Lo **scarto quadratico medio** di una osservabile $\hat{H}$ in uno stato $|\psi\rangle$ è definito come

$$\Delta H_\psi \equiv \sqrt{\left\langle \left(\hat{H} - \langle \hat{H}\rangle_\psi \hat{I}\right)^2 \right\rangle_\psi},$$

da cui

$$\begin{aligned}
\left(\Delta H_\psi\right)^2 &= \langle\psi| \left(\hat{H} - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\hat{I}\right)^2 |\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - 2\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^2 + \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^2 \\
&= \langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^2 \\
&= \langle\hat{H}^2\rangle_\psi - \langle\hat{H}\rangle_\psi^2 .
\end{aligned}$$

Si dimostra che lo scarto quadratico medio di un operatore hermitiano $\hat{H}$ rispetto ad uno stato $|\psi\rangle$ è nullo $\Longleftrightarrow$ $|\psi\rangle$ è un autostato di $\hat{H}$.
Dim.: ($\Longrightarrow$) Si ha per ipotesi che $\Delta H_\psi = 0$, quindi

$$\begin{aligned}
0 = \left(\Delta H_\psi\right)^2 &= \langle\psi| \left(\hat{H} - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\hat{I}\right)^2 |\psi\rangle \\
&= \langle\psi| \left(\hat{H} - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\hat{I}\right) \left(\hat{H} - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\hat{I}\right) |\psi\rangle \\
&= \langle\psi| \left(\hat{H}^\dagger - \langle\psi|\hat{H}^\dagger|\psi\rangle\hat{I}\right)^\dagger \left(\hat{H} - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\hat{I}\right) |\psi\rangle \\
&= \langle\psi| \left(\hat{H} - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\hat{I}\right)^\dagger \left(\hat{H} - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\hat{I}\right) |\psi\rangle
\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\left(\hat{H} - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle\hat{I}\right) |\psi\rangle = |0\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle,$$

quindi, $|\psi\rangle$ è autostato di $\hat{H}$ con autovalore $\lambda = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$.
Dim.: ($\Longleftarrow$) Se $|\psi\rangle$ è autostato di $\hat{H}$ con autovalore λ si ha

$$\left(\Delta H_\psi\right)^2 = \langle\hat{H}^2\rangle_\phi - \langle\hat{H}\rangle_\phi^2 = \langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^2 = \lambda^2 - \lambda^2 = 0 .$$

2.29.1 Principio di indeterminazione di Heisenberg

(Werner Karl Heisenberg, 5 dicembre 1901 - primo febbraio 1976, Germania).
Siano $\hat{A}, \hat{B} : E_N \to E_N$ due operatori hermitiani limitati **allora**, $\forall |\psi\rangle \in E_N$, si ha la disuguaglianza

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} \left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle_\psi\right| .$$

Dim.: Definiamo i vettori

$$|\psi_a\rangle = \left(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi\hat{I}\right)|\psi\rangle, \qquad |\psi_b\rangle = \left(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle_\psi\hat{I}\right)|\psi\rangle,$$

per quanto visto prima, gli scarti quadratici medi sono

$$\Delta A_\psi = \|\psi_a\|, \qquad \Delta B_\psi = \|\psi_b\| .$$

Usando la disuguaglianza di Schwarz si ottiene la minorazione

$$\begin{aligned}
\Delta A_\psi \Delta B_\psi &= \|\psi_a\| \, \|\psi_b\| \\
&\geq |\langle\psi_a|\psi_b\rangle| \\
&\geq |\mathrm{Im}\left(\langle\psi_a|\psi_b\rangle\right)| \\
&\geq \left|\frac{1}{2i}\left(\langle\psi_a|\psi_b\rangle - \langle\psi_b|\psi_a\rangle\right)\right| .
\end{aligned}$$

