

2.33.6 Continuità e derivazione sotto il segno di integrale

Come visto, se $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset E$ è una successione **convergente puntualmente** ad una funzione $f(x)$ in E e se, inoltre, le sue funzioni sono **assolutamente e uniformemente** limitate da una funzione $g(x) \in L(E)$, che sia cioè sommabile in E , allora il limite può essere portato sotto il segni di integrale,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

ovvero: il limite della successione degli integrali converge all'integrale del limite della successione.

Si hanno allora i due seguenti teoremi.

Teorema di continuità rispetto ad un parametro.

Sia $f(\vec{x}, y) : U \times E \rightarrow R$ una funzione di due variabili, con $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto ($n \in \mathbb{N}$) e tale che:

- $\forall y \in E$, la funzione $f(\vec{x}, y)$ è continua nella variabile $\vec{x} \in U$;
- $\exists g(y) : E \rightarrow R$, **sommabile in E** e tale che: $|f(\vec{x}, y)| \leq g(y)$, $\forall (\vec{x}, y) \in U \times E$,

allora la funzione

$$\phi(\vec{x}) = \int_E f(\vec{x}, y) dy : U \rightarrow R,$$

è **continua**.

Dim.: $\forall \vec{x} \in U$ è possibile definire una successione di $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^\infty \subset U$, con $\vec{x}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{x}$, allora definiamo la successione di funzioni $\{f(\vec{x}_k, y) \equiv F_k(y)\}_{k=1}^\infty$, poniamo $f(\vec{x}, y) = F(y)$, allora, per la continuità in un \vec{x} , si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k, y) = f(\vec{x}, y) \equiv F(y),$$

poiché $|F_k(y)| \leq g(y)$, $\forall k$ e $\forall y \in E$, possiamo usare il teorema precedente per dimostrare che il limite della funzione $\phi(\vec{x}_k)$ coincide, al divergere di k , con $\phi(\vec{x})$, ovvero con il valore della funzione nel punto limite. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E F_k(y) dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f(\vec{x}_k, y) dy \\ &= \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(y) dy = \int_E F(y) dy = \int_E f(\vec{x}, y) dy = \phi(\vec{x}). \end{aligned}$$

Teorema del passaggio della derivata sotto il segno di integrale.

Sia $f(x, y) : (a, b) \times E \rightarrow R$ una funzione di due variabili, tale che:

- la derivata parziale $\partial_x f(x, y)$ esiste $\forall (x, y) \in (a, b) \times E$;
- $\exists g(y) : E \rightarrow R$, **sommabile in E** e tale che: $|\partial_x f(x, y)| \leq g(y)$, $\forall (x, y) \in (a, b) \times E$,

allora la funzione $\phi(x) = \int_E f(x, y) dy$ è **derivabile rispetto alla variabile x** e si ha

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \int_E \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy, \quad \forall x \in (a, b).$$

Dim.: Come nel caso precedente, poiché l'intervallo (a, b) è aperto, $\forall x \in (a, b)$ è sempre possibile definire una successione $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (a, b)$, tale che: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$. In corrispondenza di tale successione costruiamo la successione di funzioni $\{F_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ con

$$F_k(y) = \frac{f(x_k, y) - f(x, y)}{x_k - x}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Questa successione converge puntualmente alla derivata parziale rispetto alla variabile x della funzione $f(x, y)$, in particolare si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \equiv F(y).$$

Per poter applicare il teorema del passaggio del limite sotto il segno di integrale, dovremmo verificare la limitazione assoluta e uniforme: $|F_k(y)| \leq g(y)$, $\forall (k, y) \in \mathbb{N} \times E$. A tal fine usiamo il **teorema della media** per la funzione $f(x, y)$ nella variabile x . Infatti, l'esistenza della derivata parziale $\forall x \in (a, b)$ implica che, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists \bar{x}_k \in (x_k, x)$, dipendente da y , tale che

$$\frac{f(x_k, y) - f(x, y)}{x_k - x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}_k}.$$

Infine, dalla limitazione della derivata parziale si evince quella per le funzioni della successione $\{F_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$

$$|F_k(y)| = \left| \frac{f(x_k, y) - f(x, y)}{x_k - x} \right| = \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}_k} \leq g(y).$$

Ne consegue che per la derivata della funzione $\phi(x)$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi(x_k) - \phi(x)}{x_k - x} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \frac{f(x_k, y) - f(x, y)}{x_k - x} dy \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E F_k(y) dy = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(y) dy = \int_E F(y) dy = \int_E \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy. \end{aligned}$$

2.33.7 La funzione di Dirichlet

La funzione di Dirichlet (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 13 febbraio 1805 - 5 maggio 1859, Germania)

