2.36.9 Operatori differenziali a coefficienti non costanti

Come già visto, la soluzione $u(x)$ dell'equazione differenziale

$$\hat{O}_x^{(n)} u(x) = f(x),$$

dove $\hat{O}_x^{(n)}$ e $f(x)$ sono un operatore differenziale di ordine $n \in \mathbb{N}$ e una funzione d'ingresso noti, può essere ottenuta dalla convoluzione

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y) f(y) dy,$$

della stessa funzione d'ingresso con la funzione $G(x,y)$, detta funzione di Green dell'operatore differenziale, che rappresenta la soluzione dell'equazione impulsiva

$$\hat{O}_x^{(n)} G(x,y) = \delta(x-y).$$

Tale equazione ha lo stesso operatore differenziale dell'equazione originale e una delta di Dirac come funzione d'ingresso. La soluzione più generale dell'equazione impulsiva ha la forma

$$G(x,y) = g(x,y) + \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_j(x,y),$$

dove $g(x,y)$ è una soluzione particolare, $\left\{a_j\right\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ è un insieme di coefficienti complessi da determinare imponendo le condizioni al contorno, mentre le funzioni dell'insieme $\left\{\phi_j(x,y)\right\}_{j=1}^{n}$ sono n soluzioni **indipendenti** dell'equazione omogenea

$$\hat{O}_x^{(n)} \phi_j(x,y) = 0, \qquad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\},$$

ovviamente n è il numero di gradi di libertà della soluzione del problema differenziale, coincidente con l'ordine dell'operatore differenziale, che è necessario determinare in base alle condizioni al contorno.

2.36.10 Operatori differenziali del primo ordine a coefficienti non costanti

Consideriamo l'operatore lineare del primo ordine a coefficienti non costanti

$$\hat{O}_x^{(1)} = q_0(x) + q_1(x)\frac{d}{dx},$$

con le funzioni $q_0(x)$ e $q_1(x)$ limitate e, in particolare, $q_1(x) \neq 0, \forall x$.
Cerchiamo la soluzione generale dell'equazione omogenea

$$\hat{O}_x^{(1)} u(x) = 0,$$

integrando direttamente si ha

$$\frac{du}{dx} = -\frac{q_0(x)}{q_1(x)} u(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} - \frac{q_0(x)}{q_1(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = u_0 e^{-E(x,x_0)},$$

dove si è posto $u_0 = u(x_0)$ e

$$E(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{q_0(x')}{q_1(x')} dx'.$$

La soluzione dell'equazione impulsiva

$$\hat{O}_x^{(1)} G(x,y) = \delta(x-y)\,,$$

ha la forma

$$G(x,y) = g(x,y) + c(y)u(x)\,,$$

dove $g(x,y)$ è una soluzione particolare e $c(y)$ è una funzione arbitraria di y, costante in x, quindi $c(y)u(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea. In questo caso, con un operatore differenziale del primo ordine si ha una sola soluzione dell'equazione omogenea e quindi un solo coefficiente da determinare con una sola condizione al contorno. Possiamo riscrivere come

$$G(x,y) = g(x,y) + d(y)e^{-E(x,y)}\,, \tag{2.5}$$

dove abbiamo posto $d(y) = c(y)u(y)$, ovvero abbiamo scelto il valore arbitrario $x_0 = y$.
Poiché la delta di Dirac $\delta(x-y)$ è nulla se $x \neq y$, la soluzione particolare, in questi casi, diventa quella dell'equazione omogenea, cioè

$$g(x,y) = \begin{cases} a_-(y)e^{-E(x,y)} & x < y \\ \\ a_+(y)e^{-E(x,y)} & x > y \end{cases}\,. \tag{2.6}$$