Dalla definizione dei vettori $|\psi_a\rangle$ e $|\psi_b\rangle$, si hanno

$$\begin{aligned}
\langle\psi_a|\psi_b\rangle &= \langle\psi|\left(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle_\psi\hat{I}\right)\left(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle_\psi\hat{I}\right)|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle-\langle\hat{A}\rangle_\psi\langle\hat{B}\rangle_\psi-\langle\hat{A}\rangle_\psi\langle\hat{B}\rangle_\psi+\langle\hat{A}\rangle_\psi\langle\hat{B}\rangle_\psi \\
&= \langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle-\langle\hat{A}\rangle_\psi\langle\hat{B}\rangle_\psi\,, \\
\langle\psi_b|\psi_a\rangle &= \langle\psi|\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle-\langle\hat{B}\rangle_\psi\langle\hat{A}\rangle_\psi\,,
\end{aligned}$$

che usate a secondo membro della precedente disuguaglianza danno il risultato cercato

$$\begin{aligned}
\Delta A_\psi\Delta B_\psi \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi_a|\psi_b\rangle-\langle\psi_b|\psi_a\rangle\right| &= \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle-\langle\psi|\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\langle\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi\rangle\right|
\end{aligned}$$

ovvero il principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta A_\psi\Delta B_\psi \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle_\psi\right|\,.$$

Un caso particolarmente interessante è quello delle cosiddette **variabili canonicamente coniugate**. Due grandezze si definiscono in questo modo quando una di esse descrive il sistema in termini spazio-temporali, mentre l'altra ne definisce la dinamica. Considerando una particella, una coppia di variabili canonicamente coniugate è costituita dalla posizione e dalla quantità di moto, indicando con $\hat{x}$ e $\hat{p}_x$ gli operatori associati alle componenti x ti tali grandezze, il loro commutatore vale

$$[\hat{x},\hat{p}_x] = i\hbar\,,$$

dove $\hbar$ è la costante di Planck (Marx Karl Ernst Ludwig Planck, 23 aprile 1858 - 4 ottobre 1947, Germania), la precedente è anche detta **relazione di commutazione canonica**.
Dal principio di indeterminazione di Heisenberg segue che

$$(\Delta x)_\psi(\Delta p_x)_\psi \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{x},\hat{p}_x]\rangle_\psi\right| = \frac{\hbar}{2}\,,$$

che rappresenta una delle forme più note della disuguaglianza.

2.30 Diagonalizzabilità simultanea di operatori normali

Come visto, un operatore normale e limitato $\hat{A}$ ammette un insieme di autovettori ON $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, inoltre indichiamo con $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ l'insieme degli autovalori corrispondenti. Se A è la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto a una base ON generica $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=1}^N$, la rappresentazione diagonale rispetto alla base di autovettori, $A_d = \mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N)$, si ottiene attraverso la matrice unitaria U come

$$A_d = U^\dagger A U\,.$$

Questa relazione si può ottenere dalla rappresentazione spettrale, che trattandosi di un operatore normale, ha la forma

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^N \alpha_k|a_k\rangle\langle a_k|\,,$$

infatti, l'elemento (m,n) della matrice A è dato dal sandwich

$$
\begin{aligned}
A^m_n = \langle e_m|\hat{A}|e_n\rangle &= \sum_{k=1}^{N} \langle e_m|a_k\rangle\, \alpha_k\, \langle a_k|e_n\rangle = \sum_{l,k=1}^{N} \langle e_m|a_l\rangle\, \alpha_k \delta^l_k\, \langle a_k|e_n\rangle \qquad (2.3)\\
&= \sum_{l,k=1}^{N} \underbrace{\langle e_m|a_l\rangle}_{U^m_l} \underbrace{\alpha_k \langle a_l|a_k\rangle}_{(A_d)^l_k} \underbrace{\langle a_k|e_n\rangle}_{(U^{T*})^k_n} = \left(UA_dU^\dagger\right)^m_n, \quad \forall m,n \in \{1,2,\dots,N\}\,.
\end{aligned}
$$

Come già visto, la matrice unitaria U ha per l-esima colonna le componenti del vettore $|a_l\rangle$ rispetto alla base $\{|e_m\rangle\}_{m=1}^N$. Ovvero, se $|a_l\rangle = a^m_{(l)}|e_m\rangle$, con $a^m_{(l)} = \langle e_m|a_l\rangle = U^l_m$, la matrice U è

$$
U = \begin{pmatrix} a^1_{(1)} & a^1_{(2)} & \dots & a^1_{(N)} \\ a^2_{(1)} & a^2_{(2)} & \dots & a^2_{(N)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^N_{(1)} & a^N_{(2)} & \dots & a^N_{(N)} \end{pmatrix}.
$$

Invertendo la relazione di Eq. (2.3), si ha l'espressione di A_d in funzione della rappresentazione non diagonale A e della matrice unitaria U

$$
A_d = U^\dagger A U\,.
$$

Teorema per la diagonalizzazione simultanea. Due operatori normali $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono diagonalizzabili simultaneamente $\Longleftrightarrow$ commutano, ovvero se $[\hat{A},\hat{B}] = 0$.

