

2.20.3 Relazione di completezza

Sia $\{|e_k\rangle\}$ una base ON dello spazio vettoriale E , allora vale la cosiddetta **relazione di completezza**

$$\sum_k |e_k\rangle\langle e_k| = \hat{I}.$$

Dim.: Dalla stessa definizione di base si ha che, $\forall |a\rangle \in E$, il vettore $|a\rangle$ può essere scritto come

$$|a\rangle = \sum_k a_k |e_k\rangle,$$

in questo caso le componenti sono $a_k = \langle e_k|a\rangle$, $\forall k$. Infatti, moltiplicando la precedente identità per il vettore bra $\langle e_j|$ e sfruttando l'ortonormalità della base, data in termini del prodotto scalare, si ha

$$\langle e_j|a\rangle = \sum_k a_k \langle e_j|e_k\rangle = \sum_k a_k \delta_{jk} = a_j.$$

L'operatore $\sum_k |e_k\rangle\langle e_k|$ è definito nello spazio vettoriale E , in particolare, $\forall |a\rangle \in E$, la sua azione è

$$\left(\sum_k |e_k\rangle\langle e_k| \right) |a\rangle = \sum_k |e_k\rangle\langle e_k|a\rangle = \sum_k \langle e_k|a\rangle |e_k\rangle = \sum_k a_k |e_k\rangle = |a\rangle$$

quindi, agendo come l'operatore identità, coincide con esso.

2.21 Spazi vettoriali a dimensione finita

Riassumendo quanto visto precedentemente, sia E_N uno spazio vettoriale a dimensione finita $N \in \mathbb{N}$ su un campo scalare S , si hanno le seguenti proprietà:

- SV1. il numero massimo di vettori di E_N **linearmente indipendenti** è pari ad N ;
- SV2. un generico insieme di N vettori linearmente indipendenti di E_N rappresenta una base dello stesso spazio vettoriale;
- SP3. $\forall |a\rangle \in E_N$ e data una sua base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, si ha la decomposizione

$$|a\rangle = \sum_{k=1}^N a^k |e_k\rangle,$$

i numeri dell'insieme $\{a^k\}_{k=1}^N \subset S$ sono le **componenti** del vettore $|a\rangle$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ e identificano in modo **univoco** lo stesso vettore $|a\rangle$. Ne consegue che la N -upla ordina

$$(a^1, a^2, \dots, a^N) \in S^N \subset \mathbb{C}^N,$$

è la **rappresentazione** del vettore $|a\rangle$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$. Si noti il cambiamento di notazione per l'indice delle componenti a^k , che appare ora in "alto", ad esponente, per indicare, come vedremo, che la componente è quella del vettore in forma ket. Si dirà che l'indice è in posizione **contro-variante**.

2.21.1 La convenzione di Einstein

In meccanica quantistica per economia di scrittura si usa la cosiddetta **convenzione di Einstein per le somme**, essa consiste nel sottintendere la somma sugli indici ripetuti in posizione alta (contro-variante) e bassa (covariante).

Ad esempio, per la rappresentazione di un vettore si ha

$$|a\rangle = \sum_{k=1}^N a^k |e_k\rangle \xrightarrow{\text{Einstein}} a^k |e_k\rangle,$$

nell'ultimo termine si ha la somma sull'indice k che appare in posizione contro-variante nelle componenti e covariante nei vettori ket della base. La somma sottintesa si assume sempre estesa a tutto l'intervallo di variabilità dell'indice. Nel caso si volesse considerare la somma limitata ad un sottoinsieme stretto dei valori dell'indice, allora si dovrebbe usare il simbolo di somma, specificando il sottoinsieme dei valori dell'indice cui si riferisce.

