2.34 Serie di Fourier

Sia $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ un insieme numerabile di funzioni di $L_p^2(E)$ e $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, una successione di scalari complessi. Consideriamo la combinazione

$$\sum_{k=1}^{N} c_k\, e_k(x) = q(x)\,,$$

dove $q(x)$ è una funzione QDN in E. Le funzioni $\{e_k(x)\}_{k=1}^{N}$ sono **linearmente indipendenti** se l'identità precedente si ottiene solo se $c_k = 0$, $\forall k \in \{1,2,\ldots,N\}$, altrimenti sono **linearmente dipendenti**.
Un sistema ON è un insieme, $\{e_k(x)\}_{k=1}^{N} \subset L_p^2(E)$, di funzioni che verificano la condizione

$$(e_m, e_n) = \int_E e_m^*(x) e_n(x) p(x) dx = \delta_{mn}\,, \qquad \forall m,n \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Le funzioni di un sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{N}$, sono linearmente indipendenti. Consideriamo la combinazione di tale funzioni che dà una funzione QDN, $q(x)$, moltiplichiamo scalarmente ambo i membri per e_m, con m generico, si ottiene

$$\sum_{k=1}^{N} c_k e_k(x) = q(x)$$

$$c_m = \sum_{k=1}^{N} c_k \underbrace{(e_m, e_k)}_{\delta_{mk}} = (e_m, q) = 0\,, \qquad \forall m \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

l'unica combinazione che dà una funzione QDN è quella banale, quindi le funzioni sono linearmente indipendenti.
La funzioni dell'insieme finito $\{e_k(x)\}_{k=1}^{N}$ possono essere interpretate come le rappresentazioni dei vettori $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N}$ di uno spazio vettoriale astratto L^2, questi vettori generano un sottospazio E_N, di dimensione finita N, di cui sono una base ON. Ne consegue che $\forall |f\rangle \in E_N$, con $|f\rangle \hookleftarrow f(x) \in L_p^2(E)$, si ha la decomposizione

$$|f\rangle = f^k |e_k\rangle\,, \qquad f^k = \langle e_k|f\rangle = \int_E e_k^*(x) f(x) p(x) dx = (e_k, f)\,.$$

In generale, $\forall f(x) \in L_p^2(E)$ e dato il sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, gli scalari $f^k = (e_k, f)$ si dicono **coefficienti di Fourier** (Jean Baptiste Joseph Fourier, 21 marzo 1768 - 16 maggio 1830, Francia) della funzione $f(x)$ rispetto al sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Usando tali coefficienti si ha la combinazione "infinita", detta **serie formale di Fourier**

$$\sum_{k=1}^{\infty} f^k e_k(x)\,.$$

Poiché la convergenza di tale serie non è ovvia, così come non lo è il fatto che, qualora convergesse lo farebbe alla funzione $f(x)$, si usa il simbolo di Hurwitz "$\sim$" (Adolf Hurwitz, 26 marzo 1859 - Zurigo, 18 novembre 1919, Germania) per indicare, semplicemente, che la serie si riferisce ad una data funzione, la $f(x)$. Si scrive quindi

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f^k e_k(x)\,,$$

per indicare, appunto, che la serie rappresenta la serie di Fourier della funzione $f(x)$, rispetto al sistema di funzioni ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

2.34.1 Disuguaglianza di Bessel

Dati la funzione $f(x) \in L^2_p(E)$ e il sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L^2_p(E)$, consideriamo la serie di Fourier

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f^k e_k(x)\,, \qquad f^k = (e_k, f)$$

e indichiamo con $f_n(x)$ la somma parziale n-esima della serie stessa

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^k e_k(x)\,.$$

Usando la disuguaglianza di Schwarz, il prodotto tra la funzione $f(x)$ e la $f_n(x)$ può essere minorato in modulo come segue

$$|(f, f_n)|^2 \le (f, f)(f_n, f_n)\,.$$

Calcoliamo esplicitamente, sfruttando l'ortonormalità del sistema $\{e_k(x)\}_{k=1}^\infty$, i prodotti (f_n, f_n) e (f, f_n), e dimostriamo che sono uguali, si ha

$$(f_n, f_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} f^k e_k, \sum_{j=1}^{n} f^j e_j \right) = \sum_{k,j=1}^{n} f^{k*} f^j \underbrace{(e_k, e_j)}_{\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} \left| f^k \right|^2,$$

$$(f, f_n) = \left(f, \sum_{k=1}^{n} f^k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} f^k \underbrace{(f, e_k)}_{f^{k*}} = \sum_{k=1}^{n} \left| f^k \right|^2.$$

Sostituiamo questi valori nella disuguaglianza e otteniamo la **disuguaglianza di Bessel** (Friedrich Wilhelm Bessel, 22 luglio 1784 - 17 marzo 1846, Germania)

$$(f, f) \ge \sum_{k=1}^{n} |f^k|^2\,.$$

2.34.2 Numerabilità di un sistema orto-normale

Proposizione. Le funzioni di un sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L^2_p(a,b)$ sono al più un'**infinità numerabile**.

