λ_j si dice **degenere di ordine** m_j .

AE2. Se $m_j = 1$, l'autovalore λ_j si dice **non-degenere** o **semplice**.

AE3. Se $m_j = 1, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$, si dice che **non c'è degenerazione** ci sono, cioè, N **autovalori distinti**.

Autovettori

Una volta noto lo spettro discreto, $\{\lambda_k\}_{k=1}^M$, di un operatore $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$, è possibile ottenere anche la rappresentazione, rispetto ad una data base, degli autovettori. In particolare, l'autovettore corrispondente all'autovalore j -esimo si ottiene come soluzione del sistema omogeneo che rappresenta l'equazione per il j -esimo autovalore, cioè

$$(\lambda_j \hat{I} - \hat{A}) |u_{(j)}\rangle = |0\rangle \quad \leftrightarrow \quad (\lambda_j I - A)_m^k u_{(j)}^m = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

La matrice dei coefficienti ha determinate nullo, il rango dipende dall'ordine di degenerazione dell'autovalore e vale $(N - m_j)$, quindi si hanno ∞^{m_j} soluzioni.

In altri termini, gli autovettori relativi ad un autovalore λ_j con ordine di degenerazione m_j generano un sotto-spazio $E_{d_j} \subset E_N$, di dimensione d_j , con $1 \leq d_j \leq m_j$. Tale sotto-spazio avrà dimensione massima $d_j = m_j$, ovvero la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica dell'autovalore j -esimo, quando gli m_j autovettori corrispondenti sono linearmente indipendenti. In ogni caso, una qualsiasi combinazione lineare di tali autovettori è ancora un autovettore relativo allo stesso autovalore λ_j .

Nel caso particolare in cui l'autovalore λ_j sia non-degenere, quindi $m_j = 1$, l'autovettore è definito a meno di una sola costante moltiplicativa. Il modulo di tale costante può essere fissato richiedendo la normalizzazione unitaria per l'autovettore.

2.27.3 Operatori diagonalizzabili

Un operatore si dice **diagonalizzabile** quando esiste una base rispetto alla quale la sua rappresentazione è diagonale.

Teorema di diagonalizzabilità. Un operatore $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$ è **diagonalizzabile** \iff esso possiede N **autovettori linearmente indipendenti**.

Dim.: (\implies) L'operatore è diagonalizzabile, esiste quindi una base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ rispetto alla quale la rappresentazione di \hat{A} è diagonale, si ha cioè

$$\hat{A} \stackrel{e}{\leftrightarrow} A_d = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_N \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che

$$\hat{A}|e_k\rangle = A_k^j|e_j\rangle = \delta_k^j \alpha_k |e_j\rangle = \alpha_k |e_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

ovvero, gli scalari dell'insieme $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, rappresentano gli autovalori di \hat{A} e i vettori linearmente indipendenti della base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ sono i corrispondenti autovettori.

Dim.: (\Leftarrow) Sia $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ l'insieme di autovettori linearmente indipendenti dell'operatore \hat{A} , con autovalori $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, dimostriamo che \hat{A} è diagonalizzabile. L'insieme degli autovettori rappresenta anche una base di E_N , considerando la rappresentazione di \hat{A} rispetto a tale base e l'equazione agli autovalori, si ha, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\alpha_k |a_k\rangle = \hat{A}|a_k\rangle = A_k^j |a_j\rangle, \quad \implies \quad A_k^j = \alpha_k \delta_k^j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Ovvero, la matrice A che rappresenta l'operatore \hat{A} rispetto alla base di autovettori indipendenti è **una matrice diagonale che ha come elementi gli autovalori** $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$.

Diagonalizzazione

Teorema spettrale per gli operatori diagonalizzabili. Sia $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$ un operatore **diagonalizzabile** con autovalori $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ (anche degeneri) e autovettori linearmente indipendenti $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, **allora** si hanno le seguenti tesi.