2.22 Notazione matriciale

La N -upla delle componenti che rappresenta un vettore rispetto ad una data base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, in uno spazio vettoriale di dimensione N , può essere posta in forma matriciale, in particolare nella forma di **vettore colonna**. Si introduce il simbolo di **rappresentazione** “ \xleftrightarrow{e} ” che, nell'espressione $|a\rangle \xleftrightarrow{e} a$, indica che il vettore colonna a , $N \times 1$, rappresenta il vettore (astratto) $|a\rangle \in E_N$, rispetto ad una base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, specificata sopra il simbolo della freccia uncinata, avremo cioè

$$|a\rangle \xleftrightarrow{e} a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^N \end{pmatrix}.$$

2.22.1 Rappresentazione di un operatore

Consideriamo un operatore lineare $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$ ed una base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ dello spazio vettoriale E_N . Il vettore ottenuto applicato \hat{A} sul j -esimo vettore della base ha la seguente rappresentazione

$$\hat{A}|e_j\rangle = A_j^k |e_k\rangle,$$

dove il coefficiente A_j^k , $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$, è la **k -esima componente, rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, del vettore $\hat{A}|e_j\rangle$** . L'indice **basso** specifica il vettore della base su cui l'operatore \hat{A} è stato applicato, mentre l'indice alto è quello che identifica la componente.

Con questa decomposizione dell'operatore A si definiscono N^2 scalari, A_j^k , con $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$, che, rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, identificano **univocamente** l'operatore, ovvero la sua **azione** nello spazio vettoriale E_N . Infatti, $\forall |a\rangle \in E_N$, indicando con $|b\rangle$ il vettore che si ottiene facendo agire l'operatore \hat{A} sul vettore $|a\rangle$, cioè $|b\rangle = \hat{A}|a\rangle \in E_N$ e avendo le decomposizioni

$$|a\rangle = a^j |e_j\rangle, \quad |b\rangle = b^k |e_k\rangle,$$

si ha

$$|b\rangle = b^k |e_k\rangle = \hat{A}a^j |e_j\rangle = a^j \hat{A}|e_j\rangle = a^j A_j^k |e_k\rangle = A_j^k a^j |e_k\rangle,$$

da cui, grazie all'unicità delle componenti, si ottengono le n identità

$$b^k = A_j^k a^j, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Poiché i vettori colonna a e b rappresentano univocamente i vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$, l'azione dell'operatore \hat{A} e l'operatore stesso sono univocamente rappresentati dagli N^2 scalari A_j^k attraverso i quali è possibile ottenere l'insieme delle componenti $\{b^k\}_{k=1}^N$ del vettore $|b\rangle$, a partire dall'insieme di quelle del vettore $|a\rangle$.

In notazione matriciale l'operatore \hat{A} è rappresentato, rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, da una matrice $N \times N$, che chiamiamo A , i cui elementi sono gli scalari A_j^k , dove gli indici alto e basso sono rispettivamente di riga e colonna, cioè:

$$\hat{A} \xleftrightarrow{e} A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_N^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^N & A_2^N & \dots & A_N^N \end{pmatrix}.$$

Nel caso in cui si abbia una base ON $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$, i cui vettori verifichino la condizione: $\langle u_k | u_j \rangle = \delta_{kj}$ con $k, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, la rappresentazione matriciale A' , ovvero gli elementi di matrice A_j^k , hanno le forme più semplici, essendo scrivibili come sandwich dell'operatore tra i vettori bra e ket con gli indici corrispondenti, cioè $A_j^k = \langle u_k | \hat{A} | u_j \rangle$, con $k, j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Questo risultato si ottiene direttamente dalla definizione

$$\hat{A} | u_j \rangle = A_j^l | u_l \rangle, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

moltiplicando ambo i membri da sinistra per un generico $\langle u_k |$ e sfruttando l'ortonormalità, si ha

$$\langle u_k | \hat{A} | u_j \rangle = A_j^l \langle u_k | u_l \rangle = A_j^l \delta_l^k = A_j^k, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Per cui possiamo scrivere

$$\hat{A} \xleftrightarrow{u} A' = \begin{pmatrix} \langle u_1 | \hat{A} | u_1 \rangle & \langle u_1 | \hat{A} | u_2 \rangle & \dots & \langle u_1 | \hat{A} | u_N \rangle \\ \langle u_2 | \hat{A} | u_1 \rangle & \langle u_2 | \hat{A} | u_2 \rangle & \dots & \langle u_2 | \hat{A} | u_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_N | \hat{A} | u_1 \rangle & \langle u_N | \hat{A} | u_2 \rangle & \dots & \langle u_N | \hat{A} | u_N \rangle \end{pmatrix}.$$

