

### 2.33 Misura e integrazione à la Lebesgue

La procedura di integrazione alla Lebesgue (Henri Léon Lebesgue, 28 giugno 1875 - 26 luglio 1941, Francia) si basa sul concetto di **misura** di un insieme. Nel caso banale di un intervallo reale  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  la misura coincide con la lunghezza. Formalmente scriviamo

$$\mu[(a, b)] = b - a = L$$

dove con  $\mu(M)$  indichiamo la misura dell'insieme  $M$ .

In generale, per un qualsiasi insieme  $M$  di punti di  $\mathbb{R}$  si definisce **misura di  $M$**  il numero reale  $\mu(M)$  che verifica le seguenti condizioni:

M1.  $\mu(M) \geq 0$ . In particolare se  $M = \emptyset$  allora  $\mu(M) = 0$ , mentre non è vero il contrario, cioè un insieme non vuoto potrebbe avere misura nulla.

M2. Se  $M$  è un insieme **continuo** di punti, quindi un intervallo, allora la sua misura coincide con la lunghezza:  $\mu(M) = L$ .

M3. Vale la proprietà **additiva**.

$\forall M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$  si hanno

- $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$  se  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ ;
- in generale:  $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1 \cap M_2)$ ;
- se  $M = \bigcup_{k=1}^N M_k$ , allora:  $\mu(M) \leq \sum_{k=1}^N \mu(M_k)$ , l'identità vale se gli insiemi **sono tutti disgiunti**.

M4. La misura è **invariante** per **traslazioni** e **riflessioni**. Si ha che,  $\forall M \subset \mathbb{R}$ , indichiamo con  $M_t$  l'insieme traslato di  $t$  e con  $M_r$  l'insieme riflesso rispetto a  $r$ , ovvero

$$M_t = \{x : x - t \in M\}, \quad M_r = \{x : 2r - x \in M\},$$

si hanno:  $\mu(M_t) = \mu(M_r) = \mu(M)$ .

#### 2.33.1 Misura à la Lebesgue

Sia  $M \subset (a, b) \subset \mathbb{R}$ , ovvero  $M$  è un insieme di punti dell'intervallo reale  $(a, b)$ . Definiamo **complementare** di  $M$  in  $(a, b)$  l'insieme  $M'$ , tale che

$$M \cup M' \equiv (a, b), \quad M \cap M' = \emptyset.$$

Ne consegue che

$$\mu(M \cup M') = \mu(M) + \mu(M') = b - a = L, \quad \mu(M), \mu(M') \leq L.$$

**Def.:** Si definisce **copertura** di  $M$  un insieme di intervalli  $\{D_k\}_{k=1}^n \subset (a, b)$  la cui unione contiene, ovvero copre, lo stesso insieme  $M$ . Quindi si ha

$$M \subset \bigcup_{k=1}^n D_k \equiv D, \quad \mu(D) \leq \sum_{k=1}^n \mu(D_k) \equiv \sum_{k=1}^n d_k, \quad \mu(D) \leq L,$$

dove:  $d_k = \mu(D_k)$ .

**Def.:** La misura **esterna** di un insieme  $M \subset (a, b)$  è

$$\mu_{\text{est}}(M) \equiv \min_{\{D_k\}} \left\{ \mu \left( \bigcup_{k=1}^n D_k \right) \right\} \leq L,$$

dove il minimo è inteso al variare di tutte le possibili coperture dell'insieme  $M$ .

**Def.:** La misura **interna** di  $M \subset (a, b)$  è data dalla differenza tra la lunghezza dell'intervallo,  $L$ , e la misura esterna del complementare  $M'$ ,

$$\mu_{\text{int}}(M) = L - \mu_{\text{est}}(M') \leq L.$$

Si vede facilmente che

$$L \leq \mu_{\text{est}}(M) + \mu_{\text{est}}(M') \implies \mu_{\text{int}}(M) = L - \mu_{\text{est}}(M') \leq \mu_{\text{est}}(M),$$

e quindi vale la disuguaglianza

$$0 \leq \mu_{\text{int}}(M) \leq \mu_{\text{est}}(M) \leq L.$$

Si dice che l'insieme  $M$  è **misurabile à la Lebesgue quando la misura interna ed esterna coincidono**. Il valore comune rappresenta la misura di  $M$ ,

$$\mu(M) = \mu_{\text{int}}(M) = \mu_{\text{est}}(M).$$

### 2.33.2 Insiemi numerabili

Un insieme si dice numerabile quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i suoi elementi ed i numeri naturali.