Dim.: Consideriamo una qualsiasi numerazione dei razionali nell'intervallo (a,b), ad esempio: $R(a,b) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots\}$. In corrispondenza di ciascuno di questi razionali r_m definiamo la funzione $R_m(x)$ come

$$R_m(x) = \begin{cases} 1 & a \le x \le r_m \\ 0 & r_m < x \le b \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots\,,$$

ovvero una funzione a gradino con discontinuità in r_m. Le uniche funzioni ortogonali a tutte le $R_m(x)$ sono le funzioni QDN in (a,b). Supponiamo, infatti, che la funzione $f(x)$ sia tale che, $\forall m \in \mathbb{N}$, $(R_m, f) = 0$, ovvero

$$(R_m, f) = \int_a^b R_m^*(x) f(x) p(x) dx = \int_a^{r_m} f(x) p(x) dx = 0\,, \qquad \forall m \in \mathbb{N}\,.$$

Tramite la funzione $f(x)$, ortogonale a tutte le funzione $R_m(x)$, possiamo anche definire

$$F(x) = \int_a^x f(x') p(x') dx'\,.$$

La funzione $F(x)$, che è continua in (a,b) e si annulla in ogni razionale, cioè si ha: $F(r_j)=0$, $\forall\, j\in\mathbb{N}$, infatti

$$F(r_j)=\int_a^{r_j} f(x')p(x')dx'=\int_a^b R_j^*(x')f(x')p(x')dx'=(R_j,f)=0\,,$$

non può che essere **identicamente nulla in** (a,b). Ciò implica che la funzione $f(x)$ abbia integrale nullo in ogni sottoinsieme di (a,b) e che quindi sia una **funzione QDN**.
Per numerare le funzioni del sistema ON, associamo ad ogni funzione $R_m(x)$ un insieme di funzioni $e_k(x)$. In particolare, alla funzione $R_m(x)$ associamo tutte le funzioni $e_k(x)$ che verificano la condizione

$$(R_m,e_k)\neq 0\,,$$

in questo modo tutte le funzioni dell'insieme $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ vengono considerate. Infatti, per non essere associata a nessuna $R_m(x)$, una data funzione $e_j(x)\in\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ dovrebbe essere ortogonale a tutte le $R_m(x)$ e quindi essere una QDN, il che è assurdo poiché il sistema ON non contiene funzioni QDN.
Rimane da dimostrare che a una data funzione $R_m(x)$ **sia impossibile associare una infinità non numerabile di** $e_k(x)$. Assumiamo per assurdo che ciò sia invece possibile. Interpretiamo il prodotto scalare, attraverso cui si associa una funzione $e_k(x)$ alla $R_m(x)$, come il k-esimo coefficiente di Fourier della stessa funzione $R_m(x)$, rispetto al sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, cioè

$$C_{(m)}^k=(e_k,R_m)\,,$$

con m fissato e k che può variare in un insieme costituito da un'**infinità non numerabile di valori**. Grazie alla disuguaglianza di Bessel si ha la limitazione

$$\sum_{k=1}^{n}|C_{(m)}^k|^2\leq(R_m,R_m)=\int_a^b|R_m(x)|^2p(x)dx=\int_a^{r_m}p(x)dx<\infty\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}\,,$$

ovvero, i moduli $|C_{(m)}^k|$ di tutti i coefficienti, appartengono all'intervallo $(0,\infty)$. Consideriamo la partizione $\{P_j\}_{j=1}^{\infty}$ della semiretta reale positiva, con

$$P_1=(1,\infty)\,,\quad P_2=(1/2,1]\,,\quad\cdots\,,\quad P_j=\left(\frac{1}{j},\frac{1}{j-1}\right]\,,\quad\cdots\,,$$

per cui si ha

$$(0,\infty)=\bigcup_{j=1}^{\infty}P_j\equiv(1,\infty)\cup\left\{\bigcup_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j},\ \frac{1}{j-1}\right]\right\}\,.$$

