Teorema di esistenza di un punto fisso per un operatore limitato. Sia $\hat{A} : E \to E$, con E **chiuso**, un **operatore limitato**, **allora** l'operatore $\hat{B}$, definito come

$$\hat{B}|x\rangle = \alpha\hat{A}|x\rangle + |y\rangle\,, \qquad \forall\,|y\rangle \in E\,, \quad \forall\,\alpha \in \mathbb{C}\,,$$

ha **un unico punto fisso** se:

$$|\alpha|\,\|\hat{A}\| < 1\,.$$

<u>Dim.:</u> Dalla limitatezza dell'operatore $\hat{A}$ si ottiene che l'operatore $\hat{B}$ è una contrazione. Infatti, $\forall\,|x_1\rangle, |x_2\rangle \in E$, si ha

$$\left\|\hat{B}|x_1\rangle - \hat{B}|x_2\rangle\right\| = |\alpha|\,\left\|\hat{A}|x_1\rangle - \hat{A}|x_2\rangle\right\| \le |\alpha|\,\|\hat{A}\|\,\|x_1 - x_2\|\,,$$

poiché $|\alpha|\,\|\hat{A}\| < 1$, esiste un $\beta \in (0,1)$, tale che: $|\alpha|\,\|\hat{A}\| \le \beta < 1$, quindi

$$\left\|\hat{B}|x_1\rangle - \hat{B}|x_2\rangle\right\| \le |\beta|\,\|\hat{A}\|\,\|x_1 - x_2\|\,,$$

da cui segue che $\hat{B}$ è un operatore di contrazione ed è definito su uno spazio vettoriale chiuso. Possiamo applicate il teorema del punto fisso, ovvero si ha l'esistenza e unicità del vettore $|b\rangle \in E$, tale che

$$\hat{B}|b\rangle = |b\rangle\,,$$

questo vettore rappresenta il punto fisso dell'operatore $\hat{B}$. Come mostrato nella dimostrazione del teorema del punto fisso,a partire da **un vettore arbitrario** $|b_0\rangle \in E$, tramite lo stesso operatore $\hat{B}$ possiamo costruire una successione $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, che converga al punto fisso $|b\rangle$, usando la definizione ricorsiva

$$|b_k\rangle = \hat{B}|b_{k-1}\rangle\,, \qquad \forall\,k \in \mathbb{N}\,, \qquad \text{con: } \lim_{k\to\infty} |b_k\rangle = |b\rangle\,.$$

I vettori della successione, in termini dell'operatore $\hat{A}$ e del vettore $|y\rangle$, sono

$$\begin{aligned}
&|b_0\rangle \\
&|b_1\rangle = \hat{B}|b_0\rangle = \alpha\hat{A}|b_0\rangle + |y\rangle \\
&|b_2\rangle = \hat{B}|b_1\rangle = \alpha\hat{A}|b_1\rangle + |y\rangle = \alpha^2\hat{A}^2|b_0\rangle + \alpha\hat{A}|y\rangle + |y\rangle \\
&\ \ldots \quad \ldots \\
&|b_k\rangle = \alpha^k\hat{A}^k|b_0\rangle + \alpha^{k-1}\hat{A}^{k-1}|y\rangle + \ldots + \alpha^2\hat{A}^2|y\rangle + \alpha\hat{A}|y\rangle + |y\rangle \\
&\ \ldots \quad \ldots\,.
\end{aligned}$$

Poiché la successione converge, si ha

$$\lim_{k\to\infty} |b_k\rangle = |y\rangle + \alpha\hat{A}|y\rangle + \ldots + \alpha^k\hat{A}^k|y\rangle + \ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha\hat{A}\right)^k |y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha\hat{A}\right)^k |y\rangle\,.$$

è interessante osservare che il punto fisso, ovvero la soluzione del problema

$$\alpha\hat{A}|b\rangle + |y\rangle = |b\rangle\,,$$

non dipende dal vettore $|b_0\rangle$, con cui si è costruita la successione ad esso convergente, **determina, però, la rapidità con cui la successione converge**. Una "buona" scelta di $|b_0\rangle$ aiuta a trovare la soluzione.

