

2.18.6 La formula di Baker, Campbell e Hausdorff

Consideriamo due operatori $\hat{A}, \hat{B} : E \rightarrow E$ si ha la formula Baker-Campbell-Hausdorff (Henry Frederick Baker, 3 luglio 1866 - 17 marzo 1956, Regno Unito; John Edward Campbell, 27 maggio 1862 - primo ottobre 1924, Regno Unito; Felix Hausdorff, 8 novembre 1868 - 26 gennaio 1942, Germania), detta semplicemente formula BCH,

$$\exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) = \exp\left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{2} + \frac{[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]}{12} + \frac{[\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]}{12} + \dots\right),$$

in generale se gli operatori non commutano non vale l'identità che si ha per gli scalari, cioè

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \neq e^{\hat{A} + \hat{B}}.$$

Non dimostreremo la formula BCH completa, bensì ne ricaveremo solo i primi termini.

Dim.: In generale si ha

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{C}},$$

dove l'operatore \hat{C} è

$$\hat{C} = \ln\left(e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}\right),$$

dovremo dimostrare che per l'operatore \hat{C} valga l'espressione della formula BCH.

Per gli esponenziali possiamo scrivere gli sviluppi in serie

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^i \hat{B}^j}{i! j!} = \hat{I} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{A}\hat{B} + \frac{\hat{A}^2}{2} + \frac{\hat{B}^2}{2} + \dots$$

Sfruttiamo lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\ln(1+z)$ intorno all'origine $z=0$, ovvero

$$\ln(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k},$$

per scrivere l'operatore $\ln(\hat{I} + \hat{O})$ sotto forma di sviluppo in serie di potenze dell'operatore \hat{O}

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots, \quad \implies \quad \ln(\hat{I} + \hat{O}) = \hat{O} - \frac{\hat{O}^2}{2} + \frac{\hat{O}^3}{3} + \dots$$

L'operatore \hat{C} può essere scritto come il logaritmo della somma dell'operatore identità e della combinazione degli operatori \hat{A} e \hat{B} ottenuta dallo sviluppo in serie degli esponenziali, che gioca il ruolo dell'operatore \hat{O} dell'espressione precedente, cioè

$$\hat{C} = \ln\left(e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}\right) = \ln\left(\hat{I} + \underbrace{\hat{A} + \hat{B} + \hat{A}\hat{B} + \frac{\hat{A}^2}{2} + \frac{\hat{B}^2}{2} + \dots}_{=\hat{O}}\right).$$

Usando lo sviluppo in serie di Taylor nell'origine della funzione $\ln(1+z)$ e raccogliendo i termini dello stesso ordine nelle potenze degli operatori \hat{A} e \hat{B} , si ottiene

$$\begin{aligned}
\hat{C} &= \ln(e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}) = \ln\left(\hat{I} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{A}\hat{B} + \frac{\hat{A}^2}{2} + \frac{\hat{B}^2}{2} + \dots\right) \\
&= \hat{A} + \hat{B} + \hat{A}\hat{B} + \frac{\hat{A}^2}{2} + \frac{\hat{B}^2}{2} + \dots - \frac{(\hat{A} + \hat{B} + \hat{A}\hat{B} + \hat{A}^2/2 + \hat{B}^2/2 + \dots)^2}{2} \\
&\quad + \frac{(\hat{A} + \hat{B} + \hat{A}\hat{B} + \hat{A}^2/2 + \hat{B}^2/2 + \dots)^3}{3} + \dots \\
&= \hat{A} + \hat{B} + \hat{A}\hat{B} - \frac{\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\hat{A}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\hat{B}^2 + \mathcal{O}(\hat{A}^m\hat{B}^n)_{m+n=3} \\
&= \hat{A} + \hat{B} + \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{2} + \mathcal{O}(\hat{A}^m\hat{B}^n)_{m+n=3},
\end{aligned}$$

che rappresenta l'espressione cercata. Con il simbolo $\mathcal{O}(\hat{A}^m\hat{B}^n)_{m+n=3}$ abbiamo indicato i termini contenenti prodotti di potenze intere degli operatori \hat{A} e \hat{B} di grado uguale o superiore a tre.

