

2.22.5 Cambiamenti di base

Sia $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ una base dello spazio vettoriale E_N , l'operatore lineare $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$ è **regolare (invertibile)** $\iff \{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, l'insieme di vettori ottenuti dall'applicazione dell'operatore \hat{A} sui vettori della base, cioè

$$|e'_k\rangle = \hat{A}|e_k\rangle = A_k^j |e_j\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

rappresenta esso stesso una base di E_N .

Dim.: (\implies) Per dimostrare che l'insieme di vettori $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$ rappresenta una base dello spazio vettoriale E_N , avendo per ipotesi che \hat{A} è regolare, è sufficiente dimostrare che i vettori dell'insieme $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$ siano linearmente indipendenti.

A tal fine, consideriamo la combinazione lineare opportuna che dà il vettore nullo

$$|0\rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k |e'_k\rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k \hat{A}|e_k\rangle = \sum_{k=1}^N \alpha_k A_k^j |e_j\rangle \equiv \beta^j |e_j\rangle,$$

questa è anche una combinazione lineare dei vettori della base iniziale $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^N$, con coefficienti

$$\beta^j = \sum_{k=1}^N \alpha_k A_k^j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Poiché i vettori dell'insieme $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^N$ sono linearmente indipendenti, la combinazione lineare è quella banale, tutti i coefficienti β^j , con $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, sono nulli, quindi

$$\beta_j = \sum_{k=1}^N \alpha_k A_k^j = \sum_{k=1}^N A_k^j \alpha_k = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Gli scalari dell'insieme $\{\alpha^k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$ rappresentano la soluzione di un sistema lineare omogeneo, la cui matrice dei coefficienti è A , ovvero la matrice che rappresenta l'operatore \hat{A} rispetto alla base $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^N$. Ma, poiché \hat{A} è invertibile si ha $\det(A) \neq 0$, ne consegue che l'unica soluzione del sistema è quella banale, cioè:

$$\alpha_k = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

In definitiva, i coefficienti della combinazione dei vettori dell'insieme $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$ che dà il vettore nullo sono tutti nulli, ciò equivale a dire che i suddetti vettori sono linearmente indipendenti.

Dim.: (\impliedby) La dimostrazione della condizione necessaria procede allo stesso modo della dimostrazione del teorema di invertibilità, che asserisce l'equivalenza tra regolarità e iniettività di un operatore. L'operatore inverso può essere "costruito" a partire dalla definizione della sua azione sui vettori di una base. Infatti, possiamo definire l'operatore \hat{A}_I stabilendo le N identità

$$\hat{A}_I |e'_k\rangle = |e_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

La definizione è esauriente poiché, $\forall |a\rangle \in E_N$, si hanno, rispetto alle due basi $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, le decomposizioni: $|a\rangle = a^k |e'_k\rangle = a^k |e_k\rangle$, quindi $\hat{A}_I |a\rangle = a^k |e_k\rangle$ è ben definito. Consideriamo ora l'azione dell'operatore $\hat{A}_I \hat{A}$ sul vettore $|a\rangle$,

$$\hat{A}_I \hat{A} |a\rangle = \hat{A}_I \hat{A} a^k |e_k\rangle = \hat{A}_I a^k \underbrace{\hat{A} |e_k\rangle}_{|e'_k\rangle} = a^k \underbrace{\hat{A}_I |e'_k\rangle}_{|e_k\rangle} = a^k |e_k\rangle = |a\rangle,$$

da cui si evince $\hat{A}_I \hat{A} = \hat{I}$. Allo stesso modo, per l'azione dell'operatore $\hat{A} \hat{A}_I$ si ha

$$\hat{A} \hat{A}_I |a\rangle = \hat{A} \hat{A}_I a^k |e'_k\rangle = \hat{A} a'^k \underbrace{\hat{A}_I |e'_k\rangle}_{|e_k\rangle} = \hat{A} a'^k |e_k\rangle = a'^k \underbrace{\hat{A} |e_k\rangle}_{|e'_k\rangle} = a'^k |e'_k\rangle = |a\rangle,$$

si ottiene quindi $\hat{A} \hat{A}_I = \hat{I}$, che, unita all'identità precedente, assicura l'esistenza dell'operatore inverso $\hat{A}^{-1} \equiv \hat{A}_I$.