2.37.2 Una procedura risolutiva

Un'equazione differenziale, ad esempio, l'equazione di Fredholm del secondo tipo

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,x')f(x')dx' + \phi(x),$$

in cui è stato estratto lo scalare λ dal nucleo, può essere scritta in forma operatoriale come

$$|f\rangle = \lambda \hat{K}|f\rangle + |\phi\rangle,$$

dove i vettori $|f\rangle$ e $|\phi\rangle$ rappresentano la funzione incognita e quella termine noto, mentre l'integrale di convoluzione del nucleo con la funzione incognita è rappresentato dall'azione dell'operatore $\lambda\hat{K}$ sul vettore $|f\rangle$. Formalmente la soluzione si ottiene come risultato dell'applicazione dell'inverso dell'operatore $(\hat{I} - \lambda\hat{K})$, ovvero l'operatore **risolvente** $(\hat{I} - \lambda\hat{K})^{-1}$, sul vettore termine noto, in dettaglio si ha

$$|f\rangle = \lambda\hat{K}|f\rangle + |\phi\rangle \quad \to \quad (\hat{I} - \lambda\hat{K})|f\rangle = |\phi\rangle \quad \to \quad |f\rangle = (\hat{I} - \lambda\hat{K})^{-1}|\phi\rangle.$$

Usando il teorema precedentemente dimostrato, con, le sostituzioni: $\alpha \to \lambda$, $\hat{A} \to \hat{K}$ e $|y\rangle \to |\phi\rangle$, la soluzione, cioè il punto fisso dell'operatore la cui azione su generico vettore $|x\rangle$ dà il vettore $\lambda\hat{K}|x\rangle + |\phi\rangle$, è scrivibile e ottenibile in forma di serie. Le condizioni di esistenza di una tale soluzione sono date dal seguente teorema.

Teorema del risolvente e della serie di Neumann. (Carl Gottfried Neumann, 7 maggio 1832 - 27 marzo 1925, Germania). Sia $\hat{K} : E \to E$, con E **chiuso**, un operatore **limitato**, allora, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda \neq 0$, tale che

$$\|\hat{K}\| < 1/|\lambda|,$$

esiste ed è limitato l'operatore risolvente $\hat{K}_\lambda = (\hat{I} - \lambda\hat{K})^{-1}$, che si ottiene come somma della serie

$$\hat{K}_\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \hat{K}^j.$$

detta **serie di Neumann**, da cui si ha la condizione di limitazione

$$\|\hat{K}_\lambda\| \leq \frac{1}{1 - |\lambda|\,\|\hat{K}\|}.$$

<u>**Dim.:**</u> La condizione di limitatezza dell'operatore $\hat{K}$ implica la convergenza della serie. Infatti si ha la maggiorazione

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \hat{K}^j\right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\lambda^j \hat{K}^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j \|\hat{K}\|^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(|\lambda|\,\|\hat{K}\|\right)^j < \infty.$$

Segue che la successione delle somme parziali delle norme, $\left\{S_n = \sum_{j=0}^{n} |\lambda|^j \|\hat{K}\|^j\right\}_{n=0}^{\infty}$, converge ed è quindi una successione di Cauchy. Consideriamo, allora, la successione vettoriale $\left\{\sum_{j=0}^{n} \lambda^j \hat{K}^j|x\rangle\right\}_{n=0}^{\infty} \subset E$, il cui n-esimo vettore si ottiene dall'applicazione dell'operatore somma parziale n-esima della serie di operatori con termine j-esimo $\lambda^j\hat{K}^j$, su un generico vettore $|x\rangle \in E$. Dimostriamo che si tratta di una successione vettoriale di Cauchy: $\forall m,n \in \mathbb{N}$, com

$m > n$, si ha che per la norma della differenza tra l'm-esimo e l'n-esimo vettore della successione vale la maggiorazione