Le funzioni $a_\pm(y)$, che non dipendono dalla variabile x e quindi sono costanti in x, non sono arbitrarie, in particolare, verificano la condizione

$$\lim_{x\to y^\pm} g(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} g(y\pm\varepsilon,y) = a_\pm(y)\,,$$

che è conseguenza dell'annullamento del limite dell'integrale

$$\lim_{x\to y^\pm} E(x,y) = \lim_{x\to y^\pm} \int_y^x \frac{q_0(x')}{q_1(x')}dx' = 0\,,$$

per cui il valore limite dell'esponenziale è unitario, cioè

$$\lim_{x\to y^\pm} e^{-E(x,y)} = 1\,.$$

In generale si ha

$$g(x+\varepsilon,y) - g(x-\varepsilon,y) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\partial g(x',y)}{\partial x'}dx'\,, \tag{2.7}$$

ma la funzione $g(x,y)$ è una soluzione particolare dell'equazione impulsiva, ovvero

$$\begin{aligned} \hat{O}_x^{(1)} g(x,y) &= \delta(x-y) \\ q_0(x)g(x,y) + q_1(x)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} &= \delta(x-y)\,, \end{aligned}$$

da cui si ottiene l'espressione della derivata parziale della stessa funzione $g(x,y)$ rispetto alla variabile x

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\delta(x-y)}{q_1(x)} - \frac{q_0(x)g(x,y)}{q_1(x)}\,.$$

Riscriviamo l'identità data in Eq. (2.7) con $x = y$ e usando la relazione precedente per la derivata parziale

$$g(y+\varepsilon,y)-g(y-\varepsilon,y)=\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\frac{\partial g(x',y)}{\partial x'}dx'=\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\left(\frac{\delta(x'-y)}{q_1(x')}-\frac{q_0(x')g(x',y)}{q_1(x')}\right)dx',$$

calcoliamo, quindi, i limiti per $\varepsilon \to 0^+$ di ambo in membri. Il primo tende alla differenza delle funzioni $a_+(y)$ e $a_-(y)$, infatti

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(g(y+\varepsilon,y)-g(y-\varepsilon,y)\right)=a_+(y)-a_-(y);$$

il secondo, invece, tende all'inverso della funzione $q_1(x)$, cioè

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\left(\frac{\delta(x'-y)}{q_1(x')}-\frac{q_0(x')g(x',y)}{q_1(x')}\right)dx'=\frac{1}{q_1(y)}-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon}\frac{q_0(x')g(x',y)}{q_1(x')}dx'=\frac{1}{q_1(y)}.$$

Il valore limite dell'ultimo integrale è nullo in quanto si annulla l'ampiezza dell'intervallo di integrazione e la funzione integranda è integrabile. In definitiva si ottiene l'identità

$$a_+(y)-a_-(y)=\frac{1}{q_1(y)},$$

in base alla quale è possibile ottenere la funzione $a_\pm(y)$ in termini delle funzioni $q_1(y)$ e $a_\mp(y)$, una volta che quest'ultima sia stata scelta arbitrariamente. La possibilità più economica dal punto di vista pratico è quella di usare la funzione nulla, ovvero poniamo $a_-(y) = 0$ in tutto il dominio e quindi $a_+(y) = 1/q_1(y)$. In questo caso la soluzione particolare $g(x,y)$ data in Eq. (2.6) diventa

$$g(x,y)=\left\{\begin{array}{cc} 0 & x<y \\ \dfrac{e^{-E(x,y)}}{q_1(y)} & x>y \end{array}\right\}=\theta(x-y)\frac{e^{-E(x,y)}}{q_1(y)},$$

dove $\theta(x)$ la funzione gradino di Heaviside.
Usando questo risultato, la soluzione generale, data in Eq. (2.5), dell'equazione impulsiva assume la forma

$$G(x,y)=g(x,y)+d(y)e^{-E(x,y)}=\left(\frac{\theta(x-y)}{q_1(y)}+d(y)\right)e^{-E(x,y)}.$$

Verifichiamo questa soluzione dimostrando che il risultato dell'azione dell'operatore differenziale sulla funzione $G(x,y)$, ovvero

$$\hat{O}_x^{(1)}G(x,y)\;=\;q_0(x)G(x,y)+q_1(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}$$

sia una delta di Dirac. A tal fine calcoliamo la derivata parziale

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}&=\left[\frac{\delta(x-y)}{q_1(y)}-\frac{\partial E(x,y)}{\partial x}\left(\frac{\theta(x-y)}{q_1(y)}+d(y)\right)\right]e^{-E(x,y)}\\&=\left[\frac{\delta(x-y)}{q_1(y)}-\frac{q_0(x)}{q_1(x)}\left(\frac{\theta(x-y)}{q_1(y)}+d(y)\right)\right]e^{-E(x,y)}\end{aligned}$$