In definitiva, l'operatore regolare \hat{A} permette di "passare" dalla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ alla base $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, mentre, l'operatore inverso \hat{A}^{-1} definisce il passaggio $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N \rightarrow \{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$. Si hanno cioè le $2N$ identità

$$|e'_k\rangle = \hat{A} |e_k\rangle, \quad |e_k\rangle = \hat{A}^{-1} |e'_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

2.22.6 Trasformazioni di basi e vettori

Nello spazio vettoriale E_N consideriamo le due basi $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, connesse dall'operatore regolare di "cambiamento di base" \hat{R} , cioè, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$|e'_k\rangle = \hat{R} |e_k\rangle, \quad |e_k\rangle = \hat{R}^{-1} |e'_k\rangle.$$

Studiamo come si trasformano le componenti di un vettore per effetto del passaggio da una base ad un'altra. Sia $|a\rangle \in E_N$ un generico vettore, in corrispondenza delle due basi si hanno le due decomposizioni

$$|a\rangle = a^k |e_k\rangle, \quad |a\rangle = a'^k |e'_k\rangle.$$

Partiamo dalla prima e usiamo la trasformazione \hat{R}^{-1} ,

$$|a\rangle = a^k |e_k\rangle = a^k \hat{R}^{-1} |e'_k\rangle = a^k (\hat{R}^{-1})^j_k |e'_j\rangle,$$

confrontando il risultato dell'ultimo membro con la decomposizione $|a\rangle = a'^k |e'_k\rangle$, si hanno le N identità

$$a'^j = (\hat{R}^{-1})^j_k a^k, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

che, in termini matriciali, coincidono con l'equazione

$$a' = R^{-1} a.$$

Da cui si evince come le componenti del vettore $|a\rangle$ nel passaggio dalla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ alla base $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$ si trasformino attraverso la matrice R^{-1} , ovvero

$$|e_k\rangle \xrightarrow{\hat{R}} |e'_k\rangle \implies a^k \xrightarrow{R^{-1}} a'^k.$$

È per questo motivo le componenti con indice alto si dicono **componenti controvarianti**, poiché, cioè, "contro-variano", trasformandosi con l'inversa della matrice, che rappresenta l'operatore \hat{R} , che, a sua volta, definisce la trasformazione di passaggio dalla base non primata a quella primata. Consideriamo il vettore duale $\langle a| \in E_N^*$ che, così come il vettore ket $|a\rangle$ è rappresentato, rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, dal vettore colonna a le cui componenti sono gli elementi dell'insieme $\{a^k\}_{k=1}^N$, è rappresentato dal vettore riga

$$\langle a| \leftrightarrow a^\dagger = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N), \quad a_k = \sum_{j=1}^N G_k^j (a^j)^*, \quad G_k^j = \langle e_j | e_k \rangle, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Se consideriamo la base $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, si ha

$$\begin{aligned} a'_k &= \sum_{j=1}^N G_k^j (a'^j)^* = \langle e'_j | e'_k \rangle (a'^j)^* = \langle e_j | \hat{R}^\dagger \hat{R} | e_k \rangle (a'^j)^* = \langle e_m | (R_j^m)^* R_k^l | e_l \rangle (a'^j)^* \\ &= R_k^l \langle e_m | e_l \rangle \underbrace{(R_j^m)^* (a'^j)^*}_{(a^m)^*} = R_k^l \sum_{m=1}^N G_l^m (a^m)^* = a_l R_k^l. \end{aligned}$$

Indicando con $a^{(\prime)\dagger}$ il vettore riga che rappresenta il bra $\langle a|$,

$$\langle a| \leftrightarrow a^{(\prime)\dagger} = \left(a_1^{(\prime)} \quad a_2^{(\prime)} \quad \dots \quad a_N^{(\prime)} \right),$$

l'indetità precedente ha la forma matriciale

$$a'^{\dagger} = a^{\dagger} R.$$

Da cui si evince che le componenti con indice basso si trasformano con la matrice R , ovvero si ha

$$|e_k\rangle \xrightarrow{\hat{R}} |e'_k\rangle \implies a_k \xrightarrow{R} a'_k.$$

Si chiamano **componenti covarianti** poiché “covariano”, cioè si trasformano con la matrice che rappresenta lo stesso operatore che definisce la trasformazione dalla base non primata a quella primata.