**Proposizione.** Un insieme numerabile è misurabile à la Lebesgue e la sua misura è nulla.

**Dim.:** Sia  $M$  un insieme numerabile, ovvero  $M = \{x_1, x_2, \dots\}$ , costruiamo una copertura  $\{D_k\}$  come segue:  $\forall \varepsilon > 0$

$$D_k = \left(x_k - \frac{\varepsilon_k}{2}, x_k + \frac{\varepsilon_k}{2}\right), \quad \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Ciascun intervallo  $D_k$  contiene almeno il punto  $x_k$  di  $M$  ed ha misura, ovvero lunghezza,  $d_k = \varepsilon_k < \varepsilon/2^k$ . La misura della copertura è limitata superiormente da  $\varepsilon$ , infatti

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) = \mu(D) \leq \sum_{k=1}^{\infty} d_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon, .$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  si ha

$$\mu(D) = 0 \implies \mu_{\text{est}}(M) = \min_{\{D_k\}} [\mu(D)] = 0,$$

ma, poiché:  $0 \leq \mu_{\text{int}}(M) \leq \mu_{\text{est}}(M)$ , le misure esterna e interna coincidono e sono nulle, per cui l'insieme è misurabile e ha la sua misura è nulla, cioè

$$\mu(M) = \mu_{\text{int}}(M) = \mu_{\text{est}}(M) = 0.$$

Un esempio notevole è quello dell'insieme dei numeri razionali contenuti nell'intervallo reale  $(a, b)$ , ovvero  $M = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ , tale insieme è numerabile e quindi ha misura nulla. Il suo complementare  $M'$ , che contiene gli irrazionali dell'intervallo  $(a, b)$ , è anch'esso misurabile ed ha misura pari alla lunghezza  $L$  dell'intervallo  $(a, b)$ , infatti

$$\mu(M') = L - \mu(M) = L.$$

**Un insieme non misurabile à la Lebesgue**

Consideriamo in dettaglio un esempio di insieme non misurabile à la Lebesgue, concepito dai matematici Walter Rudin (2 maggio 1921 - 20 maggio 2010, USA) e L. Halsey Royden (26 settembre 1928 - 22 agosto 1993, USA).

Indichiamo rispettivamente con  $I(a, b)$  e  $R(a, b)$  gli insiemi dei numeri irrazionali e razionali contenuti nell'intervallo  $(a, b)$ .

Sia  $S$  l'insieme dei punti di  $I(1, 2)$  che verificano la seguente condizione: se  $x \in S$ , allora un generico  $y \in I(1, 2)$  appartiene anch'esso a  $S$  se e solo se  $(x - y) \notin \mathbb{Q}$ . In altri termini, l'insieme  $S$  è costituito dagli elementi di  $I(1, 2)$  che hanno differenze irrazionali. Dimostriamo che un tale insieme **non è misurabile à la Lebesgue**.

**Dim.:** Consideriamo due generici numeri razionali  $r_i, r_j \in \mathbb{Q}$  con  $r_i \neq r_j$ , allora

$$(r_i + S) \cap (r_j + S) = \emptyset,$$

dove l'insieme  $(r_i + S)$  è definito come

$$(r_i + S) = \{x : (x - r_i) \in S\}.$$

I due insiemi  $(r_i + S)$  e  $(r_j + S)$  sono disgiunti poiché contengono punti che hanno differenze razionali. Supponiamo, infatti, che esista un punto  $x$  comune ad entrambi, ovvero tale che  $x \in (r_i + S) \cup (r_j + S)$ , ciò implica sia:  $(x - r_i) \in S$ , che  $(x - r_j) \in S$ . I due punti  $(x - r_i)$  e  $(x - r_j)$  appartenendo ad  $S$  devono avere differenza irrazionale, ma invece si ha

$$(x - r_i) - (x - r_j) = (r_j - r_i) \in \mathbb{Q}.$$

Ne consegue che come detto gli insiemi  $(r_i + S)$  e  $(r_j + S)$  sono disgiunti.