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{m}\lambda^j\hat{K}^j|x\rangle-\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\hat{K}^j|x\rangle\right\| &= \left\|\sum_{j=n+1}^{m}\lambda^j\hat{K}^j|x\rangle\right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m}\left\|\lambda^j\hat{K}^j|x\rangle\right\| \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{m}|\lambda|^j\left\|\hat{K}\right\|^j\|x\| = |S_m-S_n|\,\|x\| \underset{\substack{n\to\infty\\(m\to\infty)}}{\longrightarrow} 0\,,\end{aligned}$$

ne consegue che la successione vettoriale delle somme parziali $\left\{\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\hat{K}^j|x\rangle\right\}_{n=0}^{\infty}\subset E$ è una successione di Cauchy, questo risultato è conseguenza della limitatezza della norma del generico vettore $|x\rangle$ e dalla convergenza della successione delle somme parziali delle norme $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, che è quindi una successione di Cauchy. Poiché, per ipotesi, lo spazio vettoriale E è chiuso, la successione di Cauchy $\left\{\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\hat{K}^j|x\rangle\right\}_{n=0}^{\infty}$ converge, cioè: $\exists\,|y\rangle\in E$, tale che

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\hat{K}^j|x\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\hat{K}^j|x\rangle = |y\rangle\,.$$

Infine, per l'arbitrarietà del vettore $|x\rangle\in E$, deve esistere un operatore $\hat{H}:E\to E$ cui tende la successione $\left\{\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\hat{K}^j\right\}_{n=0}^{\infty}$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\hat{K}^j = \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\hat{K}^j = \hat{H}\,.$$

Applichiamo l'operatore $(\hat{I}-\lambda\hat{K})$ da sinistra su ambo i membri dell'identità precedente, scritta nella forma $\hat{H}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\hat{K}^j$,

$$\begin{aligned}(\hat{I}-\lambda\hat{K})\hat{H} &= (\hat{I}-\lambda\hat{K})\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\lambda\hat{K}\right)^j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}(\hat{I}-\lambda\hat{K})\left(\lambda\hat{K}\right)^j \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left[\left(\lambda\hat{K}\right)^j-\left(\lambda\hat{K}\right)^{j+1}\right] = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda\hat{K}\right)^j}_{\hat{H}}-\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda\hat{K}\right)^{j+1}}_{\hat{H}-\hat{I}}\end{aligned}$$

ovvero

$$(\hat{I}-\lambda\hat{K})\hat{H}=\hat{I}.$$

Otterremmo lo stesso risultato anche applicando l'operatore $(\hat{I}-\lambda\hat{K})$ da destra sulla serie, in quanto ciascun suo termine commuta con lo stesso operatore $(\hat{I}-\lambda\hat{K})$, avremmo cioè

$$\hat{H}(\hat{I}-\lambda\hat{K})=\hat{I}.$$

Il passaggio dell'operatore $(\hat{I}-\lambda\hat{K})$ sotto il segno di limite è giustificato dalla convergenza uniforme della serie operatoriale. Infatti, come abbiamo dimostrato, la serie dei vettori che si ottengono dall'azione degli operatori su un vettore generico $|x\rangle\in E$ è sempre convergente indipendentemente dal vettore $|x\rangle$ stesso.

Dalle ultime due identità segue direttamente che l'operatore $\hat{H}$ è l'operatore inverso di $(\hat{I}-\lambda\hat{K})$, è quindi l'operatore risolvente

$$\hat{H} \equiv \hat{K}_\lambda = (\hat{I}-\lambda\hat{K})^{-1}.$$

Infine, dalla limitazione iniziale della serie, avendo dimostrato la convergenza all'operatore risolvente, si ottiene una limitazione per lo stesso operatore $\hat{K}_\lambda$, infatti, usando la condizione sulla norma dell'operatore $\hat{K}$, $\|\hat{K}\| < 1/|\lambda|$, ovvero $|\lambda|\,\|\hat{K}\| < 1$ e formula della somma della serie geometrica, si ha

$$\|\hat{K}_\lambda\| = \left\|\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \hat{K}^j\right\| \le \sum_{j=0}^{\infty} \|\lambda^j \hat{K}^j\| \le \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j \,\|\hat{K}\|^j \le \sum_{j=0}^{\infty} \left(|\lambda|\,\|\hat{K}\|\right)^j = \frac{1}{1-|\lambda|\,\|\hat{K}\|}.$$