Sommario

Siano $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$ due basi dello spazio vettoriale E_N connesse dalla trasformazione descritta dall'operatore regolare \hat{R} , per cui si hanno le $2N$ identità

$$|e'_k\rangle = \hat{R}|e_k\rangle, \quad |e_k\rangle = \hat{R}^{-1}|e'_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Ne consegue che, $\forall |a\rangle \in E_N$, valgono le decomposizioni

$$|a\rangle = a^k |e_k\rangle, \quad |a\rangle = a'^k |e'_k\rangle.$$

Indicando con a e a' i vettori colonna con le **componenti controvarianti**, che rappresentano il vettore $|a\rangle$ rispetto alle due basi, si ha tra di esse la relazione **matriciale**

$$a' = \begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ \vdots \\ a'^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R^{-1})_1^1 & (R^{-1})_1^2 & \dots & (R^{-1})_1^N \\ (R^{-1})_2^1 & (R^{-1})_2^2 & \dots & (R^{-1})_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (R^{-1})_N^1 & (R^{-1})_N^2 & \dots & (R^{-1})_N^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^N \end{pmatrix} = R^{-1} a.$$

Poiché l'operatore \hat{R}^{-1} agisce sui vettori della base $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, i coefficienti $(R^{-1})_j^k$, $k, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, si intendono calcolati rispetto a tale base, cioè

$$\hat{R}^{-1}|e'_j\rangle = (R^{-1})_j^k |e'_k\rangle, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Per ciò che riguarda le **componenti controvarianti** si ha

$$a'^{\dagger} = \left(a'_1 \quad a'_2 \quad \dots \quad a'_N \right) = \left(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N \right) \begin{pmatrix} R_1^1 & R_1^2 & \dots & R_1^N \\ R_2^1 & R_2^2 & \dots & R_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_N^1 & R_N^2 & \dots & R_N^N \end{pmatrix} = a^{\dagger} R.$$

Usando lo stesso argomento, l'operatore \hat{R} agisce sui vettori della base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, per cui le sue componenti R_j^k sono ottenute rispetto a questa base, si hanno cioè le N identità

$$\hat{R}|e_j\rangle = R_j^k |e_k\rangle, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

2.22.7 Trasformazioni degli operatori

Siano: $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$, $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, un operatore lineare e due basi dello spazio vettoriale E_N connesse dalla trasformazione: $\hat{R}|e_k\rangle = |e'_k\rangle$, con $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Consideriamo le matrici A e A' che rappresentano l'operatore \hat{A} rispetto alle due basi, ovvero

$$\hat{A}|e_k\rangle = A_k^l |e_l\rangle, \quad \hat{A}|e'_k\rangle = A'^l_k |e_l\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

ma si anche che

$$\hat{A}|e'_k\rangle = \hat{A}\hat{R}|e_k\rangle = \hat{A}R_k^j |e_j\rangle = A_j^m R_k^j |e_m\rangle = A_j^m R_k^j \hat{R}^{-1}|e'_m\rangle = A_j^m R_k^j (R^{-1})_m^l |e_l\rangle,$$

per cui, eguagliando i secondi membri delle due precedenti relazioni, si ottiene che

$$A'^l_k = (R^{-1})_m^l A_j^m R_k^j, \quad \forall l, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

In termini matriciali, per l'operatore \hat{A} ed il vettore $|a\rangle \in E_N$, con $|a\rangle \xleftrightarrow{e} a$, si hanno le trasformazioni

$$A' = R^{-1}AR, \quad a' = R^{-1}a.$$

Tali trasformazioni lasciano l'azione dell'operatore invariata. Infatti, è possibile passare dalla rappresentazione matriciale rispetto alla base $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, dell'equazione $|b\rangle = \hat{A}|a\rangle$, ovvero

$$|b\rangle = \hat{A}|a\rangle \quad \xleftrightarrow{e'} \quad b' = A'a',$$

alla rappresentazione rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ della stessa equazione vettoriale, moltiplicando ambo i membri per la matrice R ed usando le regole di trasformazione, cioè

$$Rb' = RA'a' \quad \Longrightarrow \quad b = \underbrace{RR^{-1}}_I \underbrace{A}_{a'} R a' \quad \Longrightarrow \quad b = Aa.$$

2.23 I tensori

Nello spazio vettoriale E_N sono date le due basi $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, connesse dalla trasformazione \hat{R} , ovvero: $|e'_k\rangle = \hat{R}|e_k\rangle$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Rispetto a tali basi è possibile associare ad ogni vettore una rappresentazione matriciale.