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

è integrabile à la Lebesgue in ogni insieme E misurabile. Infatti, poiché $\forall E \subset \mathbb{R}$ misurabile è sempre possibile considerare la partizione in razionali e irrazionali, cioè

$$E = E_R \cup E_I, \quad E_R \cap E_I = \emptyset \quad \implies \quad \mu(E) = \mu(E_R) + \mu(E_I) = \mu(E_I),$$

dove $E_R = E \cap \mathbb{Q}$ e $E_I = E \setminus E_R$, per l'integrale su tale insieme della funzione di Dirichlet si ha

$$\int_E D(x) dx = \int_{E_R} D(x) dx + \int_{E_I} D(x) dx = \mu(E_R) = 0,$$

l'ultima identità segue dal fatto che E_R è un insieme di numeri razionali, è quindi misurabile e ha misura nulla.

2.33.8 Funzioni quasi dappertutto nulle

Si definisce **funzione quasi dappertutto nulla (QDN)** ogni $f(x)$ **limitata**, che sia nulla in tutto il suo dominio privato dei punti di un insieme di misura nulla.

Proposizione. Sia $f(x)$ una funzione QDN definita in un insieme misurabile E , allora

$$\int_E f(x) dx = \int_E |f(x)|^2 dx = 0.$$

Dim.: Indichiamo con E_1 ed E_2 i sottoinsiemi disgiunte di E in cui, rispettivamente, la funzione sia nulla ed assuma valori diversi da zero e finiti. Per ipotesi: $\mu(E_2) = 0$ e $\mu(E_1) = \mu(E)$. Per il modulo dell'integrale, usando la disuguaglianza di Darboux, si ha la seguente limitazione

$$0 \leq \left| \int_E f(x) dx \right| = \left| \int_{E_2} f(x) dx \right| \leq \max_{x \in E_2} \{|f(x)|\} \underbrace{\mu(E_2)}_{=0} = 0,$$

da cui l'annullamento del primo integrale. Per il secondo usiamo il teorema della media per la funzione integranda $|f(x)|^2$, per cui si ha

$$0 \leq \int_E |f(x)|^2 dx = \int_{E_2} |f(x)|^2 dx = \overline{|f|^2} \underbrace{\mu(E_2)}_{=0} = 0.$$

dove $\overline{|f|^2}$ rappresenta il valore medio della funzione $|f(x)|^2$, $\forall x \in E_2$.

Consideriamo una generica funzione limitata $f(x)$, definita nell'insieme $E = E_1 \cup E_2 \subset \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in E_1 \\ \neq 0 & x \in E_2 \end{cases},$$

allora per il modulo quadro si ha

$$|f(x)|^2 = \begin{cases} 0 & x \in E_1 \\ > 0 & x \in E_2 \end{cases}.$$

Segue che, se l'integrale $|f(x)|^2$ in E è nullo, allora la funzione è una QDN. Infatti, usando il teorema della media, si ha

$$0 = \int_E |f(x)|^2 dx = \int_{E_2} |f(x)|^2 dx = \underbrace{\overline{|f|^2}}_{>0} \mu(E_2) \implies \mu(E_2) = 0,$$

la funzione è una QDN, essendo diversa da zero solo sui punti dell'insieme a misura nulla E_2 .

Teorema. Una funzione limitata $f(x)$ definita in un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$, è una funzione QDN $\iff \forall E'$ misurabile, con $E' \subset E$, si ha

$$\int_{E'} f(x) dx = 0.$$

Dim.: (\implies) Se $f(x)$ è una funzione limitata e QDN in E , si ha, $\forall E' \subset E$, la disuguaglianza di Schwarz

$$0 \leq \left| \int_{E'} f(x) dx \right|^2 \leq \int_{E'} |f(x)|^2 dx \int_{E'} dx = \mu(E') \int_{E'} |f(x)|^2 dx \leq \mu(E') \underbrace{\int_E |f(x)|^2 dx}_{=0} = 0.$$

Dim.: (\Leftarrow) Si ha, per ipotesi, che l'integrale della funzione su qualsiasi sottoinsieme è nullo. Dividiamo l'insieme E in tre sottoinsiemi disgiunti: $E = E_+ \cup E_0 \cup E_-$, dove la funzione assume, rispettivamente valori: positivi, nulli e negativi, cioè

$$f(x) \begin{cases} > 0 & x \in E_+ \\ = 0 & x \in E_0 \\ < 0 & x \in E_- \end{cases} .$$

Gli integrali sui tre sottoinsiemi sono nulli per ipotesi, in particolare

$$0 = \int_{E_{\pm}} f(x) dx = \bar{f}_{\pm} \mu(E_{\pm}) \implies \mu(E_{\pm}) = 0,$$

l'implicazione è conseguenza del fatto che i valori medi della funzione negli insiemi E_{\pm} , ovvero \bar{f}_{\pm} , sono non nulli, infatti, per definizione, $\bar{f}_+ > 0$, $\bar{f}_- < 0$. Ne consegue che $f(x)$ è una funzione QDN, essendo non nulla e limitata solo sui punti dell'insieme a misura nulla $E_+ \cup E_-$.