2.37.3 Approssimazioni successive

Consideriamo l'equazione operatoriale

$$|f\rangle = \lambda\hat{K}|f\rangle + |\phi\rangle,$$

dove $\hat{K}$ è l'operatore integrale rappresentato dal nucleo $K(x,y)$, la cui azione è definita in forma di integrale come

$$\hat{K}|f\rangle \hookleftarrow \int_a^b K(x,y)f(y)dy.$$

L'equazione può essere quindi rappresentata dall'equazione integrale di Fredholm di II tipo

$$f(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy + \phi(x).$$

Al fine di ottenere la serie di Neumann, consideriamo la rappresentazione dell'azione dell'operatore $\hat{K}^2$, si avrà un integrale doppio, infatti

$$\begin{aligned}
\hat{K}^2|f\rangle = \hat{K}\big(\hat{K}|f\rangle\big) \hookleftarrow \quad & \int_a^b K(x,x')\left(\int_a^b K(x',y)f(y)dy\right)dx' \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,x')K(x',y)dx'\right) f(y)dy \\
&\equiv \int_a^b K_2(x,y)f(y)dy,
\end{aligned}$$

dove si è definito l'operatore prodotto

$$K_2(x,y) = \int_a^b K(x,x')K(x',y)dx',$$

che rappresenta l'operatore $\hat{K}^2$. Per una generica potenza intera $n \in \mathbb{N}$ avremo

$$\hat{K}^n|f\rangle \hookleftarrow \int_a^b K_n(x,y)f(y)dy,$$

con

$$K_n(x,y) = \int_a^b K(x,x')K_{n-1}(x',y)dx' = \int_a^b dx_1 \ldots \int_a^b dx_{n-1}K(x,x_1)K(x_1,x_2)\ldots K(x_{n-1},y).$$

Il teorema del risolvente asserisce che dato un operatore limitato $\hat{K}$ su uno spazio chiuso E, l'equazione

$$|f\rangle = \lambda \hat{K}|f\rangle + |\phi\rangle$$

ha l'unica soluzione

$$|f\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \hat{K}^j |\phi\rangle\,,$$

se $|\lambda| \left\|\hat{K}\right\| < 1$. Il vettore $|f\rangle$ è il punto fisso dell'operatore la cui azione su un generico vettore $|x\rangle \in E$ dà il vettore $\lambda \hat{K}|x\rangle + |\phi\rangle$.
Passando alla rappresentazione funzionale si ha

$$\begin{aligned}
|f\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \hat{K}^j |\phi\rangle \hookleftarrow f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \int_a^b K_j(x,y)\phi(y)dy \\
&= \phi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \int_a^b K_j(x,y)\phi(y)dy \\
&= \phi(x) + \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j K_j(x,y)\right]\phi(y)dy \\
&\equiv \phi(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,y;\lambda)\phi(y)dy\,,
\end{aligned}$$

dove si è definito il nucleo

$$\Gamma(x,y;\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x,y)\,.$$

Esempio

Si determini la soluzione dell'equazione integrale

$$f(x) = x^2 + \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f(y)dy\,,$$

con il metodo della serie di Neumann.
Soluzione. Per applicare il metodo della serie di Neumann e affinché la soluzione sia unica, è necessario verificare la limitatezza dell'operatore rappresentato in forma integrale dal nucleo $K(x,y) = x^2 - y^2$ nell'intervallo $(-1,1)$. La norma di tale operatore può essere definita come

$$\left\|\hat{K}\right\| = \left(\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy |K(x,y)|^2\right)^{1/2}\,.$$

Infatti, dalla definizione di norma di un operatore si ha

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{K}\right\| = \sup_{\|f\|=1} \left\{\left\|\hat{K}|f\rangle\right\|\right\} &= \sup_{\|f\|=1} \left\{\left(\int_a^b dx \left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right|^2\right)^{1/2}\right\} \\
&\leq \sup_{\|f\|=1} \left\{\left[\int_a^b dx \left(\int_a^b |K(x,y)dy|^2 \int_a^b \left|f(y')\right|^2 dy'\right)\right]^{1/2}\right\} \\
&= \left[\int_a^b dx \int_a^b dy\,|K(x,y)|^2\right]^{1/2}\,.
\end{aligned}$$