L'operatore identità \hat{I} definito nello spazio vettoriale E_N è rappresentato dalla matrice identità $N \times N$, rispetto ad una qualsiasi base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$. Si ha infatti che

$$|e_k\rangle = \delta_k^j |e_j\rangle = \hat{I} |e_k\rangle = I_k^j |e_j\rangle \quad \Rightarrow \quad I_k^j = \delta_k^j, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Nella prima identità abbiamo introdotto il simbolo di Kronecker con un indice basso, k , ed uno alto, j , sul quale, in questo caso, è sottintesa la somma. In notazione matriciale il simbolo di Kronecker rappresenta gli elementi della matrice identità.

2.22.2 L'algebra delle matrici

L'unicità delle rappresentazioni di vettori ed operatori in uno spazio vettoriale E_N , una volta fissata la base di riferimento, consente di estendere alle matrici l'algebra già definita per vettori ed operatori. Si hanno le seguenti proposizioni.

AM1. Gli operatori $\hat{A}, \hat{B} : E_N \rightarrow E_N$ sono uguali \iff data una base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ valgono le N identità

$$\hat{A} |e_k\rangle = \hat{B} |e_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Dalle decomposizioni rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ di questi vettori ed operatori si ottengono le identità tra le rappresentazioni, infatti

$$\hat{A}|e_k\rangle = A_k^j|e_j\rangle = \hat{B}|e_k\rangle = B_k^j|e_j\rangle \implies A_k^j = B_k^j, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Ovvero, i due operatori \hat{A} e \hat{B} sono uguali \iff le matrici A e B che li rappresentano rispetto ad una generica base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ sono uguali.

AM2. La matrice che rappresenta l'operatore somma dei due operatori $\hat{A}, \hat{B} : E_N \rightarrow E_N$, è la somma delle matrici che rappresentano \hat{A} e \hat{B} . Possiamo scrivere che, dette A e B queste matrici $N \times N$,

$$\hat{A} \xleftrightarrow{e} A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^N \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N^1 & A_N^2 & \dots & A_N^N \end{pmatrix}, \quad \hat{B} \xleftrightarrow{e} B = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_1^2 & \dots & B_1^N \\ B_2^1 & B_2^2 & \dots & B_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_N^1 & B_N^2 & \dots & B_N^N \end{pmatrix}$$

e detto $\hat{S} = \hat{A} + \hat{B}$ l'operatore somma, si ha

$$\hat{S} \xleftrightarrow{e} S = A + B.$$

AM3. Sia $\hat{P} = \hat{A}\hat{B} : E_N \rightarrow E_N$ il prodotto dei due operatori $\hat{A}, \hat{B} : E_N \rightarrow E_N$, rappresentati dalle matrici A e B rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, allora la matrice che rappresenta \hat{P} è il prodotto (riga-colonna) della matrici A e B . Ovvero: $\hat{P} \xleftrightarrow{e} P = AB$, con

$$P_j^k = A_l^k B_j^l, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove è sottintesa la somma sull'indice ripetuto l in posizione contro-variante e covariante. Questo risultato può essere ottenuto applicando l'operatore \hat{P} su un generico vettore della base, infatti si ha

$$\hat{P}|e_j\rangle = P_j^k|e_k\rangle = \hat{A}\hat{B}|e_j\rangle = \hat{A}B_j^l|e_l\rangle = B_j^l\hat{A}|e_l\rangle = B_j^l A_l^k|e_k\rangle,$$

da cui l'asserto.