2.33.9 Funzioni a quadrato sommabili

Sia $f(x)$ una funzione complessa a valori reali definita nell'insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$, se **esiste** ed è **finito** l'integrale

$$\int_E |f(x)|^2 p(x) dx,$$

allora la funzione $f(x)$ appartiene alla classe delle funzioni **a quadrato sommabili in E** , rispetto alla funzione peso $p(x)$ (limitata, integrabile, reale e non negativa) e tale classe si indica con $L_p^2(E)$.

Proposizione. Se $f(x) \in L_p^2(E)$, con E limitato allora $f(x) \in L_p(E)$, ovvero $L_p^2(E) \subset L_p(E)$.

Dim.: Una funzione si dice **sommabile** in E , ovvero $f(x) \in L_p(E)$, $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\left| \int_E f(x) p(x) dx \right| < \infty.$$

Allora, $\forall f(x) \in L_p^2(E)$, usando le disuguaglianze di Darboux e di Schwarz si ottiene l'asserto, infatti

$$\left| \int_E f(x) p(x) dx \right|^2 \leq \left(\int_E |f(x)| p(x) dx \right)^2 < \underbrace{\int_E |f(x)|^2 p(x) dx}_{< \infty \iff f(x) \in L_p^2(E)} \int_E p(x) dx < \infty.$$

Teorema. La classe delle funzioni a quadrato sommabili $L_p^2(E)$ rappresenta uno spazio vettoriale.

Dim.: Verifichiamo le proprietà richieste.

SVL1. Moltiplicazione per uno scalare: $\forall f(x) \in L_p^2(E)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\int_E |\alpha f(x)|^2 p(x) dx = |\alpha|^2 \int_E |f(x)|^2 p(x) dx < \infty \implies \alpha f(x) \in L_p^2(E).$$

SVL2. Somma: $\forall f(x), g(x) \in L_p^2(E)$,

$$\begin{aligned} \int_E |f(x) + g(x)|^2 p(x) dx &= \int_E |f(x)|^2 p(x) dx + \int_E |g(x)|^2 p(x) dx \\ &\quad + 2 \int_E \operatorname{Re}[f(x)g^*(x)] p(x) dx, \end{aligned}$$

i primi due termini del secondo membro sono finiti poiché le funzioni sono a quadrato sommabili. Per l'ultimo termine usiamo la disuguaglianza di Schwarz

$$\begin{aligned} \left(\int_E \operatorname{Re}[f(x)g^*(x)] p(x) dx \right)^2 &\leq \left| \int_E f(x)g^*(x) p(x) dx \right|^2 \\ &\leq \underbrace{\int_E |f(x)|^2 p(x) dx}_{< \infty} \underbrace{\int_E |g(x)|^2 p(x) dx}_{< \infty} < \infty. \end{aligned}$$

Ne consegue che: $f(x) + g(x) \in L_p^2(E)$.

SVL3. Esiste l'elemento nullo ed è la funzione QDN, in particolare, per ogni funzione QDN $f(x)$, si ha che anche $|f(x)|^2 p(x)$ è una funzione QDN.

SVL4. Interpretando le funzioni $f(x)$ di $L_p^2(E)$ come rappresentazioni di vettori astratti $|f\rangle$ di uno spazio vettoriale L^2 a dimensione infinita e continua, definiamo il prodotto scalare come segue: $\forall |g\rangle \in L^2$ e $\forall |f\rangle \in L^{2*}$, con $|g\rangle \leftrightarrow g(x)$ e $|f\rangle \leftrightarrow f(x)$, ovvero $\langle f| \leftrightarrow f^*(x)$, quindi $f(x), g(x) \in L_p^2(E)$,

$$\langle f|g\rangle = \int_E f^*(x)g(x)p(x)dx = \langle g|f\rangle^*.$$

Il prodotto è finito, infatti per la disuguaglianza di Schwarz

$$|\langle f|g\rangle|^2 = \left| \int_E f^*(x)g(x)p(x)dx \right|^2 \leq \int_E |f(x)|^2 p(x)dx \int_E |g(x)|^2 p(x)dx < \infty.$$

SVL5. La metrica è indotta dal prodotto scalare, per cui, $\forall |f\rangle \in L^2$ e quindi $\forall f(x) \in L_p^2(E)$, si definisce norma di $f(x)$

$$0 \leq \|f\| \equiv \sqrt{\langle f|f\rangle} = \left[\int_E |f(x)|^2 p(x)dx \right]^{1/2} < \infty.$$

N.B.: La rappresentazione dello spazio vettoriale astratto L^2 attraverso le funzioni di $L_p^2(E)$ **non è univoca**. Infatti, $\forall |f\rangle \in L^2$, esistono infinite funzioni $f(x) \in L_p^2(E)$ tali che: $|f\rangle \leftrightarrow f(x)$. La differenza tra una qualsiasi coppia di tali funzioni è una funzione QDN.