Usando la formula BCH dimostriamo che l'operatore $\hat{U} = e^{i\hat{H}}$ è unitario \iff l'operatore \hat{H} è hermitiano.

Dim.: (\implies) Per ipotesi \hat{U} è unitario, quindi: $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$, usando l'espressione esponenziale di \hat{U} , per la prima identità si ha

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{i\hat{H}}e^{-i\hat{H}^\dagger} = \hat{I},$$

moltiplichiamo ambo i membri da destra per $e^{i\hat{H}^\dagger}$, poiché $i\hat{H}^\dagger$ commuta con $-i\hat{H}^\dagger$, usando la formula BCH, si ha che il prodotto degli esponenziali degli operatori è l'esponenziale della somma degli operatori ad esponente, ovvero

$$e^{i\hat{H}} \underbrace{e^{-i\hat{H}^\dagger} e^{i\hat{H}^\dagger}}_{\hat{I}} = e^{i\hat{H}^\dagger} \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \hat{H}^\dagger.$$

Per la seconda identità $U^\dagger U = \hat{I}$ la dimostrazione è analoga se si sfrutta la commutazione tra gli operatori $i\hat{H}$ e $-i\hat{H}$. Dalla dimostrazione dei due casi si ottiene quindi l'asserto, l'operatore \hat{H} è hermitiano.

Dim.: (\Leftarrow) L'ipotesi è che l'operatore \hat{U} abbia la forma $\hat{U} = e^{i\hat{H}}$, con l'operatore \hat{H} hermitiano, ne consegue che, sfruttando ancora la formula BCH, i due prodotti $\hat{U}\hat{U}^\dagger$ e $\hat{U}^\dagger\hat{U}$ sono uguali l'operatore identità, infatti

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = e^{i\hat{H}}e^{-i\hat{H}^\dagger} = e^{i\hat{H}}e^{-i\hat{H}} = \hat{I}, \quad \hat{U}^\dagger\hat{U} = e^{-i\hat{H}^\dagger}e^{i\hat{H}} = e^{-i\hat{H}}e^{i\hat{H}} = \hat{I},$$

l'operatore \hat{U} è quindi unitario.

2.19 Operatori di proiezione

È possibile definire un operatore "ket-bra" nella forma

$$\hat{O} = |a\rangle\langle b|,$$

$\forall |a\rangle \in E$ e $\forall \langle b| \in E^*$. L'operatore \hat{O} così ottenuto è lineare e la sua azione sui vettori bra, da destra verso sinistra, e quella sui vettori ket, da sinistra verso destra, è definita in termini del

prodotto scalare, rispettivamente, della sua componente ket e bra. In particolare, $\forall |c\rangle \in E$ e $\forall \langle d| \in E^*$, si hanno

$$\hat{O}|c\rangle = |a\rangle\langle b|c\rangle \in E, \quad \langle d|\hat{O} = \langle d|a\rangle\langle b| \in E^*.$$

È banale verificare che l'aggiunto dell'operatore \hat{O} è rappresentato dall'operatore ket-bra con i vettori in ordine inverso, cioè

$$\hat{O}^\dagger = (|a\rangle\langle b|)^\dagger = |b\rangle\langle a|.$$

A tal fine sfruttiamo le proprietà del prodotto scalare, infatti, $\forall |c\rangle \in E$ e $\forall \langle d| \in E^*$,

$$\langle d|\hat{O}^\dagger|c\rangle = (\langle c|\hat{O}|d\rangle)^* = (\langle c|a\rangle\langle b|d\rangle)^* = \langle d|b\rangle\langle a|c\rangle \implies \hat{O}^\dagger = |b\rangle\langle a|.$$

