

La matrice  $2 \times 2$  che rappresenta  $\hat{\sigma}_n$  è completamente determinata e vale

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\delta} \sin \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dalla precedente è possibile estrarre le rappresentazioni sia di  $\hat{\sigma}_x$  che di  $\hat{\sigma}_y$ , ponendo  $\theta = \pi/2$  e,  $\phi = 0$  e  $\pi/2$  rispettivamente, per cui si hanno

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\delta_x} \\ e^{i\delta_x} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\delta_y} \\ e^{i\delta_y} & 0 \end{pmatrix}.$$

I valori delle fasi  $\delta_x$  e  $\delta_y$  si ottengono imponendo condizioni di ortogonalità note, ad esempio

$$\langle x_+ | \hat{\sigma}_y | x_+ \rangle = 0.$$

L'autovettore  $x_+$  della matrice  $\sigma_x$  si ottiene risolvendo il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} (\sigma_x - I)x_+ &= 0 \\ \begin{pmatrix} -1 & e^{-i\delta_x} \\ e^{i\delta_x} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+^+ \\ x_+^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

poniamo  $x_+^+ = 1$  e normalizziamo all'unità

$$x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\delta_x} \end{pmatrix}.$$

La condizione  $\langle x_+ | \hat{\sigma}_y | x_+ \rangle = 0$  equivale all'equazione

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\delta_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\delta_y} \\ e^{i\delta_y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\delta_x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\delta_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i(\delta_y - \delta_x)} \\ e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [e^{i(\delta_x - \delta_y)} + e^{-i(\delta_x - \delta_y)}] = \cos(\delta_x - \delta_y), \end{aligned}$$

da cui si ottiene  $\delta_y = \delta_x + (2k + 1)\pi/2$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . Scegliendo  $\delta_x = 0$  e  $k = 0$ , si hanno le rappresentazioni

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\pi/2} \\ e^{i\pi/2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa scelta equivale alla trasformazione unitaria

$$U = \begin{pmatrix} e^{-i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

infatti

$$\begin{aligned} \sigma_1 \equiv \sigma'_x &= U^\dagger \sigma_x U = \begin{pmatrix} e^{i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\delta_x} \\ e^{i\delta_x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\delta_x} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 \equiv \sigma'_y &= U^\dagger \sigma_y U = \begin{pmatrix} e^{i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\delta_x} \\ ie^{i\delta_x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\delta_x} \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 \equiv \sigma'_z &= U^\dagger \sigma_z U = \begin{pmatrix} e^{i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\delta_x} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta_x} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Queste tre sono le cosiddette matrici di Pauli, talvolta date anche in forma di tri-vettore, ovvero come:  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

### 2.31.1 Proprietà delle matrici di Pauli

L'operatore vettoriale dello spin 1/2 può essere rappresentato, in unità della costante di Planck ridotta, dalle matrici di Pauli come

$$\hat{S} \leftrightarrow \vec{S} = \frac{\hbar}{2} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Alcune proprietà delle matrici di Pauli (MP).

MP1. Le MP sono hermitiane (a vista):

$$\sigma_i^{T*} = \sigma_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

MP1. Le MP sono unitarie:

$$\sigma_i^\dagger \sigma_i = \sigma_i \sigma_i^\dagger = I_2, \quad i = 1, 2, 3.$$

MP3. Inoltre, essendo unitari e hermitiane, si ha

$$\sigma_i^2 = I, \quad i = 1, 2, 3,$$

e anche

$$-i\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = I.$$

MP4. Come già visto le tracce sono nulle e i determinanti uguali a  $-1$ , ovvero

$$\text{Tr}(\sigma_i) = 0, \quad \det(\sigma_i) = -1, \quad i = 1, 2, 3.$$

### 2.31.2 Algebra delle matrici di Pauli

L'algebra delle MP è definita in termini di relazioni di commutazione e anti-commutazione, si hanno

$$[\sigma_l, \sigma_m] = 2i \varepsilon_{lmn} \sigma_n, \quad \{\sigma_l, \sigma_m\} = 2\delta_{lm}, \quad \forall l, m, n \in \{1, 2, 3\}.$$