Consideriamo ora  $R(-1, 1)$ , l'insieme dei razionali compresi in  $(-1, 1)$ , poiché i numeri razionali sono numerabili, scriviamo esplicitamente

$$R(-1, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Dimostriamo che vale la seguente inclusione

$$I(1, 2) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (S + r_k) \subset I(0, 3).$$

La seconda inclusione è ovvia: i punti di  $S$  sono tutti irrazionali, la somma di un irrazionale e un razionale dà un irrazionale e si hanno

$$\begin{aligned} \max_{x \in S} \{x\} < 2, & \quad \max_{r_k \in R(1,2)} \{r_k\} < 1 & \implies & \quad \max_{x \in S, r_k \in R(-1,1)} \{x + r_k\} < 3 \\ \min_{x \in S} \{x\} > 1, & \quad \min_{r_k \in R(1,2)} \{r_k\} > -1 & \implies & \quad \min_{x \in S, r_k \in R(-1,1)} \{x + r_k\} > 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo la prima inclusione. Consideriamo due casi.

- $x \in I(1, 2)$  e  $x \in S$ , allora  $x \in (S + 0)$ , ovvero si l'inclusione con
- $x \in I(1, 2)$  e  $x \notin S$ . Se  $x$  non appartiene ad  $S$  significa che esiste un **unico**  $y \in S$ , tale che:  $(x - y) \in \mathbb{Q}$ . Non possono esistere due poiché avrebbero differenza razionale, il che è assurdo. Infatti se esistessero  $y, y' \in S$  tali che

$$(x - y) \in \mathbb{Q}, \quad (x - y') \in \mathbb{Q}, \quad \implies \quad (x - y) - (x - y') = (y' - y) \in \mathbb{Q},$$

mentre se  $y, y' \in S$  si deve avere  $(y' - y) \notin \mathbb{Q}$ .

Si ha quindi che

$$x - y = r_m \in \mathbb{Q} \quad \implies \quad x \in (S + r_m),$$

infatti,  $(x - r_m) = y \in S$ . Il numero razionale  $r_m$  è la differenza tra due elementi di  $I(1, 2)$ , quindi è compreso tra -1 e 1, ovvero:  $r_m \in R(-1, 1)$ . Abbiamo dimostrato la seconda inclusione.

Per le misure dei tre insiemi si hanno le disuguaglianze

$$\mu [I(1, 2)] \leq \mu \left[ \bigcup_{k=1}^{\infty} (S + r_k) \right] \leq \mu [I(0, 3)].$$

Si hanno

- $\mu [I(1, 2)] = 1$ ;
- $\mu [I(0, 3)] = 3$ ;
- $\mu \left[ \bigcup_{k=1}^{\infty} (S + r_k) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S + r_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S)$ .

Abbiamo utilizzato il fatto che gli insiemi  $(S + r_k)$  sono disgiunti e che la misura è invariante per traslazione, ovvero  $\mu(S + r_k) = \mu(S)$ .

La disuguaglianza tra le misure è quindi

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S) \leq 3.$$

Poiché in generale se la misura di un insieme esiste, ovvero se l'insieme è misurabile, tale misura è non negativa, possiamo distinguere due casi possibili:  $\mu(S) = 0$  e  $\mu(S) > 0$  per i quali avremmo rispettivamente le disuguaglianze

$$1 \leq 0 \leq 3, \quad 1 \leq \infty \leq 3.$$

Entrambe sono assurde, l'insieme  $S$  **non è quindi misurabile**.