In particolare, $\forall |a\rangle \in E_N$

$$|a\rangle \xleftrightarrow{e} a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^N \end{pmatrix}, \quad |a\rangle \xleftrightarrow{e'} a' = \begin{pmatrix} a'^1 \\ a'^2 \\ \vdots \\ a'^N \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} a^k = (R^{-1})_j^k a'^j, \\ \forall k \in \{1, 2, \dots, N\} \end{cases}.$$

Mentre, $\forall \langle b| \in E_N^*$:

$$\langle b| \xleftrightarrow{e} b^\dagger = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_N), \quad \langle b| \xleftrightarrow{e'} b'^\dagger = (b'_1 \quad b'_2 \quad \dots \quad b'_N), \quad \begin{cases} b'_k = b_j R_k^j, \\ \forall k \in \{1, 2, \dots, N\} \end{cases}.$$

Il prodotto delle componenti controvarianti di $|a\rangle$ e covarianti di $\langle b|$,

$$T_j^k \equiv a^k b_j, \quad k, j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

rappresenta un "oggetto" a due indici, un alto ed uno basso, che, per effetto del cambiamento di base, si trasforma come

$$T_j^k = a^k b_j \longrightarrow T'^k_j \equiv a'^k b'_j = (R^{-1})_m^k a^m b_l R_j^l = (R^{-1})_m^k T_l^m R_j^l.$$

In generale

- le componenti con gli indici in posizione contro-variante (alti) si trasformano con la matrice R^{-1} ;
- le componenti con gli indici in posizione covariante (bassi) si trasformano con la matrice R .

Def.: In uno spazio vettoriale E_N , si definisce **tensore di rango** $r \in \mathbb{N}$ un insieme di N^r scalari, dove N è la dimensione dello spazio vettoriale, che, per effetto del cambiamento di base, si trasforma come il prodotto delle componenti di r vettori.

Consideriamo la trasformazione del tensore di rango $r \in \mathbb{N}$ che ha $s \in \mathbb{N}$ indici controvarianti e $t \in \mathbb{N}$ indici covarianti, con $r = s + t$,

$$T_{b_1, b_2, \dots, b_t}^{a_1, a_2, \dots, a_s} \longrightarrow (T')_{b_1, b_2, \dots, b_t}^{a_1, a_2, \dots, a_s} = (R^{-1})_{c_1}^{a_1} (R^{-1})_{c_2}^{a_2} \dots (R^{-1})_{c_s}^{a_s} T_{d_1, d_2, \dots, d_t}^{c_1, c_2, \dots, c_s} R_{b_1}^{d_1} R_{b_2}^{d_2} \dots R_{b_t}^{d_t}.$$

2.24 Invarianti

Si dicono **invarianti** (il sostantivo è di genere maschile) quelle quantità che **non dipendono dalla base**, ovvero che non cambiano quando di passa da una base ad un'altra. Gli invarianti sono anche detti **scalari**.

INV1. Consideriamo l'operatore lineare $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$ e le due basi di E_N , $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$, con: $|e'_k\rangle = \hat{R}|e_k\rangle$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Dette A e A' le matrici che rappresentano l'operatore rispetto alle due basi si ha, per la traccia, la seguente relazione

$$\text{Tr}(A') = \text{Tr}(R^{-1}AR) = (R^{-1}AR)_k^k = (R^{-1})_i^k A_j^l R_k^j = \underbrace{R_k^j (R^{-1})_i^k A_j^l}_{\delta_i^j} = A_j^j = \text{Tr}(A).$$

Ne consegue che la traccia della matrice A , che rappresenta l'operatore \hat{A} rispetto ad una data base, **non dipende dalla base**, è quindi un'invariante per cui ha senso parlare direttamente di **traccia dell'operatore \hat{A}** .

INV2. Anche il **determinante di un operatore è invariante**. Infatti, nelle condizioni del caso precedente, per due rappresentazioni arbitrarie, si ha l'identità

$$\det(A') = \det(R^{-1}AR) = \det(R^{-1}) \det(A) \det(R) = \det(R)^{-1} \det(A) \det(R) = \det(A).$$

2.25 Basi ortonormali

Le rappresentazioni dei vettori e degli operatori di uno spazio vettoriale E_N risultano più semplici ed "immediate" se fatte rispetto ad una base ON, $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$, i cui vettori verificano, quindi, la condizione

$$\langle u_j | u_k \rangle = G_k^j = \delta_k^j, \quad j, k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove G è la matrice di passaggio da componenti controvarianti a componenti covarianti e viceversa. Si aveva cioè

$$a_k = \sum_{j=1}^N G_k^j a^{*j}, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