Sottraendo membro a membro le due relazioni e dividendo per due si ha

$$\sigma_l \sigma_m = \delta_{lm} I + i \varepsilon_{lmn} \sigma_n.$$

Consideriamo il tri-vettore  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  e una coppia generica di tri-vettori  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$ , dalla relazione precedente si ha

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} I + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Nel caso in cui  $\vec{a} = \vec{b}$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = \vec{a}^2 I \implies (\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^{2n} = \vec{a}^{2n} I, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le potenze dispari si ottengono moltiplicando la precedente identità per  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})$ , ovvero

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^{2n+1} = \vec{a}^{2n} (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}).$$

La matrice che si ottiene dall'esponenziale  $e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}}$ , dove  $\vec{a}$  è un tri-vettore reale, cioè  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ , ha una forma riconducibile alla formula di Eulero di una fase complessa. Infatti, usando le espressioni per le potenze pari e dispari del prodotto scalare  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})$ , si ha

$$\begin{aligned} e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{|\vec{a}|^{2k}}{(2k)!} + \frac{i(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})}{|\vec{a}|} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{|\vec{a}|^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

da cui, sommando le serie delle funzioni seno e coseno,

$$e^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}} = \cos(|\vec{a}|) I + \frac{i(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})}{|\vec{a}|} \sin(|\vec{a}|).$$

---

**Proposizione** Le MP con l'identità formano un base ON dello spazio vettoriale delle matrici complesse  $2 \times 2$ ,  $M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ .

---

**Dim.:** Per dimostrare tale proposizione consideriamo una generica matrice complessa  $2 \times 2$ ,  $C$ , per la quale assumiamo la decomposizione

$$C = c_0 I + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_j = c_0 I + \vec{c} \cdot \vec{\sigma},$$

se,  $\forall C \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$ , i coefficienti  $c_0$  e  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  sono **univocamente determinati** allora vale l'asserto.

Usiamo l'algebra delle MP per determinarli.

- Per determinare il coefficiente  $c_0$ , calcoliamo la traccia di  $C$  e, poiché le MP hanno traccia nulla, si ha

$$\text{Tr}(C) = 2c_0, \quad \implies \quad c_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(C).$$

- Inoltre, la traccia di un generico prodotto  $\sigma_m \sigma_n$  è

$$\text{Tr}(\sigma_m \sigma_n) = \text{Tr}(2\delta_{mn} I + i\epsilon_{mnl} \sigma_l) = 2\delta_{mn},$$

quindi la traccia del prodotto della matrice  $C$  e una generica MP  $\sigma_k$  è

$$\text{Tr}(\sigma_k C) = \text{Tr}\left(\sigma_k c_0 + \sum_{j=1}^3 c_j \sigma_k \sigma_j\right) = 2 \sum_{j=1}^3 c_j \delta_{kj} = 2c_k,$$

quindi

$$\text{Tr}(\vec{\sigma} C) = 2\vec{c}, \quad \implies \quad \vec{c} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\vec{\sigma} C).$$

Riassumendo,  $\forall C \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$  si ha la decomposizione

$$C = \sum_{j=0}^3 c_j \sigma_j, \quad c_j = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_j C), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

dove abbiamo posto  $\sigma_0 = I$ , per cui

$$C = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \text{Tr}(\sigma_j C) \sigma_j.$$

La precedente identità ingloba la relazione di completezza della base  $\{\sigma_j\}_{j=0}^3$ , infatti, definendo il prodotto scalare tra due matrici di  $C_1, C_2 \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$  come<sup>4</sup>

$$(C_1, C_2) = \frac{1}{2} \text{Tr}(C_1^\dagger C_2),$$

la relazione di completezza diventa

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 (\sigma_j)_{nm} (\sigma_j)_{kl} = \delta_{mk} \delta_{nl}, \quad \forall m, n, k, l \in \{1, 2\}. \quad (2.4)$$