AM4. L'operatore $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$ è regolare, ovvero è **invertibile**, \iff è **invertibile la matrice** A che lo rappresenta rispetto ad una generica base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$.

Dim.: (\implies) Dalla condizione di invertibilità dell'operatore \hat{A} otteniamo l'invertibilità della matrice A , che lo rappresenta rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$. In particolare, dimostriamo che l'operatore inverso \hat{A}^{-1} , la cui esistenza è data per ipotesi, è rappresentato dalla matrice inversa di A .

Indichiamo, per ora, con A_l la matrice che rappresenta \hat{A}^{-1} , cioè: $\hat{A}^{-1} \xleftrightarrow{e} A_l$. Per ipotesi gli operatori $\hat{A}\hat{A}^{-1}$ e $\hat{A}^{-1}\hat{A}$ coincidono con l'operatore identità \hat{I}^1 , quindi, $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} |e_j\rangle &= \hat{I}|e_j\rangle = I_j^k|e_k\rangle \equiv \delta_j^k|e_k\rangle = \hat{A}^{-1}\hat{A}|e_j\rangle = \hat{A}^{-1}A_j^l|e_l\rangle = A_j^l\hat{A}^{-1}|e_l\rangle = A_j^l(A_l)^k|e_k\rangle, \\ |e_j\rangle &= \hat{I}|e_j\rangle = I_j^k|e_k\rangle \equiv \delta_j^k|e_k\rangle = \hat{A}\hat{A}^{-1}|e_j\rangle = \hat{A}(A_l)^j|e_l\rangle = (A_l)^j\hat{A}|e_l\rangle = (A_l)^j A_l^k|e_k\rangle, \end{aligned}$$

¹La rappresentazione dell'operatore identità è: $|e_j\rangle = \hat{I}|e_j\rangle = I_j^k|e_k\rangle$, usando la delta di Kronecker con indici alto e basso, possiamo riscrivere le identità precedenti come

$$(\delta_j^k - I_j^k)|e_k\rangle = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

che, grazie alla indipendenza lineare dei vettori della base, implica

$$I_j^k = \delta_j^k, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

dove il simbolo δ_j^k rappresenta la delta di Kronecker nella versione con indici alto e basso. I vettori della base sono linearmente indipendenti, quindi l'uguaglianza tra combinazioni lineari di tali vettori implica l'identità tra i coefficienti omologhi, ovvero

$$(A_I)_I^k A_j^I = A_I^k (A_I)_j^I = \delta_j^k, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

In termini matriciali si ha: $A_I A = A A_I = I$, questa non è altro che la definizione di matrice inversa di A , che quindi esiste e coincide con A_I , cioè $A_I = A^{-1}$. Ne consegue che, se $\hat{A} \xleftrightarrow{e} A$, allora $\hat{A}^{-1} \xleftrightarrow{e} A_I \equiv A^{-1}$, la matrice che rappresenta l'operatore inverso è l'inversa della matrice che rappresenta l'operatore stesso.

Dim.: (\Leftarrow) Si ha per ipotesi che la matrice A , che rappresenta l'operatore \hat{A} rispetto alle base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, è invertibile, cioè esiste la matrice A^{-1} , che verifica la condizione

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I.$$

Vogliamo dimostrare come ciò implichi l'esistenza dell'operatore inverso \hat{A}^{-1} , tale che

$$\hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{I}.$$

Come conseguenza della corrispondenza biunivoca tra lo spazio della matrici $N \times N$ e quello degli operatori di E_N , esiste un operatore, che chiameremo \hat{A}_I , che sia rappresentato dalla matrice A^{-1} , ovvero: $\hat{A}_I \xleftrightarrow{e} A^{-1}$, quindi

$$\hat{A}_I |e_k\rangle = (A^{-1})_k^j |e_j\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Applichiamo su ambo i membri di questa identità l'operatore \hat{A} e usiamo la rappresentazione matriciale dello stesso operatore quindi, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\hat{A} \hat{A}_I |e_k\rangle = (A^{-1})_k^j \hat{A} |e_j\rangle = (A^{-1})_k^j A_j^m |e_m\rangle = (A A^{-1})_k^m |e_m\rangle = |e_k\rangle.$$

Che implica l'identità: $\hat{A} \hat{A}_I = \hat{I}$.