Un operatore **hermitiano** e **idempotente**, ovvero coincidente con una sua qualsiasi potenza intera, si chiama **proiettore** o **operatore di proiezione**. Quindi, l'operatore \hat{P} è un proiettore $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$

$$\hat{P} = \hat{P}^\dagger, \quad \hat{P} = \hat{P}^2.$$

PP1. La condizione $\hat{P} = \hat{P}^2$ implica $\hat{P} = \hat{P}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, infatti

$$\hat{P} = \hat{P}^2 = \hat{P}\hat{P} = \hat{P}\hat{P}^2 = \hat{P}^3 = \hat{P}^2\hat{P} = \hat{P}^2\hat{P}^2 = \hat{P}^4 = \dots = \hat{P}^n = \dots.$$

PP2. Gli operatori di proiezione **non sono invertibili**, sono operatori **singolari**, poiché la loro azione implica una perdita di informazione ed è quindi irreversibile. Solo nel caso banale del proiettore unitario, ovvero $\hat{P} = \hat{I}$, si ha ovviamente invertibilità. Ricaviamo questo risultato, assumendo che esista un proiettore invertibile e cercandone la forma, per cui cerchiamo un proiettore che verifichi la relazione

$$\hat{P}\hat{P}^{-1} = \hat{P}^{-1}\hat{P} = \hat{I}.$$

Sfruttando l'idempotenza $\hat{P} = \hat{P}^2$, nell'identità $\hat{I} = \hat{P}^{-1}\hat{P}$, si ha

$$\hat{I} = \hat{P}^{-1} \underbrace{\hat{P}}_{=\hat{P}^2} = \hat{P}^{-1}\hat{P}^2 = \underbrace{\hat{P}^{-1}\hat{P}}_{=\hat{I}}\hat{P} = \hat{P}.$$

PP3. La somma di due proiettori diversi, \hat{P}_1 e \hat{P}_2 , è un proiettore se e solo se i proiettori sono **ortogonali**. Ovvero $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ è un proiettore \iff

$$\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{O},$$

dove \hat{O} è l'operatore nullo.

Dim.: (\implies) Abbiamo per ipotesi che $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ è un proiettore, è quindi un operatore idempotente e, in particolare, coincide con il suo quadrato

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = (\hat{P}_1 + \hat{P}_2)^2 = \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_1\hat{P}_2 + \hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_1\hat{P}_2 + \hat{P}_2\hat{P}_1,$$

da questa identità segue che l'anticommutatore è l'operatore nullo

$$\hat{P}_1\hat{P}_2 + \hat{P}_2\hat{P}_1 = \{\hat{P}_1, \hat{P}_2\} = \hat{O},$$

ovvero che i proiettori \hat{P}_1 e \hat{P}_2 anti-commutano. Moltiplichiamo questa identità per \hat{P}_1 , prima da sinistra, poi da destra e sfruttiamo l'idempotenza dello stesso \hat{P}_1 , si hanno

$$\hat{P}_1\hat{P}_2 + \hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{O}, \quad \hat{P}_1\hat{P}_2\hat{P}_1 + \hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{O},$$

sottraendo membro a membro queste due identità si ottiene che anche il commutatore coincide con l'operatore nullo

$$\hat{P}_1\hat{P}_2 - \hat{P}_2\hat{P}_1 = [\hat{P}_1, \hat{P}_2] = \hat{0}.$$

Infine, sommando e sottraendo le espressioni dell'anticommutatore e del commutatore si arriva alla relazione di ortogonalità, cioè alle due identità

$$\frac{\{\hat{P}_1, \hat{P}_2\} + [\hat{P}_1, \hat{P}_2]}{2} = \hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{0}, \quad \frac{\{\hat{P}_1, \hat{P}_2\} - [\hat{P}_1, \hat{P}_2]}{2} = \hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{0}.$$