D1. Vale la **decomposizione spettrale**

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^N \alpha_k \hat{P}_{(k)},$$

dove gli operatori $\{\hat{P}_{(k)}\}_{k=1}^N$ sono **proiettori ortogonali** che “coprono” tutto lo spazio vettoriale E_N , ovvero

$$\hat{P}_{(k)} \hat{P}_{(j)} = \delta_{kj} \hat{P}_{(k)}, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \sum_{m=1}^N \hat{P}_{(m)} = \hat{I}.$$

D2. La matrice diagonale A_d , con $\hat{A} \xleftrightarrow{a} A_d$, che rappresenta l'operatore \hat{A} rispetto alla base dei suoi autovettori, si ottiene dalla matrice A , con $\hat{A} \xleftrightarrow{e} A$, che invece lo rappresenta rispetto alla generica base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, attraverso la matrice T , ovvero: $A_d = T^{-1} A T$, con

$$T_k^j = a_{(k)}^j, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove lo scalare $a_{(k)}^j$ indica la j -esima componente contro-variante dell'autovettore $|a_k\rangle$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, cioè

$$|a_k\rangle = a_{(k)}^j |e_j\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

D3. In presenza di degenerazione, indicando con m_j l'ordine di degenerazione dell'autovalore μ_j , con $j = 1, 2, \dots, M < N$ e $\sum_{j=1}^M m_j = N$, ovvero riordinando e raggruppando, si hanno i soli $M < N$ autovalori distinti

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m_1} \\ \mu_2 &= \alpha_{m_1+1} = \alpha_{m_1+2} = \dots = \alpha_{m_1+m_2} \\ &\vdots \\ \mu_M &= \alpha_{N-m_M+1} = \alpha_{N-m_M+2} = \dots = \alpha_N, \end{aligned}$$

allora vale la decomposizione

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^M \mu_j \hat{Q}_{(j)},$$

dove i proiettori $\{\hat{Q}_{(j)}\}_{j=1}^M$ sono definiti come

$$\hat{Q}_{(j)} = \sum_{l=m_1+\dots+m_{j-1}+1}^{m_1+\dots+m_j} \hat{P}_{(l)}.$$

Poiché sono ottenuti dalla somma di proiettori ortogonali sono ancora proiettori e coprono tutto lo spazio E_N , infatti

$$\sum_{j=1}^M \hat{Q}_{(j)} = \sum_{k=1}^N \hat{P}_{(k)} = \hat{I}.$$

D4. Sia $p(x)$ un generico polinomio nella variabile x , l'operatore $\hat{p}(\hat{A})$ ammette la decomposizione

$$\hat{p}(\hat{A}) = \sum_{j=1}^M p(\mu_j) \hat{Q}_{(j)}.$$

D5. I proiettori $\{\hat{Q}_{(j)}\}_{j=1}^M$ possono essere espressi come opportuni polinomi dell'operatore \hat{A} nella forma

$$\hat{Q}_{(j)} = \hat{q}_j(\hat{A}), \quad \text{con: } q_j(x) = \prod_{l \neq j} \frac{x - \mu_l}{\mu_j - \mu_l}.$$

Dim.:

D1. Come dimostrato esiste, rispetto alla base $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, la rappresentazione diagonale per l'operatore \hat{A}

$$(A_d)_k^j = \alpha_k \delta_k^j = \sum_{m=1}^N \alpha_m \delta_k^j \delta_m^j = \sum_{m=1}^N \alpha_m (P_{(m)})_k^j, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Senza perdita di generalità possiamo normalizzare la base di autovettori, ovvero assumere: $\langle a_k | a_k \rangle = 1, \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Le matrici $\{P_{(m)}\}_{m=1}^N$ rappresentano degli operatori di proiezione la cui azione sui vettori delle base è

$$\hat{P}_{(m)} |a_k\rangle = (P_{(m)})_k^j |a_j\rangle = \begin{cases} |a_m\rangle & k = m \\ |0\rangle & k \neq m \end{cases}.$$

Ovvero i vettori di $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ sono autovettori dell'operatore $\hat{P}_{(m)}$ con autovalori, $\{\pi_k^{(m)}\}_{k=1}^N$, tutti nulli tranne $\pi_m^{(m)} = 1$. Per verificare che gli operatori $\{\hat{P}_{(m)}\}_{m=1}^N$ sono dei proiettori, proviamo che sono **hermitiani** e **idempotenti**.

Verifichiamo l'idempotenza direttamente al livello della rappresentazione matriciale, osservando che il quadrato della matrice che rappresenta l'operatore coincide con la matrice stessa, infatti, $\forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$, si ha

$$(P_{(m)} P_{(m)})_k^j = (P_{(m)})_l^j (P_{(m)})_k^l = \delta_l^j \delta_m^j \delta_k^l \delta_m^l = \delta_k^j \delta_m^j \delta_k^j \delta_m^j = \delta_k^j \delta_m^j = (P_{(m)})_k^j.$$

Ovviamente, per l'univocità della rappresentazione, questa identità matriciale implica quella operatoriale: $\hat{P}_{(m)}^2 = \hat{P}_{(m)}$, e quindi si ha l'idempotenza.