Allo stesso modo, usando la rappresentazione di \hat{A}_I , partiamo da quella di \hat{A} , ovvero $\hat{A} |e_k\rangle = A_k^j |e_j\rangle$, e applichiamo l'operatore \hat{A}_I , si ha, $\forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\hat{A}_I \hat{A} |e_k\rangle = A_k^j \hat{A}_I |e_j\rangle = A_k^j (A^{-1})_j^m |e_m\rangle = (A^{-1} A)_k^m |e_m\rangle = |e_k\rangle,$$

da cui: $\hat{A}_I \hat{A} = \hat{I}$ che unita all'identità precedente $\hat{A} \hat{A}_I = \hat{I}$, implica l'esistenza dell'operatore inverso di \hat{A} . Tale operatore coincide con \hat{A}_I ed è rappresentato dalla matrice A^{-1} , ovvero:

$$\hat{A}^{-1} = \hat{A}_I \xleftrightarrow{e} A^{-1}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che **un operatore \hat{A} è invertibile \iff è invertibile la matrice A che lo rappresenta l'operatore stesso rispetto ad una generica base**. Poiché la condizione di invertibilità di matrice A equivale alla condizione di non annullamento del suo determinante, potremmo anche affermare che: **un operatore \hat{A} è invertibile $\iff \det(A) \neq 0$** , con $\hat{A} \xleftrightarrow{e} A$, $\forall \{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ base dello spazio vettoriale E_N .

L'invertibilità dell'operatore implica l'esistenza di un secondo operatore detto \hat{A}^{-1} , detto l'operatore inverso, tale che

$$\hat{A}^{-1} \hat{A} = \hat{I} \quad \xleftrightarrow{e} \quad A^{-1} A = I,$$

dove la seconda equazione è la rappresentazione matriciale della prima. Poiché l'invertibilità equivale alla condizione $\det(A) \neq 0$, partendo dall'operatore inverso \hat{A}^{-1} , rappresentato dalla matrice inversa A^{-1} e avendo che $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} \neq 0$, si dimostra l'esistenza dell'operatore inverso di \hat{A}^{-1} , che è lo stesso operatore \hat{A} , rappresentato della matrice A . In questo caso valgono le equazioni operatoriale e matriciale:

$$\hat{A} \hat{A}^{-1} = \hat{I} \quad \xleftrightarrow{e} \quad A A^{-1} = I.$$

2.22.3 Rappresentazione duale

La rappresentazione matriciale di un vettore $|a\rangle$ dello spazio vettoriale E_N , a N dimensioni ($N < \infty$), rispetto ad una sua base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, è data da un vettore colonna, $N \times 1$, che ha per elementi le componenti contro-varianti, ovvero si ha

$$|a\rangle = a^k |e_k\rangle \quad \leftrightarrow \quad a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^N \end{pmatrix}.$$

Per ricavare la rappresentazione del vettore bra $\langle a| \in E_N^*$, duale di $|a\rangle \in E_N$, consideriamo in primo luogo la decomposizione duale

$$\langle a| = (a^k)^* \langle e_k|$$

e quindi il prodotto scalare con il vettore $|b\rangle = b^j |e_j\rangle$,

$$\langle a|b\rangle = \langle e_k|e_j\rangle (a^k)^* b^j \equiv \sum_{k=1}^N G_j^k (a^k)^* b^j,$$

nell'ultimo membro la somma su k è stata esplicitata poiché tale indice, se pur ripetuto, appare sempre in posizione alta; la somma su j rimane, invece, sottintesa. Abbiamo definito, dipendentemente dalla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, la matrice G che ha per elementi i prodotti scalari dei vettori della stessa base, cioè: $G_j^k = \langle e_k|e_j\rangle, \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Attraverso tale matrice G definiamo le componenti con indice basso

$$a_j = \sum_{k=1}^N G_j^k (a^k)^*, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