Dim.: (\Leftarrow) I due operatori sono ortogonali,

$$\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{P}_1 = \hat{0},$$

dobbiamo dimostrare che la somma $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ è un operatore idempotente ed hermitiano. L'hermitianità è ovvia essendo hermitiano l'operatore somma di due operatori hermitiani. L'idempotenza si verifica direttamente, calcolando il quadrato dell'operatore somma e osservando che coincide con lo stesso operatore somma, ovvero

$$(\hat{P}_1 + \hat{P}_2)^2 = \underbrace{\hat{P}_1^2}_{=\hat{P}_1} + \underbrace{\hat{P}_2^2}_{=\hat{P}_2} + \underbrace{\hat{P}_1\hat{P}_2}_{=\hat{0}} + \underbrace{\hat{P}_2\hat{P}_1}_{=\hat{0}} = \hat{P}_1 + \hat{P}_2.$$

PP4. Sia $\{\hat{P}_j\}_{j=1}^N$ un insieme di N proiettori ortogonali, ovvero tali che $\hat{P}_m\hat{P}_n = \delta_{mn}\hat{P}_n^2 = \delta_{mn}\hat{P}_n$, $\forall m, n \in \{1, 2, \dots, N\}$, allora l'operatore ottenuto dalla somma di un generico sottoinsieme di questi proiettori è esso stesso un proiettore.

PP5. Sia $|p\rangle \in E$ un generico vettore unitario, cioè tale che $\langle p|p\rangle = 1$, allora l'operatore ket-bra

$$\hat{P} = |p\rangle\langle p|$$

è un proiettore.

Dim.: Verifichiamo che l'operatore \hat{P} sia idempotente ed hermitiano. Al fine di provarne l'idempotenza, verifichiamo come il quadrato coincida l'operatore stesso, si ha

$$\hat{P}^2 = |p\rangle \underbrace{\langle p|p\rangle}_{=1} \langle p| = |p\rangle\langle p| = \hat{P}.$$

Si tratta di un operatore hermitiano, infatti

$$\hat{P}^\dagger = (|p\rangle\langle p|)^\dagger = |p\rangle\langle p| = \hat{P}.$$

La sua azione su un generico vettore $|a\rangle \in E$ è definita dal prodotto scalare

$$\hat{P}|a\rangle = |p\rangle \underbrace{\langle p|a\rangle}_{a_p} = a_p|p\rangle \in E_p,$$

lo scalare a_p rappresenta la componente del vettore $|a\rangle$ nella "direzione" $|p\rangle$ (vettore unitario) ed $E_p \subset E$ è il sotto-spazio unidimensionale di E che potremmo interpretare come la "retta" nella direzione del vettore $|p\rangle$.

2.20 Autovettori e autovalori

Dato l'operatore lineare $\hat{A} : E \rightarrow E$, in uno spazio vettoriale E su un campo scalare S , assumiamo che esista un vettore $|x\rangle \in E$, tale da essere trasformato dall'operatore \hat{A} in vettore ad esso proporzionale, ovvero tale che si abbia

$$\hat{A}|x\rangle = \lambda|x\rangle, \quad \text{per un opportuno: } \lambda \in S.$$

In questo caso si hanno le seguenti definizioni:

- il vettore $|x\rangle$ si chiama **autovettore** dell'operatore \hat{A} ;
- lo scalare λ rappresenta l'**autovalore** dell'operatore \hat{A} relativo all'autovettore $|x\rangle$;
- l'equazione che descrive l'azione dell'operatore \hat{A} sul suo autovettore $|x\rangle$ è detta **equazione agli autovalori** dell'operatore \hat{A} .

Da un punto di vista "geometrico" gli autovettori dell'operatore \hat{A} rappresentano quei vettori con "non cambiano direzione" sotto l'azione dello stesso \hat{A} , che agisce quindi come dilatatore, infatti, i vettori trasformati sono i vettori iniziali scalati di un fattore λ .