ON1. $\forall |a\rangle \in E_N, \langle a| \in E_N^*$, si hanno, rispetto alla base ON $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$, le rappresentazioni:

$$|a\rangle \xleftrightarrow{u} a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^N \end{pmatrix}, \quad \langle a| \xleftrightarrow{u} a^\dagger = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N) = (a^*)^T = (a^T)^*.$$

Ovvero le componenti controvarianti sono le complesse coniugate di quelle covarianti

$$a^k = a_k^*, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

ON2. $\forall \langle a| \in E_N^*$ e $\forall |b\rangle \in E_N$, il prodotto scalare può essere scritto come

$$\langle a|b\rangle = \sum_{k=1}^N a^{k*} b^k = a_k b^k = a^\dagger b.$$

Nel caso del prodotto di un vettore, $|a\rangle$, per il suo duale abbiamo

$$\langle a|a\rangle = \sum_{k=1}^N a^{k*} a^k = a_k a^k = a^\dagger a = \sum_{k=1}^N |a^k|^2 = \sum_{k=1}^N |a_k|^2.$$

ON3. La rappresentazione matriciale di un operatore lineare \hat{A} rispetto alla base ON è

$$\hat{A} \xleftrightarrow{u} A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^N \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_N^1 & A_N^2 & \dots & A_N^N \end{pmatrix}, \quad A_j^k = \langle u_k | \hat{A} | u_j \rangle, \quad k, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

La rappresentazione dell'aggiunto \hat{A}^\dagger è

$$\hat{A}^\dagger \xleftrightarrow{u} A^\dagger = \begin{pmatrix} A_1^{\dagger 1} & A_1^{\dagger 2} & \dots & A_1^{\dagger N} \\ A_2^{\dagger 1} & A_2^{\dagger 2} & \dots & A_2^{\dagger N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_N^{\dagger 1} & A_N^{\dagger 2} & \dots & A_N^{\dagger N} \end{pmatrix}, \quad A_j^{\dagger k} = \langle u_k | \hat{A}^\dagger | u_j \rangle = \langle u_j | \hat{A} | u_k \rangle^* = (A_k^j)^*.$$

Quindi, è possibile ottenere la matrice che rappresenta l'aggiunto di un dato operatore, a partire da quella che rappresenta l'operatore stesso rispetto ad una base ON, facendone la **trasposizione** e la **coniugazione complessa**. Poiché queste due operazioni commutano, il risultato non dipende dall'ordine in cui vengono eseguite. In definitiva, se $\hat{A} \xleftrightarrow{u} A$, ovvero se la matrice A rappresenta l'operatore \hat{A} , allora per l'aggiunto avremo: $\hat{A}^\dagger \xleftrightarrow{u} (A^*)^T$. Possiamo definire, **anche al livello matriciale**, l'operazione di coniugazione hermitiana, ovvero

$$A^\dagger = (A^*)^T, \quad (A^\dagger)_j^k = (A_k^j)^*, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Ne consegue che la matrice H , che rappresenta rispetto ad una base ON un operatore hermitiano \hat{H} , ha **gli elementi diagonali reali**. Infatti,

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger \implies H_j^k = (H_k^j)^*, \quad k, j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

per gli elementi della diagonale si ha la relazione (senza somma sottintesa)

$$H_k^k = (H_k^k)^*, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

2.25.1 Cambiamento di base ortonormale

Sia $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ una base ON dello spazio vettoriale E_N , i vettori

$$|e'_k\rangle = \hat{U}|e_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

immagini dei vettori della base tramite l'operatore lineare \hat{U} rappresentano una base ON di E_N \iff l'operatore \hat{U} è unitario.

Dim.: (\implies) Avendo per ipotesi che le due basi sono ON, dimostriamo che la trasformazione che le connette è unitaria. La matrice che rappresenta \hat{U} rispetto alla base ON $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ si ottiene come

$$|e'_k\rangle = \hat{U}|e_k\rangle = U_k^j |e_j\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Allo stesso modo possiamo considerare la rappresentazione del generico vettore $|e'_k\rangle$ rispetto alla base ON $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^N$,

$$|e'_k\rangle = e'_{(k)}^j |e_j\rangle, \quad e'_{(k)}^j = \langle e_j | e'_k \rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove il pedice tra parentesi nelle componenti indica il vettore "primato" che si sta considerando. Dalle precedenti si ottiene l'identità

$$U_k^j = e'_{(k)}^j = \langle e_j | e'_k \rangle, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