e la usiamo nell'espressione precedente, per cui si ha

$$
\begin{aligned}
\hat{O}_x^{(1)} G(x,y) &= q_0(x) G(x,y) + q_1(x) \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} \\
&= \left\{ q_0(x) \left(\frac{\theta(x-y)}{q_1(y)} + d(y) \right) \right. \\
&\quad \left. + q_1(x) \left[\frac{\delta(x-y)}{q_1(y)} - \frac{q_0(x)}{q_1(x)} \left(\frac{\theta(x-y)}{q_1(y)} + d(y) \right) \right] \right\} e^{-E(x,y)} \\
&= \left[\frac{q_0(x)\theta(x-y)}{q_1(y)} + q_0(x) d(y) + \delta(x-y) - q_0(x) \left(\frac{\theta(x-y)}{q_1(y)} + d(y) \right) \right] e^{-E(x,y)} \\
&= \delta(x-y) e^{-E(x,y)} = \delta(x-y) e^{-E(x,x)} = \delta(x-y) ,
\end{aligned}
$$

l'ultima identità segue dal fatto che $E(x,x) = 0$.

2.36.11 Operatori differenziali del secondo ordine a coefficienti non costanti

Consideriamo l'operatore lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti

$$
\hat{O}_x^{(2)} = q_0(x) + q_1(x) \frac{d}{dx} + q_2(x) \frac{d^2}{dx^2} ,
$$

con le funzioni $q_0(x)$, $q_1(x)$ e $q_2(x)$ limitate e inoltre richiediamo che $q_2(x) \neq 0 , \forall x$.
L'equazione differenziale ha la forma

$$
\hat{O}_x^{(2)} u(x) = f(x) ,
$$

dove $u(x)$ è la funzione incognita ed $f(x)$ è la funzione d'ingresso.
Dimostriamo che è sempre possibile portare l'equazione precedente nella forma

$$
\hat{P}_x^{(2)} v(x) = g(x) ,
$$

dove le funzioni incognita $v(x)$ e d'ingresso $g(x)$ sono legate da relazioni note rispettivamente alle funzioni $u(x)$ e $f(x)$, e $\hat{P}_x^{(2)}$ è l'operatore differenziale

$$
\hat{P}_x^{(2)} = V(x) + \frac{d^2}{dx^2} ,
$$

con la funzione $V(x)$ dipendente dalle funzioni $q_0(x)/q_2(x)$, $q_1(x)/q_2(x)$ e dalla derivata prima della seconda.
Dividiamo per $q_2(x)$ ambo i membri dell'equazione iniziale e introduciamo le funzioni: $p(x) = q_1(x)/q_2(x)$, $r(x) = q_0(x)/q_2(x)$, $s(x) = f(x)/q_2(x)$, si ha

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{q_0(x)}{q_2(x)} + \frac{q_1(x)}{q_2(x)} \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2} \right) u(x) &= \frac{f(x)}{q_2(x)} \\
\left(\frac{d^2}{dx^2} + p(x) \frac{d}{dx} + r(x) \right) u(x) &= s(x) .
\end{aligned}
$$

Facciamo il cambiamento di variabile

$$
u(x) \to v(x) = \frac{u(x)}{\phi(x)} ,
$$

dove la funzione $\phi(x)$ è sempre diversa da zero ed è definita in modo tale da annullare il coefficiente della derivata prima $v'(x)$. In dettaglio si ha

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{dx^2}+p(x)\frac{d}{dx}+r(x)\right)\phi(x)v(x) &= s(x)\\ \phi''(x)v(x)+2\phi'(x)v'(x)+\phi(x)v''(x)+p(x)\left(\phi'(x)v(x)+\phi(x)v'(x)\right)+r(x)\phi(x)v(x) &= s(x)\\ v''(x)\phi(x)+v'(x)\left(2\phi'(x)+\phi(x)p(x)\right)+v(x)\left(\phi''(x)+\phi'(x)p(x)+\phi(x)r(x)\right) &= s(x)\end{aligned}$$

da cui si ottiene che, affinché sia nullo il coefficiente di $v'(x)$, la funzione $\phi(x)$ deve soddisfare l'equazione differenziale del primo ordine

$$\phi'(x)=-\frac{1}{2}\phi(x)p(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{d\phi}{\phi}=-\frac{1}{2}p(x)dx \quad\Rightarrow\quad \phi(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}.$$