Gli intervalli P_j sono, ovviamente, numerabili. I coefficienti $C_{(m)}^k$, sono invece un'infinità non numerabile, è necessario quindi che almeno in uno degli intervalli, ad esempio nell'l-esimo P_l, cada un'infinità non numerabile di valori $|C_{(m)}^k|$, siano $\mathscr{C}_1=\left\{C_{(m)}^j:|C_{(m)}^j|>1\right\}$ e $\mathscr{C}_l=\left\{C_{(m)}^j:1/l<|C_{(m)}^j|\leq 1/(l-1)\right\}$, con $l\geq 2$, i possibili insiemi di tali valori, in particolare

$$|C_{(m)}^k|>\frac{1}{l}\,,\qquad \forall C_{(m)}^j\in\mathscr{C}_l\,.$$

Questa disuguaglianza è in contraddizione con la limitazione

$$\sum_{k=1}^{n} |C_{(m)}^{k}|^2 \leq \int_a^{r_m} p(x)dx < \infty\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Infatti, per valori di n sufficientemente grandi, è possibile includere nella somma un numero qualsiasi di elementi di $\mathscr{C}_l$ per ottenere a primo membro una quantità arbitrariamente grande, maggiore dell'integrale a secondo membro che non invece dipende da n.
La contraddizione deriva dall'aver assunto che ad una stessa funzione $R_m(x)$ fosse possibile associare un'infinità non numerabile di elementi dell'insieme $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.
Quindi, ad ogni $R_m(x)$ si può associare al più un'infinità numerabile di funzioni $e_k(x)$ e, avendo che le funzioni $R_m(x)$ sono esse stesse un'infinità numerabile e che un'infinità numerabile di infinità numerabili è essa stessa un'infinità numerabile, si ha la dimostrazione del teorema.

2.34.3 Approssimazione in media

Supponiamo di voler approssimare la funzione $f(x) \in L_p^2(E)$, cioè vogliamo trovare un'altra funzione $g(x)$, che si "avvicini" il più possibile alla funzione $f(x)$ nei punti dell'insieme E. A tal fine definiamo il concetto di "avvicinamento" usando la nozione di **scarto quadratico medio** (SQM)

$$\Delta \equiv \int_E |f(x) - g(x)|^2 p(x)dx \geq 0\,.$$

L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è lo SQM. Consideriamo un sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$ e lo sviluppo formale di Fourier della funzione $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f^k e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, f) e_k(x)\,,$$

per la $g(x)$ potremmo utilizzare una combinazione delle prime n funzioni del sistema ON,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g^k e_k(x)\,,$$

con i coefficienti dell'insieme $\{g^k\}_{k=1}^{n}$ da determinare minimizzando lo SQM

$$\begin{aligned}
\Delta = \int_E |f(x) - g(x)|^2 p(x)dx &= (f-g, f-g) \\
&= (f,f) + (g,g) - 2\mathrm{Re}[(f,g)] \\
&= (f,f) + \sum_{k=1}^{n} |g^k|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}[g^k (f, e_k)] \\
&= (f,f) + \sum_{k=1}^{n} |g^k|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(g^k f^{k*}\right) \\
&= (f,f) + \sum_{k=1}^{n} |g^k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |g^k - f^k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |g^k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |f^k|^2 \\
&= \underbrace{(f,f) - \sum_{k=1}^{n} |f^k|^2}_{\geq 0\,(\text{Bessel})} + \sum_{k=1}^{n} |g^k - f^k|^2\,.
\end{aligned}$$

Il valore minimo si ottiene minimizzando l'ultimo termine rispetto ai coefficienti g^k. La migliore approssimazione in media si ha quindi ponendo $g^k = f^k$, $\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$, ovvero quando i coefficienti della funzione approssimante coincidono con quelli di Fourier della funzione da approssimare.