Alcuni casi particolari

- Tutti i vettori sono autovettori dell'operatore identità \hat{I} relativi allo stesso autovalore $\lambda = 1$.
- Il vettore nullo, $|0\rangle$, è autovettore di tutti gli operatori lineari ed ha autovalore arbitrario, infatti: $\forall \hat{A} : E \rightarrow E$ e $\forall \lambda \in S$ si ha l'equazione agli autovalori

$$\hat{A}|0\rangle = \lambda|0\rangle = |0\rangle.$$

2.20.1 Autovalori di operatori hermitiani

H1. Gli autovalori di un operatore hermitiano **sono reali**.

Dim.: Siano $\{|u_k\rangle\}$ e $\{\lambda_k\}$ gli insiemi degli autovettori e dei relativi autovalori di un operatore hermitiano \hat{H} . La k -esima equazione agli autovalori e la sua equazione duale sono

$$\hat{H}|u_k\rangle = \lambda_k|u_k\rangle, \quad \langle u_k|\hat{H}^\dagger = \langle u_k|\hat{H} = \lambda_k^*\langle u_k|, \quad \forall k.$$

Moltiplicando la prima equazione per il vettore bra $\langle u_k|$ da sinistra e la seconda per il vettore ket $|u_k\rangle$ da destra, otteniamo

$$\langle u_k|\hat{H}|u_k\rangle = \lambda_k\langle u_k|u_k\rangle, \quad \langle u_k|\hat{H}^\dagger|u_k\rangle = \lambda_k^*\langle u_k|u_k\rangle, \quad \forall k,$$

sottraendo membro a membro le due identità e avendo che $\langle u_k|u_k\rangle > 0$, in quanto $|0\rangle \notin \{|u_k\rangle\}$, si ha

$$\lambda_k - \lambda_k^* = 0 \quad \implies \quad \lambda_k = \lambda_k^* \quad \implies \quad \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \forall k.$$

H2. Gli autovettori relativi ad autovettori diversi di un operatore hermitiano **sono ortogonali**.

Dim.: Siano $\{|u_k\rangle\}$ e $\{\lambda_k\}$ gli insiemi degli autovettori ed autovalori relativi dell'operatore \hat{H} . Moltiplichiamo ambo i membri delle equazioni agli autovalori k -esima e j -esima, rispettivamente, per il vettore bra $\langle u_j|$ e $\langle u_k|$

$$\langle u_j|\hat{H}|u_k\rangle = \lambda_k\langle u_j|u_k\rangle, \quad \langle u_k|\hat{H}|u_j\rangle = \lambda_j\langle u_k|u_j\rangle,$$

facciamo la coniugazione complessa della seconda e sottraiamo membro a membro le due equazioni, si ottiene l'identità

$$0 = (\lambda_k - \lambda_j)\langle u_j|u_k\rangle.$$

Ne consegue che, se $\lambda_k \neq \lambda_j$, i due autovettori devono essere ortogonali, cioè: $\langle u_j|u_k\rangle = 0$.

2.20.2 Autovalori di operatori unitari

Gli autovalori di un operatore unitario \hat{U} , relativi ad autovettori diversi dal vettore nullo, sono numeri complessi di modulo unitario, ovvero delle **fasi pure**.

Dim.: Sia $|x\rangle \neq |0\rangle$ un autovettore dell'operatore \hat{U} con autovalore λ , vale quindi l'equazione

$$\hat{U}|x\rangle = \lambda|x\rangle.$$

Usando, sia la condizione di unitarietà: $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$, che l'equazione agli autovalori, calcoliamo il prodotto scalare del vettore $|x\rangle$ per se stesso come

$$\langle x|x\rangle = \langle x|\underbrace{\hat{I}}_{=\hat{U}^\dagger\hat{U}}|x\rangle = \langle x|\hat{U}^\dagger\hat{U}|x\rangle = \lambda^*\langle x|x\rangle\lambda = |\lambda|^2\langle x|x\rangle,$$

per ipotesi $|x\rangle$ non è il vettore nullo, quindi $\langle x|x\rangle > 0$, per cui la precedente identità implica

$$|\lambda|^2 = 1,$$

quindi l'asserto.