Per dimostrare l'hermitianità procediamo come segue. Consideriamo l'azione dell'operatore $\hat{P}_{(m)}$ su un generico vettore $|v\rangle \in E_N$, usansando la rappresentazione

$$|v\rangle = v^k |a_k\rangle,$$

rispetto alla base $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, per cui si ha

$$\hat{P}_{(m)} |v\rangle = \hat{P}_{(m)} v^k |a_k\rangle = v^m |a_m\rangle.$$

Ne consegue che possiamo scrivere il vettore $|v\rangle$ come la somma di due componenti ortogonali

$$|v\rangle = v^m |a_m\rangle + \underbrace{\sum_{k \neq m} v^k |a_k\rangle}_{=|v'\rangle} = \hat{P}_{(m)} |v\rangle + |v'\rangle,$$

dove $|v'\rangle$ è la componente del vettore $|v\rangle$ ortogonale alla componente selezionata dall'operatore $\hat{P}_{(m)}$, si ha allora

$$\langle v' | \hat{P}_{(m)} |v\rangle = 0.$$

Calcoliamo il "sandwich" $\langle v | \hat{P}_{(m)} |u\rangle$, $\forall |u\rangle \in E_N$, usando per il vettore bra la scomposizione in termini delle due componenti ortogonali

$$\langle v | \hat{P}_{(m)} |u\rangle = (\langle v' | + \langle v | \hat{P}_{(m)}^\dagger) \hat{P}_{(m)} |u\rangle = \langle v | \hat{P}_{(m)}^\dagger \hat{P}_{(m)} |u\rangle,$$

nell'ultima identità abbiamo sfruttato la condizione di ortogonalità $\langle v' | \hat{P}_{(m)} |u\rangle = 0$, tra le componenti "primate" e quelle ottenute dall'azione dell'operatore. Ma, come già dimostrato l'operatore è idempotente e quindi, per l'arbitrarietà dei due vettori $|v\rangle$ e $|u\rangle$,

$$\langle v | \hat{P}_{(m)} |u\rangle = \langle v | \hat{P}_{(m)}^2 |u\rangle = \langle v | \hat{P}_{(m)} \hat{P}_{(m)} |u\rangle = \langle v | \hat{P}_{(m)}^\dagger \hat{P}_{(m)} |v\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{P}_{(m)} = \hat{P}_{(m)}^\dagger.$$

Abbiamo dimostrato che l'operatore $\hat{P}_{(m)}$, con $m \in \{1, 2, \dots, N\}$, è un proiettore, in particolare proietta nella "direzione" del vettore $|a_m\rangle$ della base $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$.

Verifichiamo l'ortogonalità tra due proiettori diversi $\hat{P}_{(m)}$ e $\hat{P}_{(n)}$ con $m \neq n$, si ha

$$\begin{aligned} \hat{P}_{(m)} \hat{P}_{(n)} |a_k\rangle &= \hat{P}_{(m)} (P_{(n)})_k^j |a_j\rangle = (P_{(m)})_j^l (P_{(n)})_k^j |a_l\rangle = (\delta_j^l \delta_m^l) (\delta_k^j \delta_n^j) |a_l\rangle \\ &= \delta_k^l \delta_m^l \delta_n^l |a_l\rangle = |0\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}, \end{aligned}$$

ne consegue che $\hat{P}_{(m)}$ e $\hat{P}_{(n)}$ sono ortogonali.

Dimostriamo, infine, che i proiettori coprono tutto lo spazio, cioè che la loro somma dà l'operatore identità. Studiamo direttamente l'azione della somma di tutti i proiettori su un generico vettore della base, ovvero $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\left(\sum_{m=1}^N \hat{P}_{(m)} \right) |a_k\rangle = \sum_{m=1}^N (P_{(m)})_k^j |a_j\rangle = \sum_{m=1}^N \delta_k^j \delta_m^j |a_j\rangle = \sum_{m=1}^N \delta_{km} |a_k\rangle = |a_k\rangle,$$

agendo come tale, l'operatore somma coincide con l'operatore identità, cioè

$$\sum_{m=1}^N \hat{P}_{(m)} = \hat{I}.$$