In forma matriciale, ricordando che l'indice alto è quello di riga, mentre quello basso è di colonna, l'identità precedente si può scrivere come

$$a^\dagger \equiv (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N) = ((a^1)^* \ (a^2)^* \ \dots \ (a^N)^*) \begin{pmatrix} G_1^1 & G_1^2 & \dots & G_1^N \\ G_2^1 & G_2^2 & \dots & G_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_N^1 & G_N^2 & \dots & G_N^N \end{pmatrix} = a^{*T} G,$$

dove si è introdotto il simbolo a^\dagger per indicare il **vettore riga**, $1 \times N$, che ha per elementi **le componenti covarianti di $|a\rangle$** , G è la matrice, $N \times N$, di elementi $G_j^k = \langle e_k|e_j\rangle$ con $k, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ed a è il vettore colonna delle componenti controvarianti di $|a\rangle$. Facendo la trasposizione di ambo i membri si ottiene

$$a^{\dagger T} = G^T a^*.$$

Se la matrice G^T fosse invertibile la N -upla delle componenti covarianti, elementi dell'insieme $\{a_k\}_{k=1}^N$, sarebbe **univocamente** determinata da quella delle componenti controvarianti, elementi dell'insieme $\{a^k\}_{k=1}^N$. Verifichiamo che G^T sia invertibile dimostrando che $\det(G^T) \neq 0$. Se, infatti, il determinante fosse nullo, almeno una riga della matrice sarebbe combinazione lineare delle altre, supponiamo, ad esempio, che sia la m -esima riga

$$(G^T)_k^m = G_m^k = \langle e_k|e_m\rangle = \sum_{j \neq m} \beta_j \langle e_k|e_j\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

da cui, poiché i vettori della base sono tutti diversi dal vettore nullo, che è, invece, l'unico ortogonale a tutti i vettori $|e_k\rangle$ con $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, si ha l'implicazione

$$\begin{aligned} \langle e_k | (|e_m\rangle - \sum_{j \neq m} \beta_j |e_j\rangle) &= 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\} \\ \Downarrow \\ |e_m\rangle - \sum_{j \neq m} \beta_j |e_j\rangle &= |0\rangle. \end{aligned}$$

Ma l'unica combinazione lineare dei vettori della base che dia il vettore nullo è quella banale, con tutti i coefficienti nulli. L'identità precedente è quindi assurda, in quanto il coefficiente del vettore $|e_m\rangle$ è sempre uguale ad uno. Ne consegue che: $\det(G^T) \neq 0$ e che, quindi, esiste la matrice inversa $(G^T)^{-1}$.

Così come la N -upla di coefficienti $\{b^k\}_{k=1}^N$ rappresenta univocamente il vettore ket $|b\rangle$, rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, la N -upla $\{a_k\}_{k=1}^N$ rappresenta univocamente, rispetto alla stessa base, il vettore bra $\langle a|$.

Il prodotto scalare può essere scritto come

$$\langle a|b\rangle = \langle e_k|e_j\rangle (a^k)^* b^j = \sum_{k=1}^N G_j^k (a^k)^* b^j = a_j b^j = a^\dagger b.$$

In termini di rappresentazioni matriciali rispetto ad una generica base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, possiamo associare al vettore bra $\langle a|$ un **vettore riga** $1 \times N$, con elementi a_k , si ha cioè:

$$\langle a| \stackrel{e}{\leftrightarrow} a^\dagger = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N), \quad \text{con: } a_k = \sum_{j=1}^N G_k^j a^{j*} = \langle e_j|e_k\rangle a^{j*}.$$

2.22.4 Rappresentazione dell'aggiunto di un operatore

Siano $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$ e $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ un operatore lineare ed una base dello spazio vettoriale E_N , le rappresentazioni dello stesso operatore e del suo aggiunto sono date dalle $2N$ identità

$$\hat{A}|e_k\rangle = A_k^l |e_l\rangle, \quad \hat{A}^\dagger|e_m\rangle = (A^\dagger)_m^j |e_j\rangle, \quad \forall k, m \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