Le derivate prima e seconda della funzione $\phi(x)$ così ottenuta sono

$$\phi'(x)=-\frac{1}{2}p(x)\phi(x), \qquad \phi''(x)=\left(-\frac{1}{2}p'(x)+\frac{1}{4}p^2(x)\right)\phi(x).$$

Sostituendo nella precedente e dividendo per la stessa funzione $\phi(x)$ e usando le espressioni appena ottenute per le sue derivate prima e seconda, si ha

$$\begin{aligned}v''(x)+v(x)\left(\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}+\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}p(x)+r(x)\right) &= \frac{s(x)}{\phi(x)}\\ v''(x)+v(x)\left(-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x)+r(x)\right) &= \frac{s(x)}{\phi(x)},\end{aligned}$$

da cui, rinominando la funzione coefficiente della funzione $v(x)$ e la funzione termine noto come

$$V(x)=-\frac{1}{2}p'(x)-\frac{1}{4}p^2(x)+r(x), \qquad g(x)=\frac{s(x)}{\phi(x)},$$

si ottiene l'equazione cercata

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)v(x)=g(x).$$

In modo univoco è possibile trasformare un problema differenziale generico del secondo ordine, caratterizzato dall'operatore differenziale $\hat{O}_x^{(2)}$, definito in termini delle funzioni $q_0(x)$, $q_1(x)$ e $q_2(x)$, e dalla funzione d'ingresso $f(x)$, nel problema differenziale, sempre del secondo ordine, definito dall'operatore differenziale $\hat{P}_x^{(2)}$ dipendente dalle funzioni $r(x)=q_0/q_2(x)$, $p(x)=q_1(x)/q_2(x)$ e $p'(x)$, e dalla funzione d'ingresso $g(x)=s(x)/\phi(x)=(f(x)/q_2(x))/\phi(x)$, dove la $\phi(x)$ è una funzione nota. Dalla soluzione $v(x)$ di quest'ultimo si ottiene la soluzione $u(x)$ del problema originale secondo la relazione $u(x)=v(x)\phi(x)$, con la stessa funzione $\phi(x)$ che compare nella relazione che lega le funzioni d'ingresso $f(x)$ e $g(x)$.

2.36.12 Funzione di Green di un operatore del secondo ordine

Teorema. La funzione di Green dell'operatore differenziale del secondo ordine

$$\hat{P}_x^{(2)}=\frac{d^2}{dx^2}+V(x),$$

è

$$G(x,y) = a_1(y)\phi_1(x) + a_2(y)\phi_2(x) - \frac{\theta(x-y)\phi_1(x)\phi_2(y) + \theta(y-x)\phi_1(y)\phi_2(x)}{W(x)},$$

dove $a_1(y)$ e $a_2(y)$ sono funzioni arbitrarie della variabile y e, $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ sono soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea

$$\hat{P}_x^{(2)}\phi_{1,2}(x) = 0.$$

Infine, la funzione $W(x)$ è il loro Wronskiano (Josef Maria Hoene-Wroński, 23 agosto 1776 - 9 agosto 1853, Polonia. Pronuncia: *iusef hene vronschi*)

$$w(x) = w[\phi_1(x), \phi_2(x)] = \det\begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{pmatrix} = \phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x).$$

Dim.: Per prima cosa osserviamo che la derivata prima dello Wronskiano è nulla, ovvero che esso non dipende dalla variabile x. Si ha

$$w'(x) = \phi_1(x)\phi_2''(x) - \phi_1''(x)\phi_2(x),$$

poiché le funzioni $\phi_{1,2}(x)$ sono soluzioni dell'equazione omogenea si ha anche l'identità

$$0 = \hat{P}_x^{(2)}\phi_{1,2}(x) = \phi_{1,2}''(x) + V(x)\phi_{1,2}(x) \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{1,2}''(x) = -V(x)\phi_{1,2}(x),$$

che usata nella precedente dà

$$w'(x) = \phi_1(x)\phi_2''(x) - \phi_1''(x)\phi_2(x) = -V(x)\phi_1(x)\phi_2(x) + V(x)\phi_2(x)\phi_1(x) = 0.$$