2.34.4 Equazione di Parseval

Consideriamo la funzione $f(x) \in L_p^2(E)$ che ha serie formale di Fourier

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f^k e_k(x)\,, \qquad f^k = (e_k, f)\,,$$

rispetto al sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$. Se la disuguaglianza di Bessel

$$(f,f) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left|f^k\right|^2\,,$$

vale con l'identità, si ha l'**equazione di Parseval** (Marc-Antoine Parseval des Chênes, 27 aprile 1755 - 16 agosto 1836, Francia)

$$(f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f^k\right|^2$$

e il sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ è detto **completo rispetto alla funzione** $f(x)$.
In altri termini, possiamo approssimare la funzione $f(x)$ bene quanto vogliamo usando la combinazione delle funzioni del sistema ON i cui coefficienti sono quelli di Fourier. Infatti, approssimando con la funzione

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f^k e_k(x)\,,$$

si ha che, grazie alla convergenza della serie dei moduli quadri (equazione di Parseval), lo SQM è infinitesimo al divergere di n

$$\begin{aligned}\Delta = (f - f_n, f - f_n) &= (f,f) + (f_n, f_n) - 2\mathrm{Re}[(f, f_n)] \\ &= (f,f) - \sum_{k=1}^{n} \left|f^k\right|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|f^k\right|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.\end{aligned}$$

In definitiva, lo sviluppo formale di Fourier di una funzione $f(x) \in L_p^2(E)$, rispetto ad un sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$, completo rispetto alla stessa funzione $f(x)$, **converge in media** ad $f(x)$ nell'insieme E. Usando il simbolo di limite in media possiamo scrivere

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, f_n(x) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} f^k e_k(x) = f(x)\,.$$

Def.: Un sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$ è **completo** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ lo è rispetto ad ogni funzione $f(x) \in L_p^2(E)$.

2.34.5 Equazione di Parseval generalizzata

Consideriamo le serie formali di Fourier

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f^k e_k(x)\,, \qquad f^k = (e_k, f)\,,$$
$$g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} g^k e_k(x)\,, \qquad g^k = (e_k, g)\,,$$

delle funzioni $f(x), g(x) \in L^2_p(E)$ rispetto al sistema ON e completo $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2_p(E)$ e le rispettive equazioni di Parseval

$$(f,f) = \sum_{k=1}^{\infty} |f^k|^2\,, \qquad (g,g) = \sum_{k=1}^{\infty} |g^k|^2\,.$$

Vale, inoltre, la cosiddetta equazione di Parseval generalizzata

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{k*} g^k\,.$$

__Dim.:__ Definiamo la funzione di lavoro $h(x) = \alpha f(x) + g(x) \in L^2_p(E)$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. Valgono per $h(x)$ la serie formale di Fourier e l'equazione di Parseval

$$h(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} h^k e_k(x)\,, \quad h^k = (e_k, h)\,, \qquad (h,h) = \sum_{k=1}^{\infty} |h^k|^2\,.$$

Dalla definizione in termini delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, il prodotto scalare di $h(x)$ per sé stessa può essere sviluppato come

$$\begin{aligned}(h,h) &= (\alpha f + g, \alpha f + g) = |\alpha|^2 (f,f) + (g,g) + 2\mathrm{Re}[(\alpha f, g)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\alpha|^2 |f^k|^2 + |g^k|^2 \right] + 2\mathrm{Re}[(\alpha f, g)]\,,\end{aligned}$$

ma si ha anche: $h^k = \alpha f^k + g^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, quindi

$$(h,h) = \sum_{k=1}^{\infty} |h^k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha f^k + g^k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[|\alpha|^2 |f^k|^2 + |g^k|^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha^* f^{k*} g^k) \right]\,,$$

confrontando le due espressioni precedenti si ottiene

$$\mathrm{Re}[(\alpha f, g)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(\alpha^* f^{k*} g^k)\,.$$

La presenza dello scalare generico α permette di estendere l'identità al valore complesso completo, considerando, non solo la parte reale, ma anche quella immaginaria. Infatti, posto $\alpha = 1$, si ha

$$\mathrm{Re}[(f,g)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(f^{k*} g^k \right)\,,$$

mentre, con $\alpha = i$,

$$\mathrm{Re}[-i(f,g)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(-i f^{k*} g^k\right)$$
$$\mathrm{Im}[(f,g)] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\left(f^{k*} g^k\right),$$

dalla combinazione delle precedenti espressioni per la parte reale e per quella immaginaria si ottiene l'equazione di Parseval generalizzata

$$(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{k*} g^k .$$

2.34.6 Teorema di Fischer-Riesz

(Ernst Sigismund Fischer, 12 luglio 1875 - 14 novembre 1954, Austria; Frigyes Riesz, 22 gennaio 1880 - 28 febbraio 1956, Ungheria).
Data una successione numerica $\{c^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ ed un sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$, $\exists\, f(x) \in L_p^2(E)$ che ammette i numeri dell'insieme $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$ come coefficienti di Fourier rispetto al sistema ON dato $\Longleftrightarrow$ la serie dei moduli quadri converge, cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c^k|^2 < \infty .$$