La relazione tra le due matrici A e A^\dagger si ottiene come

$$\begin{cases} \langle e_k|\hat{A}^\dagger|e_m\rangle = \langle e_k|(A^\dagger)_m^j |e_j\rangle = (A^\dagger)_m^j \langle e_k|e_j\rangle = G_j^k (A^\dagger)_m^j \\ \langle e_k|\hat{A}|e_m\rangle = \langle e_m|\hat{A}|e_k\rangle^* = (\langle e_m|A_k^l |e_l\rangle)^* = (A_k^l)^* \langle e_l|e_m\rangle = (A^{T*})_l^k G_m^l \end{cases} \Rightarrow GA^\dagger = A^{T*}G.$$

Poiché la matrice G è invertibile possiamo risolvere la precedente equazione matriciale ed ottenere A^\dagger come

$$A^\dagger = G^{-1}A^{T*}G, \quad (A^\dagger)_m^k = (G^{-1})_j^k (A^{T*})_l^j G_m^l, \quad \forall k, m \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Dimostriamo che, se l'identità matriciale che rappresenta quella vettoriale $\hat{A}|a\rangle = |b\rangle$ è $Aa = b$, ovvero se

$$\hat{A}|a\rangle = |b\rangle \quad \stackrel{e}{\leftrightarrow} \quad Aa = b,$$

dove la matrice, $N \times N$, A e i vettori colonna, $N \times 1$, a e b sono

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \dots & A_1^N \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & A_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N^1 & A_N^2 & \dots & A_N^N \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^N \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^N \end{pmatrix},$$

allora per l'identità duale si ha

$$\langle b | = \langle a | \hat{A}^\dagger \quad \stackrel{e}{\leftrightarrow} \quad b^\dagger = a^\dagger A^\dagger,$$

dove i vettori riga, $1 \times N$, a^\dagger e b^\dagger , e la matrice, $N \times N$, A^\dagger sono:

$$b^\dagger = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_N), \quad a^\dagger = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N), \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} A_1^{\dagger 1} & A_2^{\dagger 1} & \dots & A_N^{\dagger 1} \\ A_1^{\dagger 2} & A_2^{\dagger 2} & \dots & A_N^{\dagger 2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^{\dagger N} & A_2^{\dagger N} & \dots & A_N^{\dagger N} \end{pmatrix}$$

con le componenti e gli elementi dei vettori e della matrice aggiunti che si ottengono dalle componenti e dagli elementi dei vettori e della matrice originali attraverso la matrice G , ovvero, si hanno le relazioni

$$b_k = \sum_{j=1}^N G_k^j (b^j)^*, \quad a_k = \sum_{j=1}^N G_k^j (a^j)^*, \quad (A^\dagger)_m^k = (G^{-1})_j^k (A^{T*})_i^j G_m^l, \quad \forall k, m \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Dim.: Partiamo dalla definizione delle componenti del vettore bra $\langle b |$, ovvero le componenti con indice basso, e usiamo per quelle con indice alto la definizione in termini della matrice A e del vettore colonna a , cioè $b = Aa$, si hanno le N identità

$$\begin{aligned} (b^\dagger)_k = b_k &= \sum_{j=1}^N G_k^j (b^j)^* = \sum_{j=1}^N G_k^j (A_i^j a^i)^* \\ &= \sum_{l=1}^N G_k^j (A^{T*})_j^l (a^l)^* = \sum_{l=1}^N (A^{T*} G)_k^l (a^l)^* \\ &= \sum_{l=1}^N (GA^\dagger)_k^l (a^l)^* = \sum_{l=1}^N (A^\dagger)_k^j G_j^l (a^l)^* \\ &= a_j (A^\dagger)_k^j = (a^\dagger A^\dagger)_k^j, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che $b^\dagger = a^\dagger A^\dagger$.