Calcoliamo la derivata parziale rispetto alla variabile x della funzione $G(x,y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} &= a_1(y)\phi_1'(x) + a_2(y)\phi_2'(x) - \frac{\delta(x-y)\phi_1(x)\phi_2(y) + \theta(x-y)\phi_1'(x)\phi_2(y)}{W(x)} \\ &\quad + \frac{-\delta(y-x)\phi_1(y)\phi_2(x) + \theta(y-x)\phi_1(y)\phi_2'(x)}{W(x)} \\ &= a_1(y)\phi_1'(x) + a_2(y)\phi_2'(x) - \frac{\theta(x-y)\phi_1'(x)\phi_2(y) + \theta(y-x)\phi_1(y)\phi_2'(x)}{W(x)},\end{aligned}$$

l'ultima identità è stata ottenuta cancellando i termini con le delta di Dirac che, essendo opposti, hanno somma nulla.
Di conseguenza, la derivata parziale seconda rispetto alla variabile x vale

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} &= a_1(y)\phi_1''(x) + a_2(y)\phi_2''(x) - \frac{\theta(x-y)\phi_1''(x)\phi_2(y) + \theta(y-x)\phi_1(y)\phi_2''(x)}{W(x)} \\ &\quad -\delta(x-y)\frac{\phi_1'(x)\phi_2(y) - \phi_1(y)\phi_2'(x)}{W(x)}.\end{aligned}$$

Per i primi due termini a secondo membro usiamo le espressioni

$$\phi_{1,2}''(x) = -V(x)\phi_{1,2}(x),$$

per cui si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} &= -V(x)\left[a_1(y)\phi_1(x)+a_2(y)\phi_2(x)-\frac{\theta(x-y)\phi_1(x)\phi_2(y)+\theta(y-x)\phi_1(y)\phi_2(x)}{W(x)}\right]\\ &\quad -\delta(x-y)\frac{\phi_1'(x)\phi_2(y)-\phi_1(y)\phi_2'(x)}{W(x)}\,,\end{aligned}$$

la quantità tra parentesi quadre è la funzione $G(x,y)$ e il numeratore dell'ultimo termine è l'opposto dello Wronskiano, quindi

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} = -V(x)G(x,y)+\delta(x-y)\,,$$

da cui

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]G(x,y)=\delta(x-y)\,,$$

che rappresenta la definizione della funzione di Green dell'operatore differenziale dato.

2.37 Equazioni integrali

Si definisce **equazione integrale** un'equazione in cui la funzione incognita sia presente sotto il segno di integrale. Due classi fondamentali di equazioni integrali (EI) sono le cosiddette equazioni di **Fredholm** e di **Volterra** (Erik Ivar Fredholm, 7 aprile 7, 1866 - 17 agosto, 1927, Svezia; Vito Volterra, 3 maggio 1860 - 11 ottobre 1940, Italia).
In particolare le EI di Fredholm sono:

- primo tipo: $\phi(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy;$
- secondo tipo: $f(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \phi(x).$

Le EI di Volterra si differenziano poiché l'estremo di integrazione superiore è variabile, infatti si hanno

- primo tipo: $\phi(x) = \int_a^x K(x,y)f(y)dy;$
- secondo tipo: $f(x) = \int_a^x K(x,y)f(y)dy + \phi(x),$

dove: $f(x)$ la funzione incognita, $\phi(x)$ è la funzione termine noto e $K(x,y)$ è il kernel, le equazioni sono omogenee se $\phi(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$.

2.37.1 Teoremi di esistenza delle soluzioni delle equazioni integrali

Come vedremo, è possibile interpretare un'equazione integrale come la rappresentazione funzione di un'equazione vettoriale, perciò enunceremo e dimostreremo dei teoremi concernenti procedure risolutive di natura vettoriale e operatoriale. Innanzitutto la definizione di operatore di **contrazione** o semplicemente **contrazione**.