### 2.33.3 Integrazione à la Lebesgue

L'integrazione à la Riemann ha evidenti problemi quando si considera il limite degli integrali delle funzioni di una successione convergente e l'integrale della funzione limite. Ad esempio, si consideri la successione  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , di funzioni continue a tratti nell'intervallo  $[0, 1]$ , con

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_k\} \\ 0 & \text{altrove in } [0, 1] \end{cases},$$

dove l'insieme  $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  contiene i primi  $k$  numeri razionali dell'intervallo  $[0, 1]$ , secondo un ordinamento fissato. Tutte le funzioni della successione sono Riemann-integrabili nell'intervallo  $[0, 1]$ , avendo solo un numero finito di punti di discontinuità, e si ha,  $\forall k$ ,

$$\int_0^1 f_k(x) dx = 0.$$

La successione converge alla funzione di Dirichlet (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 13 febbraio 1805 - 5 maggio 1859, Germania)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{altrove in } [0, 1] \end{cases},$$

che vale uno su razionali e zero altrove. Tale funzione è discontinua **ovunque** in  $[0, 1]$  e quindi **non è Riemann-integrabile**. In altri termini, il limite dell'integrale esiste e vale zero, mentre non esiste l'integrale del limite.

### 2.33.4 Il metodo di Lebesgue

**Integrazione di Riemann.** Sia  $f(x)$  una funzione continua nel dominio  $(a, b)$ , data la partizione  $\{x_j\}_{j=0}^N$ , con  $x_0 = a$  e  $x_N = b$ , in ogni intervallo  $(x_{j-1}, x_j)$  si considera un valore della funzione  $f(w_j)$ ,  $x_{j-1} < w_j < x_j$ , come rappresentativo della funzione, così l'area dell'istogramma  $\{x_j, f(w_j)\}_{j=1}^N$ , data dalla somma

$$\sum_{j=1}^N f(w_j)(x_j - x_{j-1}),$$

rappresenta un'approssimazione dell'area sottesa alla curva, ovvero dell'integrale vero e proprio. Infine, nel limite di una partizione sempre più fine, si ottiene l'integrale di Riemann, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x_{\max} \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x) dx,$$

dove  $\Delta x_{\max} = \max_{j=1, \dots, N} \{x_j - x_{j-1}\}$ .

**Integrazione di Lebesgue.** Sia  $f(x)$  una funzione definita e **limitata** nell'insieme  $E \subset \mathbb{R}$ , ovvero:  $\exists m, M$ , con  $m, M \in (-\infty, \infty)$ , tali che

$$m \leq f(x) \leq M,$$

$\forall x \in E$ . L'intervallo  $(m, M)$  contiene tutti i valori che la funzione assume al variare di  $x$  nel dominio  $E$ . Consideriamo la partizione di tale intervallo  $(m, M)$ ,  $P_r = \{r_0 = m, r_1, \dots, r_{N-1}, r_N = M\}$ , e indichiamo con  $E_j \subset E$  l'insieme immagine di  $(r_{j-1}, r_j)$  tramite  $f^{-1}$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Allora, se,  $\forall P_r, \exists \mu(E_j)$ , con  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , ovvero se ogni insieme  $E_j$  di ogni partizione è **misurabile**, si dice che la funzione è essa stessa **misurabile in  $E$** . Indicando con  $f_j \in (r_{j-1}, r_j)$  il valore che rappresenta la funzione per  $x \in E_j$ , **tale valore deve esistere in ogni intervallo per avere l'integrabilità à la Lebesgue**, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\mu_{\max} \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N f_j \mu(E_j) = \int_E f(x) dx.$$

Questa quantità si chiama **integrale à la Lebesgue** della funzione  $f(x)$  sull'insieme  $E$ . Se l'integrale esiste si dice che la funzione è **sommabile in  $E$** . La classe di funzione sommabili nell'insieme  $E$  si indica con  $L(E)$ , dove la lettera  $l$  e maiuscola sta per Lebesgue.