Nell'esempio si hanno $K(x,y) = x^2 - y^2$ e $(a,b) = (-1,1)$, quindi la norma del nucleo vale

$$\|\hat{K}\| = \left(\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy \left(x^2 - y^2\right)^2\right)^{1/2} = \int_{-1}^{1} \left(2x^4 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{5}\right) dx = \sqrt{\frac{32}{45}} < 1\,,$$

è quindi possibile definire la serie di Neumann $\{f_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Si hanno le funzioni

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \phi(x) = x^2\,, \\
f_1(x) &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f_0(y) dy = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) y^2 dy = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{5}\,, \\
f_2(x) &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f_1(y) dy = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) \left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{5}\right) dy = -\frac{16}{45}x^2\,, \\
f_3(x) &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f_2(y) dy = -\frac{16}{45} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) y^2 dy = -\frac{16}{45} \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{5}\right)\,, \\
f_4(x) &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f_3(y) dy = -\frac{16}{45} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) \left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{2}{5}\right) dy = \left(-\frac{16}{45}\right)^2 x^2\,, \\
\cdots &= \cdots \\
f_{2n}(x) &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f_{2n-1}(y) dy = \left(-\frac{16}{45}\right)^n x^2 \\
f_{2n+1}(x) &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f_{2n}(y) dy = \left(-\frac{16}{45}\right)^n \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{5}\right)\,, \qquad n = 0, 1, \ldots, .
\end{aligned}$$

Quindi si ha la somma della serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_{2n}(x) + f_{2n+1}(x)\right) = \frac{1}{1 + 16/45} \left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{5}\right)\,,$$

da cui la soluzione

$$f(x) = \frac{45}{61} \left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{5}\right)\,.$$

Verifichiamo il risultato sostituendo la funzione $f(x)$ nell'integrale e sommando la funzione termine noto

$$\begin{aligned}
x^2 + \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f(y) dy &= x^2 + \frac{45}{61} \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) \left(\frac{5}{3}y^2 - \frac{2}{5}\right) dy \\
&= x^2 + \frac{45}{61} \left[\frac{5}{3} \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{5}\right) - \frac{2}{5} \left(2x^2 - \frac{2}{3}\right)\right] \\
&= x^2 \left(1 + \frac{45}{61} \left(\frac{10}{9} - \frac{4}{5}\right)\right) + \frac{45}{61} \left(-\frac{10}{15} + \frac{4}{15}\right) \\
&= \frac{75}{61}x^2 - \frac{18}{61} = \frac{45}{61} \left(\frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{5}\right) = f(x)\,,
\end{aligned}$$

la funzione ottenuta è soluzione dell'equazione integrale.

2.37.4 Nucleo separabile

Consideriamo ancora un'equazione integrale di Fredholm di secondo tipo con **nucleo degenere**, ovvero tale che la dipendenza dalle due variabili sia separabile (fattorizzabile) come

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x) N_k(y)\,,$$

dove le funzioni $M_k(x)$ e $N_k(x)$ dipendono da una sola variabile che varia nell'intervallo (a,b). Alla luce di ciò, l'equazione può essere scritta come

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} M_k(x) \int_a^b N_k(y) f(y) dy$$

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k M_k(x) , \tag{2.8}$$

dove sono state definite le costanti

$$C_k = \int_a^b N_k(y) f(y) dy , \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\} .$$

I numeri dell'insieme $\{C_k\}_{k=1}^n$, che esistono grazie alla sommabilità delle funzioni dell'insieme $\{N_k(x)\}_{k=1}^n$, determinano completamente la soluzione, che può essere ottenuta risolvendo un sistema lineare $n \times n$. Moltiplichiamo la precedente identità per $N_m(x)$, per un generico indice $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, e integriamo in dx

$$\underbrace{\int_a^b N_m(x) f(x) dx}_{C_m} = \underbrace{\int_a^b N_m(x) \phi(x) dx}_{B_m} + \lambda \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_a^b N_m(x) M_k(x) dx}_{A_{mk}} \underbrace{\int_a^b N_k(y) f(y) dy}_{C_k} ,$$

riordinando e passando alla notazione matriciale si ha

$$(I - \lambda A) C = B , \tag{2.9}$$

dove I è la matrice identità $n \times n$, A è la matrice $n \times n$ di elementi

$$A_{mk} = \int_a^b N_m(x) M_k(x) dx , \qquad m, k \in \{1, 2, \dots, n\} ,$$

mentre C e B sono i vettori $n \times 1$ delle incognite, già definito, e dei termini noti i cui elementi sono

$$B_k = \int_a^b N_k(x) \phi(x) dx , \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\} .$$