Def.: Un operatore $\hat{A}: E\to E$, si definisce **contrazione** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, |x\rangle, |y\rangle \in E$, $\exists\, \alpha\in(0,1)$, tale che

$$\left\|\hat{A}|x\rangle - \hat{A}|y\rangle\right\| \le \alpha\,\|x-y\|\,.$$

Teorema del punto fisso. Sia $\hat{A}: E \to E$ una contrazione ed E chiuso, **allora** $\exists!\, |a\rangle \in E$, tale che

$$\hat{A}|a\rangle = |a\rangle\,,$$

il vettore $|a\rangle$ è detto **punto fisso** dell'operatore $\hat{A}$.

Dim.: Per ipotesi l'operatore è una contrazione, ovvero $\exists\, \alpha \in (0,1)$, tale che,

$$\left\|\hat{A}|x\rangle - \hat{A}|y\rangle\right\| \leq \alpha\, \|x-y\|\,, \qquad \forall\, |x\rangle, |y\rangle \in E\,.$$

Costruiamo una successione in E, a partire da un generico $|a_0\rangle \in E$, con la regola ricorsiva

$$|a_k\rangle = \hat{A}|a_{k-1}\rangle = \hat{A}^{k-1}|a_1\rangle\,, \qquad k = 1,2,\ldots\,.$$

Dimostriamo che $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy. Infatti sfruttando il fatto che $\hat{A}$ è una contrazione, $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\|a_{k+1} - a_k\| = \left\|\hat{A}|a_k\rangle - \hat{A}|a_{k-1}\rangle\right\| \leq \alpha\, \|a_k - a_{k-1}\| \leq \alpha^2\, \|a_{k-1} - a_{k-2}\| \leq \ldots \leq \alpha^k\, \|a_1 - a_0\|\,.$$

Allora, $\forall\, m,n \in \mathbb{N}$, con, ad esempio, $m < n$, si ha

$$\begin{aligned}
\|a_n - a_m\| &\leq \|a_n - a_{n-1}\| + \|a_{n-1} - a_{n-2}\| + \ldots + \|a_{m+1} - a_m\| \\
&\leq \alpha^{n-1}\, \|a_1 - a_0\| + \alpha^{n-2}\, \|a_1 - a_0\| + \ldots + \alpha^m\, \|a_1 - a_0\| \\
&= \left(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \ldots + \alpha^m\right) \|a_1 - a_0\| = \alpha^m \left(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-m-1}\right) \|a_1 - a_0\| \\
&= \alpha^m \frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}\, \|a_1 - a_0\| < \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\, \|a_1 - a_0\|\,.
\end{aligned}$$

Nel limite $m \to \infty$, che, avendo $m < n$, implica anche $n \to \infty$, si ha

$$\lim_{m(n)\to\infty} \|a_n - a_m\| = 0\,,$$

Ne consegue che $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ è una successione di Cauchy che converge in E **chiuso**. Ovvero, $\exists\, |a\rangle \in E$, tale che

$$\lim_{k\to\infty} |a_k\rangle = |a\rangle\,.$$

Dimostriamo che questo vettore rappresenta il punto fisso cercato, minorando la norma $\left\|\hat{A}|a\rangle - |a\rangle\right\|$. Usiamo la disuguaglianza triangolare e l'inserimento di un generico vettore della successione

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{A}|a\rangle - |a\rangle\right\| &\leq \left\|\hat{A}|a\rangle - |a_k\rangle\right\| + \left\||a\rangle - |a_k\rangle\right\| = \left\|\hat{A}|a\rangle - \hat{A}|a_{k-1}\rangle\right\| + \left\||a\rangle - |a_k\rangle\right\| \\
&\leq \alpha\, \left\||a\rangle - |a_{k-1}\rangle\right\| + \left\||a\rangle - |a_k\rangle\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0\,,
\end{aligned}$$

il vettore $|a\rangle$ **è il punto fisso dell'operatore** $\hat{A}$. Rimane da dimostrare che tale vettore è unico. Supponiamo per assurdo che non lo sia e che, quindi, $\exists\, |b\rangle \in E$, tale che: $\hat{A}|b\rangle = |b\rangle$. La norma della differenza tra i due punti fissi è

$$0 \leq \|a-b\| = \left\|\hat{A}|a\rangle - \hat{A}|b\rangle\right\| \leq \alpha\, \|a-b\|\,,$$

poiché: $\alpha \in (0,1)$, questa disuguaglianza implica che $\|a-b\| = 0$, ovvero che il **punto fisso sia unico**.