### 2.33.5 Proprietà dell'integrale à la Lebesgue

L1. Sia la funzione  $f(x)$  Riemann-integrabile in  $(a, b)$ , allora è anche integrabile à la Lebesgue e i due integrali coincidono, cioè

$$\int_E^{(\text{Riemann})} f(x) dx = \int_E^{(\text{Lebesgue})} f(x) dx.$$

L2. L'integrale à la Lebesgue è lineare nella funzione integranda, ovvero,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  e  $\forall f(x), g(x) \in L(E)$ , si ha

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_E f(x) dx + \beta \int_E g(x) dx.$$

L3. Dati gli insiemi  $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ , con:  $E_1 \cup E_2 = E$  e  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , allora,  $\forall f(x) \in L(E)$ ,

$$\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx.$$

L4. Vale il teorema della media,  $\forall f(x) \in L(E)$ ,  $\exists \bar{f}_E \in \left( \min_{x \in E} \{f(x)\}, \max_{x \in E} \{f(x)\} \right)$ , tale che

$$\int_E f(x) dx = \bar{f}_E \mu(E).$$

L5. Si ha la maggiorazione con la disuguaglianza di Darboux:

$$\left| \int_E f(x) dx \right| \leq M \mu(E), \quad M = \max_{x \in E} \{|f(x)|\}.$$

L6. Infine, la disuguaglianza di Schwarz,  $\forall f(x), g(x)$  tali che siano sommabili in  $E$  il prodotto  $f(x)g(x)$  e i moduli quadri, ovvero  $f(x)g(x), |f(x)|^2, |g(x)| \in L(E)$ , allora

$$\left| \int_E f(x)g(x) dx \right|^2 \leq \int_E |f(x)|^2 dx \int_E |g(x)|^2 dx.$$

**Teorema del passaggio al limite.** Sia  $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L(E)$  una successione di funzioni **sommabili** nell'insieme  $E$  ed ivi **uniformemente limitate in modulo**, cioè:  $\exists M > 0$ , tale che

$$|f_k(x)| \leq M \quad \forall k, \forall x \in E,$$

allora, se la successione convergente **puntualmente** a  $f(x)$  in  $E$ , cioè:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x),$$

si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

È importante osservare che, per la validità del teorema, è sufficiente la **limitatezza uniforme** e quindi non è richiesta la convergenza uniforme. Inoltre, si può rilassare anche quest'ultima condizione, richiedendo l'esistenza di una funzione  $\phi(x) \in L(E)$ , cioè sommabile in  $E$ , che limiti uniformemente il modulo di tutte le funzioni della successione, cioè:

$$|f_k(x)| \leq \phi(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in E.$$

**Dim.:** Dalla convergenza e limitatezza della successione si evince che

$$|f_k(x)| \leq M \quad \implies \quad |f(x)| \leq M.$$

Ciò significa che anche  $f(x)$  è sommabile. Definiamo la successione  $\{g_k(x)\}_{k=1}^\infty$ , con

$$g_k(x) = |f_k(x) - f(x)| \geq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

e,  $\forall \varepsilon > 0$ ), la partizione di  $E$ ,  $P_\varepsilon = \{E_1, E_2, \dots\}$  con gli insiemi  $E_k$  definiti secondo le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in E : \varepsilon > g_1(x), g_2(x), \dots\} \\ E_2 &= \{x \in E : g_1(x) \geq \varepsilon > g_2(x), g_3(x), \dots\} \\ &\dots \quad \dots \\ E_n &= \{x \in E : g_{n-1}(x) \geq \varepsilon > g_n(x), g_{n+1}(x), \dots\} \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Gli insiemi  $E_n$  sono disgiunti, ovvero  $\forall k, l \in \mathbb{N}$ , con  $k > l$ , avremo

$$\begin{aligned} E_k &= \{x \in E : g_{k-1}(x) \geq \varepsilon > g_k(x), g_{k+1}(x), \dots\} \\ E_l &= \{x \in E : g_{l-1}(x) \geq \varepsilon > g_l(x), g_{l+1}(x), \dots, g_{k-1}(x), \dots\}, \end{aligned}$$

quindi, se  $\exists x \in E_k \cap E_l$  si hanno le due condizioni mutuamente esclusive

$$\begin{aligned} x \in E_k &\implies g_{k-1}(x) \geq \varepsilon \\ x \in E_l &\implies g_{k-1}(x) < \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui si deduce la non esistenza di elementi comuni e quindi:  $E_k \cap E_l = \emptyset$ .