Dim.: ($\Longrightarrow$) I numeri della successione $\{c^k\}_{k=1}^{\infty}$ sono i coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$ rispetto al sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, dalla disuguaglianza di Bessel si ha allora

$$0 \le \sum_{k=1}^{\infty} |c^k|^2 \le (f,f) < \infty ,$$

quindi la serie dei moduli quadri converge.
Dim.: ($\Longleftarrow$) Per ipotesi la serie è convergente. Dimostriamo che $\exists\, f(x) \in L_p^2(E)$, per la quale gli scalari c^k, con $k \in \mathbb{N}$, rappresentino i coefficienti di Fourier rispetto al sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.
Definiamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c^k e_k(x) \in L_p^2(E) , \qquad \forall n \in \mathbb{N} ,$$

e mostriamo che si tratta di una successione di Cauchy. A tal fine, consideriamo una coppia di numeri naturali $m,n \in \mathbb{N}$, con $m > n$, la norma al quadrato della differenza tra le funzioni corrispondenti può essere scritta come

$$\|f_m - f_n\|^2 = (f_m - f_n, f_m - f_n) = \sum_{k=n+1}^{m} |c^k|^2 = |S_m - S_n| ,$$

dove S_j è la somma parziale j-esima della serie dei moduli quadri,

$$S_j = \sum_{k=1}^{j} |c^k|^2 ,$$

poiché la serie converge, converge anche la successione delle somme parziali che, essendo una successione numerica, è una successione di Cauchy, per cui si ha

$$\lim_{m,n\to\infty} |S_m - S_n| = 0\,.$$

Il modulo della differenza delle somme parziali coincide con la norma al quadrato delle differenza delle funzioni omologhe, quindi il risultato precedente implica il limite

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\| = 0\,,$$

che rappresenta la condizione di Cauchy per la successione $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, che è quindi una successione di Cauchy. Per il teorema di Weyl ciò equivale alla convergenza in media della successione, esiste, quindi, una funzione $f(x) \in L_p^2(E)$, tale che

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, f_n(x) = f(x)\,,$$

questa funzione è quella cercata. Per verificarlo mostriamo che i suoi coefficienti di Fourier coincidono con i numeri della successione $\left\{c^k\right\}_{k=1}^{\infty}$. L'esistenza del limite in media implica che, $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, k_\varepsilon$, tale che

$$\int_E \left|f_k(x) - f(x)\right|^2 p(x)dx < \varepsilon\,, \qquad \forall\, k \geq k_\varepsilon\,,$$

scrivendo l'integrale come prodotto scalare si ha

$$\begin{aligned}
\varepsilon > \int_E \left|f_k(x)-f(x)\right|^2 p(x)dx &= (f-f_k, f-f_k) = (f,f)+(f_k,f_k)-2\mathrm{Re}[(f,f_k)] \\
&= (f,f)+\sum_{j=1}^{k}|c^j|^2-2\mathrm{Re}[(f,f_k)] \\
&= (f,f)+\sum_{j=1}^{k}|c^j|^2-2\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Re}[c^j(f,e_j)] \\
&= (f,f)+\sum_{j=1}^{k}|c^j|^2+\sum_{j=1}^{k}\left|c^j-(e_j,f)\right|^2-\sum_{j=1}^{k}|c^j|^2-\sum_{j=1}^{k}|(c^j,f)|^2 \\
&= \underbrace{(f,f)-\sum_{j=1}^{k}|(c^j,f)|^2}_{\geq 0\,\text{Bessel}}+\sum_{j=1}^{k}\left|c^j-(e_j,f)\right|^2 \\
&\geq \sum_{j=1}^{k}\left|c^j-(e_j,f)\right|^2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Il che equivale alla condizione di annullamento dell'ultima somma nel limite $k \to \infty$, cioè

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\left|c^j-(e_j,f)\right|^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sum_{j=1}^{\infty}\left|c^j-(e_j,f)\right|^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad c^j = (e_j,f)\,, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}\,.$$

Riassumendo, dato un sistema ON $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(E)$, completo rispetto alla funzione $f(x) \in L_p^2(E)$, allora la stessa funzione è definita dai suoi coefficienti di Fourier a meno, però, di una funzione QDN, come conseguenza della nozione di convergenza in media.