ovvero, l'elemento U_k^j della matrice che rappresenta l'operatore \hat{U} , rispetto alla base ON $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^N$, coincide con la componente j -esima del vettore $|e'_k\rangle$, rispetto alla stessa base $\{|e_j\rangle\}_{j=1}^N$. La matrice coniugata hermitiana della U ha elementi

$$(U^\dagger)_k^j = (U^{T*})_k^j = (U^*)_j^k = (e'_{(j)}^k)^* = e'_{(j)k} = \langle e'_j | e_k \rangle, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Per concludere la dimostrazione, usando le espressioni

$$U_k^j = \langle e_j | e'_k \rangle, \quad (U^\dagger)_k^j = \langle e'_j | e_k \rangle, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

calcoliamo i prodotti UU^\dagger e $U^\dagger U$ e verifichiamo che entrambi coincidono con l'identità

$$\begin{aligned} (UU^\dagger)_k^j &= \sum_{m=1}^N \langle e_j | e'_m \rangle \langle e'_m | e_k \rangle = \langle e_j | e_k \rangle = \delta_k^j = I_k^j, \\ (U^\dagger U)_k^j &= \sum_{m=1}^N \langle e'_j | e_m \rangle \langle e_m | e'_k \rangle = \langle e'_j | e'_k \rangle = \delta_k^j = I_k^j, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Il fatto che la matrice che rappresenta l'operatore sia unitaria **implica** l'unitarietà dello stesso operatore. Infatti, come visto, la corrispondenza tra matrice ed operatore è biunivoca e le relazioni operatoriali sono **invarianti**, non dipendono dalla rappresentazione. Quindi la condizione di unitarietà della matrice ottenuta rispetto ad una data base, ad esempio $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, il cui simbolo potremmo indicare a pedice (U_e rappresenta \hat{U} rispetto alla base "e"), cioè $U_e U_e^\dagger = U_e^\dagger U_e = I$, implica la validità della stessa rispetto ad ogni altra base, ovvero

$$U_e U_e^\dagger = U_e^\dagger U_e = I \implies U_f U_f^\dagger = U_f^\dagger U_f = I, \quad \forall \{|f_k\rangle\}_{k=1}^N \text{ base di } E_N.$$

In altri termini, come detto, se la matrice, che rappresenta un operatore rispetto ad una data base, è unitaria **allora** anche l'operatore è unitario. Infatti, se non lo fosse, dovrebbe esistere almeno

una base $\{|s_k\rangle\}_{k=1}^N$, tale che $U_s U_s^\dagger \neq I$ e $U_s^\dagger U_s \neq I$, ma questo è assurdo.

Dim.: (\Leftarrow) Avendo per ipotesi che l'operatore \hat{U} è unitario dimostriamo che i vettori $|e'_k\rangle = \hat{U}|e_k\rangle$, con $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, costituiscono una base ON di E_N . Basta calcolare, $\forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, i prodotti scalari $\langle e'_k | e'_j \rangle$ e verificare la condizione di ortonormalità, si ha infatti

$$\langle e'_k | e'_j \rangle = \langle e_k | \hat{U}^\dagger \hat{U} | e_j \rangle = \langle e_k | e_j \rangle = \delta_j^k,$$

i vettori dell'insieme $\{|e'_k\rangle\}_{k=1}^N$ sono ortonormali e in numero pari alla dimensione dello spazio vettoriale, costituiscono, quindi, una base ON di E_N .

Proprietà della trasformazioni unitarie

Le trasformazioni unitarie hanno le seguenti proprietà.

TU1. Il determinante di un operatore unitario \hat{U} è una fase. Infatti, detta U la matrice che rappresenta l'operatore rispetto ad una base qualsiasi, si ha

$$1 = \det(I) = \det(U^\dagger U) = \det(U^{T*}) \det(U) = \det(U)^* \det(U) = |\det(U)|^2.$$

TU2. La matrice $H' = U^{-1} H U$, trasformata di una matrice hermitiana H tramite una matrice unitaria U , è hermitiana. Si ha infatti

$$H'^\dagger = (U^{-1} H U)^\dagger = U^\dagger H^\dagger (U^{-1})^\dagger = U^\dagger H U = H'.$$

TU3. La matrice $V' = U^{-1} V U$, trasformata di una matrice unitaria V tramite una matrice anch'essa unitaria U , è unitaria. Si ha infatti

$$V'^{-1} = (U^{-1} V U)^{-1} = U^{-1} V^{-1} U = U^\dagger V^\dagger U = (U^\dagger V U)^\dagger = (U^{-1} V U)^\dagger = V'^\dagger.$$