Poiché, per costruzione, si ha il limite **puntuale**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = 0, \quad \forall x \in E,$$

in corrispondenza dello stesso numero  $\varepsilon > 0$  che definisce la partizione,  $\exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , tal che

$$|g_k(x)| = g_k(x) < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0(\varepsilon), \implies x \in E_k \implies E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Ma, gli insiemi  $E_k$  sono tutti sottoinsiemi di  $E$ , quindi vale anche l'inclusione opposta:  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset E$ , quindi si ha

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \equiv E.$$

In definitiva, abbiamo dimostrato che  $P_\varepsilon = \{E_1, E_2, \dots\}$  è una partizione di  $E$  e quindi che la misura di  $E$  è la somma delle misure degli  $E_k$ , in quanto si tratta di insiemi disgiunti, cioè

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Inoltre,  $\forall f(x) \in L(E)$ ,

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx.$$

Infine, per la generica funzione  $g_k(x)$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , sempre in corrispondenza dello stesso valore di  $\varepsilon > 0$  da cui dipende la partizione  $P_\varepsilon$ , si hanno le seguenti limitazioni

$$|g_k(x)| = g_k(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_k,$$

e in generale, usando la disuguaglianza triangolare,

$$|g_k(x)| = |f_k(x) - f(x)| \leq |f_k(x)| + |f(x)| \leq 2M, \quad \forall x \in E.$$

L'integrale della generica funzione  $g_k(x)$  sull'insieme  $E$  può essere quindi maggiorato alla luce dei precedenti risultati, per cui si ha

$$\begin{aligned} \int_E g_k(x) dx &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} g_k(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{E_j} g_k(x) dx + \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{E_j} g_k(x) dx \\ &< \varepsilon \sum_{j=1}^k \mu(E_j) + 2M \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu(E_j), \end{aligned}$$

nel limite  $k \rightarrow \infty$ , la serie tende a zero in quanto il limite inferiore converge a quello superiore, mentre la somma tende alla serie, poiché il limite superiore diverge. Si ottiene allora la disuguaglianza che implica, nel limite  $k \rightarrow \infty$ , l'annullamento dell'integrale, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx < \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \varepsilon \mu(E) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = 0.$$

Il teorema è quindi dimostrato, infatti, usando la disuguaglianza di Darboux,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k(x) - f(x)| dx \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_E (f_k(x) - f(x)) dx \right| \geq 0 \\ &\Downarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \int_E [f_k(x) - f(x)] dx \right| &= 0 \\ &\Downarrow \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx &= \int_E f(x) dx. \end{aligned}$$

La condizione della limitatezza uniforme può essere rilassata e sostituita quella di esistenza di una funzione sommabile in  $E$ ,  $\phi(x) \in L(E)$ , tale che,

$$|f_k(x)| \leq \phi(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in E.$$

Usando questa condizione nella precedente limitazione in luogo della disuguaglianza  $|g_k(x)| \leq 2M$ , unitamente al teorema della media negli integrali della funzione  $\phi(x)$  sugli insiemi della partizione, per l'integrale della generica  $g_k(x)$  su  $E$  si ha la limitazione

$$\begin{aligned} \int_E g_k(x) dx &< \varepsilon \sum_{j=1}^k \mu(E_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{E_j} g_k(x) dx \leq \varepsilon \sum_{j=1}^k \mu(E_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{E_j} \phi(x) dx \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^k \mu(E_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \bar{\phi}_j \mu(E_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \varepsilon \mu(E), \end{aligned}$$

da cui la dimostrazione del teorema.