Applichiamo l'operatore (a due indici) a primo membro su una generica matrice  $C$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sum_{m,n=1}^2 (\sigma_j)_{nm} (\sigma_j)_{kl} C_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \text{Tr}(\sigma_j C) (\sigma_j)_{kl} = C_{kl}, \quad \forall k, l \in \{1, 2\},$$

che ovviamente coincide con

$$\sum_{m,n=1}^2 \delta_{mk} \delta_{nl} C_{mn} = C_{kl}, \quad \forall k, l \in \{1, 2\}.$$

Se applichiamo l'operatore a primo membro di eq. (2.4) scambiando gli indici di  $C$ , ovvero su  $C_{nm}$  anziché  $C_{mn}$ , si ha

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sum_{m,n=1}^2 (\sigma_j)_{nm} (\sigma_j)_{kl} C_{nm} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \text{Tr}(\sigma_j C^T) (\sigma_j)_{kl} = (C^T)_{kl} = C_{lk}, \quad \forall k, l \in \{1, 2\},$$

anche in questo caso coincide con

$$\sum_{m,n=1}^2 \delta_{mk} \delta_{nl} C_{nm} = C_{lk}, \quad \forall k, l \in \{1, 2\}.$$

Potremmo allora definire l'operatore identità come

$$\mathcal{I} = \sum_{j=0}^3 \sigma_j(\sigma_j, \bullet),$$

<sup>4</sup>La definizione è buona infatti  $(C, C)$  è un numero reale non negativo, infatti

$$(C, C) = \frac{1}{2} \text{Tr}(C^\dagger C) = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^2 |C_{mn}|^2 \geq 0,$$

per cui l'uguaglianza vale se e solo se tutti gli elementi sono nulli e quindi se la matrice è nulla.

che agisce su una generica matrice  $C \in M_{\mathbb{C}}(2 \times 2)$  come

$$\mathcal{I}C = \sum_{j=0}^3 \sigma_j(\sigma_j, C) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \sigma_j \text{Tr}(\sigma_j C) = C.$$

### 2.31.3 Modulo quadro dello spin 1/2

Abbiamo definito gli operatori delle componenti dello spin 1/2 come

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_1, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_2, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_3.$$

L'operatore modulo quadro dello spin 1/2,  $\hat{S}^2$ , è proporzionale all'identità, infatti

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2) = \frac{3}{4} \hbar^2 \hat{I}.$$

Ciò implica che, ad esempio,  $\hat{S}^2$  commuta con tutte le componenti

$$[\hat{S}^2, S_x] = [\hat{S}^2, S_y] = [\hat{S}^2, S_z] = 0.$$

Inoltre, ogni vettore  $|\psi\rangle$  dello spazio vettoriale bidimensionale dello spin è autovettore di  $\hat{S}^2$  con autovalore  $\frac{3}{4}\hbar^2$ , cioè

$$\hat{S}^2 |\psi\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 |\psi\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 |\psi\rangle, \quad \forall |\psi\rangle.$$

## 2.32 Spazi vettoriali ad infinite dimensioni

Uno spazio vettoriale complesso, dotato di prodotto scalare si dice a **dimensione infinita** se esiste un insieme di suoi vettori linearmente indipendenti costituito da infiniti elementi.

### Esempi

E1. Lo spazio delle successioni di numeri complessi con serie assolutamente convergente, ovvero lo spazio di elementi  $\{z_k\}$  con  $\sum_k |z_k| < \infty$ . In questo spazio il prodotto scalare è definito come

$$\langle z|w \rangle = \sum_k z_k^* w_k, \quad \text{con: } |z\rangle \leftrightarrow \{z_k\}, |w\rangle \leftrightarrow \{w_k\}.$$

E2. Lo spazio delle funzioni analitiche in un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  tali che esista e sia finito l'integrale

$$\int_D |f(z)|^2 dx dy, \quad z = x + iy.$$

In questo spazio il prodotto scalare è definito come

$$\langle f|g \rangle = \int_D f^*(z)g(z) dx dy, \quad \text{con: } |f\rangle \leftrightarrow f(z), |g\rangle \leftrightarrow g(z).$$

### 2.32.1 Spazi vettoriali di funzioni

L'insieme delle funzioni continue in un intervallo reale  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  rappresenta uno spazio vettoriale lineare. Tali funzioni possono essere interpretate come rappresentazioni di vettori astratti di uno spazio vettoriale  $E$ . I valori della funzione  $f(x)$  al variare di  $x$  in  $(a, b)$  descrivono le "componenti" del vettore  $|f\rangle$ . Il passaggio da dimensione finita a dimensione infinita si effettua passando dall'indice discreto  $k$  a quello continuo  $x$ .

#### Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due elementi dello spazio vettoriale  $E$ ,  $|f\rangle$  e  $|g\rangle$  si definisce come

$$\langle f|g \rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)p(x)dx,$$

dove la funzione  $p(x)$  è la **funzione peso** o **densità** ed è

- **continua;**
- **reale;**
- **definita positiva;**
- **limitata.**

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

PS1.  $\forall |f\rangle, |g\rangle \in E$  si ha

$$\langle f|g \rangle^* = \left( \int_a^b f^*(x)g(x)p(x)dx \right)^* = \int_a^b f(x)g^*(x)p(x)dx = \langle g|f \rangle.$$

PS2. Dal precedente

$$\langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 p(x)dx \geq 0,$$

l'identità vale  $\iff f(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ .

PS3. Disuguaglianza di Schwarz

$$\left| \int_a^b f^*(x)g(x)p(x)dx \right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 p(x)dx \int_a^b |g(x)|^2 p(x)dx.$$

**La metrica**

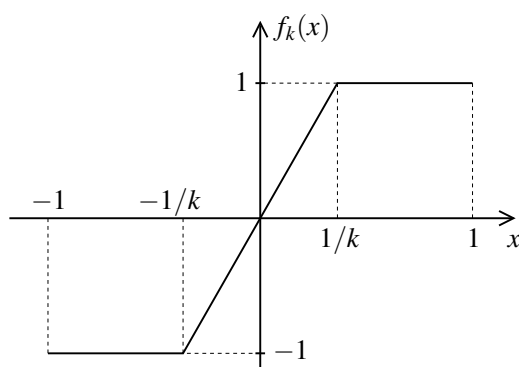
La norma può essere indotta dal prodotto scalare, infatti, anche nel caso di spazi vettoriali a infinite dimensioni si ha:  $\forall |f\rangle \in E$ ,

$$\|f\| \equiv \sqrt{\langle f|f\rangle} = \left[ \int_a^b |f(x)|^2 p(x) dx \right]^{1/2}.$$

---

**Def.:** Uno spazio vettoriale si dice **completo** se l'insieme dei suoi elementi è chiuso, ovvero quando contiene i limiti delle successioni di Cauchy di suoi elementi.

---



Uno spazio vettoriale a dimensione finita è sempre completo, ciò non è vero se la dimensione è infinita. Si consideri, ad esempio, lo spazio delle funzioni continue nell'intervallo reale  $(-1, 1)$ . La successione  $\{f_k(x)\}$  con

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < -1/k \\ kx & -1/k \leq x \leq 1/k \\ 1 & 1/k < x < 1 \end{cases},$$

come mostrato in figura. La successione converge, con il criterio di Cauchy si ottiene

$$\lim_{k,m \rightarrow \infty} \|f_k - f_m\| = \lim_{k,m \rightarrow \infty} \left[ \int_{-1}^1 |f_k(x) - f_m(x)|^2 p(x) dx \right]^{1/2} = 0,$$

la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Tale funzione ha una discontinuità nell'origine e quindi **non appartiene** allo spazio vettoriale delle funzioni continue in  $(-1, 1)$ , ovvero lo spazio **non è completo**.

Per ovviare a tale problema potremmo estendere lo spazio vettoriale includendo anche la funzioni non continue o continue a tratti come la funzione limite  $f(x)$  del caso precedente, questo, però, creerebbe problemi per la definizione del prodotto scalare che si basa sull'integrazione alla Riemann.