Il sistema dato in Eq. (2.9) ammette un'unica soluzione se si ha: $\det(I - \lambda A) \neq 0$. Tale condizione rappresenta una non-equazione algebrica di grado n per la variabile λ e quindi esclude n valori (anche coincidenti) per λ. Una volta nota la soluzione del sistema lineare, cioè gli elementi dell'insieme $\{C_k\}_{k=1}^n$, le soluzioni dell'equazione integrale, sono più di una in quanto dipendono dai possibili valori di λ, si ottengono usando la relazione di Eq. (2.8).
Nel caso di una equazione integrale omogenea, ovvero con $\phi(x) = 0 \; \forall x$, si avranno infinite soluzioni **non-banali** se, invece, $\det(I - \lambda A) = 0$. Una volta ottenuta la soluzione del sistema, ovvero il vettore $n \times 1$ C, la soluzione dell'equazione integrale è data dall'espressione

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k M_k(x) ,$$

dalla somma della funzione termine noto $\phi(x)$ e della combinazione delle funzioni dell'insieme $\{M_k(x)\}_{k=1}^n$ con coefficienti λC_j, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Esempio

Risolviamo la stessa equazione integrale dell'esempio precedente

$$f(x) = x^2 + \int_{-1}^{1} \left(x^2 - y^2\right) f(y) dy,$$

con il metodo de nucleo separabile.

Soluzione. Il nucleo $K(x,y) = x^2 - y^2$ è separabile infatti si

$$K(x,y) = x^2 - y^2 = \sum_{k=1}^{2} M_k(x) N_k(y),$$

con, ad esempio,

$$M_1(x) = x^2, \qquad M_2(x) = -1, \qquad N_1(x) = 1, \qquad N_2(x) = x^2.$$

Gli elementi della matrice A sono

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \int_{-1}^{1} N_1(x) M_1(x) dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \\
A_{12} &= \int_{-1}^{1} N_1(x) M_2(x) dx = -\int_{-1}^{1} dx = -2, \\
A_{21} &= \int_{-1}^{1} N_2(x) M_1(x) dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}, \\
A_{22} &= \int_{-1}^{1} N_1(x) M_1(x) dx = -\int_{-1}^{1} x^2 dx = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Mentre quelli del vettore termine noto B

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int_{-1}^{1} N_1(x) x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \\
B_2 &= \int_{-1}^{1} N_2(x) x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Il sistema lineare, con $\lambda = 1$, è

$$\begin{aligned}
(I - A) C &= B \\
\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 & -2 \\ 2/5 & -2/3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/5 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1/3 & 2 \\ -2/5 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è diverso dallo zero, infatti si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1/3 & 2 \\ -2/5 & 5/3 \end{pmatrix} = \frac{61}{45},$$

ne consegue che il sistema ammette una unica soluzione. Le componenti del vettore soluzione sono

$$C_1 = \frac{45}{61} \det \begin{pmatrix} 2/3 & 2 \\ 2/5 & 5/3 \end{pmatrix} = \frac{14}{61}, \qquad C_2 = \frac{45}{61} \det \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -2/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \frac{18}{61}.$$

La funzione soluzione è

$$f(x) = x^2 + C_1 M_1(x) + C_2 M_2(x) = x^2 + \frac{14}{61} x^2 - \frac{18}{61} = \frac{75}{61} x^2 - \frac{18}{61} = \frac{45}{61} \left(\frac{5}{3} x^2 - \frac{2}{5} \right),$$

coincide con la funzione ottenuta con il metodo della serie di Neumann.