Ortogonalizzazione à la Gram-Schmidt

Sia E_N uno spazio vettoriale di dimensione finita $N \in \mathbb{N}$ ed $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ una sua base, diremo che la base è **ortonormale** (ON) $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ i vettori che la compongono sono **ortogonali** e **unitari**, ovvero se si ha

$$\langle e_j|e_k\rangle = \delta_{jk}, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

A partire da una base generica $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ è sempre possibile costruire una base ON. Il metodo di **Gram-Schmidt** (Jørgen Pedersen Gram, 27 giugno 1850 - 29 aprile 1916, Danimarca; Erhard Schmidt, 13 gennaio 1876 - 6 dicembre 1959, Germania) permette di ottenere un insieme di vettori ortogonali a partire da un insieme di vettori linearmente indipendenti in un spazio vettoriale in cui sia definito un prodotto scalare. Indicando con $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ l'insieme di partenza e con $\{|f_k\rangle\}_{k=1}^N$ quello ortogonalizzato, ma **non ancora normalizzato**, si procede come segue.

- I primi vettori dei due insiemi coincidono, quindi poniamo

$$|f_1\rangle = |u_1\rangle.$$

- Il secondo vettore $|f_2\rangle$ si ottiene sottraendo a $|u_2\rangle$ la sua componente parallela a $|f_1\rangle$,

$$|f_2\rangle = |u_2\rangle - \frac{\langle u_2|u_1\rangle}{\langle u_1|u_1\rangle}|u_1\rangle = \left(\hat{I} - \frac{|u_1\rangle\langle u_1|}{\langle u_1|u_1\rangle}\right)|u_2\rangle.$$

- Il terzo vettore $|f_3\rangle$ si ottiene sottraendo a $|u_3\rangle$ le sue componenti parallele sia a $|f_1\rangle$ che a $|f_2\rangle$,

$$|f_3\rangle = |u_3\rangle - \frac{\langle f_1|u_3\rangle}{\langle f_1|f_1\rangle}|f_1\rangle - \frac{\langle f_2|u_3\rangle}{\langle f_2|f_2\rangle}|f_2\rangle = \left(\hat{I} - \frac{|f_1\rangle\langle f_1|}{\langle f_1|f_1\rangle} - \frac{|f_2\rangle\langle f_2|}{\langle f_2|f_2\rangle}\right)|u_3\rangle.$$

- Il k -esimo vettore $|f_k\rangle$ si ottiene sottraendo a $|u_k\rangle$ tutte le sue componenti parallele ai vettori dell'insieme $\{|f_j\rangle\}_{j=1}^{k-1}$,

$$|f_k\rangle = \left(\hat{I} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|f_j\rangle\langle f_j|}{\langle f_j|f_j\rangle}\right)|u_k\rangle.$$

L'insieme di vettori $\{|f_k\rangle\}_{k=1}^N$ così definito rappresenta una base ortogonale dello spazio vettoriale E_N , essendo un insieme di N vettori ortogonali e quindi linearmente indipendenti. Per ottenere da questo insieme una base ON $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, è necessario normalizzarne i vettori, ciò può essere fatto sostituendo ciascun vettore con il vettore che si ottiene moltiplicando il vettore originale per lo scalare uguale all'inverso della sua norma. Usando la norma indotta dal prodotto scalare, definiamo i vettori $|e_k\rangle$ come

$$|e_k\rangle = \frac{|f_k\rangle}{\sqrt{\langle f_k|f_k\rangle}}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

La base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ è ON, cioè si ha

$$\langle e_j|e_k\rangle = \delta_{jk}, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$