2.33.10 Completezza di $L_p^2(E)$

Sia $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ una successione di funzioni di $L_p^2(E)$, si dice che la successione **converge in media** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists f(x) \in L_p^2(E)$, tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^2 p(x)dx = 0.$$

La funzione limite $f(x)$ **non è unica**, è infatti definita meno di una funzione QDN. Dal limite precedente si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f_k(x) - f(x)) = q(x),$$

dove $q(x)$ è una funzione QDN. Si definisce il **limite in media** e si indica con il simbolo l.i.m. la relazione

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x).$$

Questa scrittura indica che la successione $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ **converge in media** alla funzione $f(x)$. Ovvero che, nel limite $k \rightarrow \infty$, la funzione $f_k(x)$ tende **quasi dappertutto in E alla funzione $f(x)$** , cioè, il limite della successione non coincide con la funzione $f(x)$ solo nei punti di un sottoinsieme di E che ha misura nulla. La convergenza puntuale implica quella in media, è falsa l'affermazione contraria.

Teorema di Weyl. (Hermann Klaus Hugo Weyl, 9 novembre 1885 - 8 dicembre 1955, Germania)
Lo spazio vettoriale $L_p^2(E)$ è completo, ovvero ogni successione di Cauchy di suoi elementi converge.

Dimostriamo che ogni successione di $L_p^2(E)$ converge \iff è una successione di Cauchy.

Dim.: (\Leftarrow) Si ha per ipotesi che $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy, ovvero che: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$, tale che,

$$\|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^k} \quad \forall m, n \geq n_k,$$

con, senza perdita di generalità, n_k monotono crescente, ovvero tale che: $n_{j+1} > n_j$. Si definisce così la sotto-successione $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Dimostriamo che tale sotto-successione converge. Costruiamo la successione accessoria $\{g_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ come

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_{n_1}(x) \\ g_2(x) &= f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x) \\ &\dots \quad \dots \\ g_j(x) &= f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x) \\ &\dots \quad \dots, \end{aligned}$$

in modo tale che la somma delle prime k funzioni sia

$$f_{n_k}(x) = \sum_{j=1}^k g_j(x).$$

La serie dei termini $g_j(x)$, con $j \in \mathbb{N}$, converge, infatti si ha

$$0 \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\| = \|g_1\| + \sum_{j=2}^{\infty} \|f_{n_j} - f_{n_{j-1}}\| < \|g_1\| + 1 < \infty,$$

ne consegue che esistono infinite funzioni che rappresentano la **somma in media** della serie, ovvero $\exists f(x) \in L_p^2(E)$, tale che

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j(x) \stackrel{\text{in media}}{=} f(x).$$

Le infinite $f(x)$ che verificano questa identità differiscono per funzioni QDN. In altri termini, la convergenza in media della serie equivale alla convergenza in media della successione delle somme parziali

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k g_j(x) = \text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x).$$

Infine, verifichiamo che la convergenza, ad una funzione $f(x)$, di una sotto-successione di una successione di Cauchy implica la convergenza della successione completa alla stessa funzione $f(x)$, questo conclude la dimostrazione. La convergenza della sotto-successione $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ implica che: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tale che,

$$\|f_{n_k} - f\| < \varepsilon/2, \quad \forall n_k \geq n_\varepsilon,$$

mentre per la condizione di Cauchy, $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tale che

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon/2, \quad \forall m, n \geq k_\varepsilon.$$

Ne consegue che: $\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, tale che

$$\|f_k - f\| \leq \|f_k - f_{n_j}\| + \|f_{n_j} - f\| < \varepsilon, \quad \forall k, n_j \geq m_\varepsilon,$$

e quindi la successione converge, ovvero

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x).$$

Dim.: (\implies) Per ipotesi la successione $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ converge in media alla funzione $f(x)$, dimostriamo che è una successione di Cauchy. La condizione di convergenza implica che: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tale che

$$\|f_k - f\| < \varepsilon/2, \quad \forall k \geq n_\varepsilon.$$

Allora, $\forall m, n \geq n_\varepsilon$ si ha

$$\|f_m - f_n\| \leq \|f_m - f\| + \|f_n - f\| < \varepsilon,$$

quindi la successione è di Cauchy.