Dim.: ($\Longrightarrow$) Per ipotesi esiste una base ON $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$, rispetto alla quale le matrici che rappresentano i due operatori, che indichiamo con A_d e B_d, sono diagonali. Questa base è quindi costituita da autovettori comuni di $\hat{A}$ e $\hat{B}$, per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$
\hat{A}|u_k\rangle = \alpha_k|u_k\rangle\,, \qquad \hat{B}|u_k\rangle = \beta_k|u_k\rangle\,, \qquad \forall k \in \{1,2,\dots,N\}\,.
$$

Ne consegue che gli elementi delle matrici A_d e B_d sono

$$
(A_d)^k_m = \alpha_m\delta^k_m = \langle u_m|\hat{A}|u_k\rangle\,, \quad (B_d)^k_m = \beta_m\delta^k_m = \langle u_m|\hat{B}|u_k\rangle\,, \quad \forall k,m \in \{1,2,\dots,N\}\,.
$$

Calcoliamo il generico elemento (k,m) della matrice che rappresenta il commutatore degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ in questa stessa rappresentazione, si ha

$$
\begin{aligned}
[A_d,B_d]^k_m &= \left(A_dB_d - B_dA_d\right)^k_m \\
&= (A_d)^k_j(B_d)^j_m - (B_d)^k_l(A_d)^l_m \\
&= \delta^k_j\delta^j_m\alpha_k\beta_m - \delta^k_l\delta^l_m\beta_k\alpha_m \\
&= \delta^k_m\alpha_k\beta_m - \delta^k_m\beta_k\alpha_m = 0\,, \qquad \forall k,m \in \{1,2,\dots,N\}\,.
\end{aligned}
$$

L'annullamento in questa rappresentazione equivale all'annullamento del commutatore in ogni altra rappresentazione, ovvero l'annullamento del commutatore tra gli operatori e quindi l'asserto.
Dim.: ($\Longleftarrow$) Si ha per ipotesi che gli operatori normali $\hat{A}$ e $\hat{B}$ commutano, dobbiamo dimostrare che esiste un insieme ON di autovettori comuni. Sia $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ un insieme ON di autovettori di $\hat{A}$, con autovalori $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, per cui si hanno le equazioni

$$
\hat{A}|u_k\rangle = \alpha_k|u_k\rangle\,, \qquad \forall k \in \{1,2,\dots,N\}\,.
$$

La rappresentazione di $\hat{A}$ rispetto a questa base di autovettori è ovviamente diagonale. Supponiamo di riordinare gli autovettori in modo da raggruppare quelli relativi ad eventuali autovalori degeneri. Si hanno, allora, i due insiemi: $\{\lambda_j\}_{j=1}^{M}$, con $M \leq N$, che è quello degli autovalori distinti e $\{m_j\}_{j=1}^{M} \subset \mathbb{N}$, che rappresenta l'insieme dei relativi gradi di degenerazione. La matrice A_d può essere quindi scritta in notazione a blocchi come

$$A_d = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{m_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_M I_{m_M} \end{pmatrix},$$

dove I_m indica la matrice identità $m \times m$. Indichiamo con B la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{B}$ rispetto alla base ON di autovettori di $\hat{A}$. Anche per B possiamo considerare la stessa notazione a blocchi per cui avremo

$$B = \begin{pmatrix} \mathscr{B}_{11} & \mathscr{B}_{12} & \dots & \mathscr{B}_{1M} \\ \mathscr{B}_{21} & \mathscr{B}_{22} & \dots & \mathscr{B}_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathscr{B}_{M1} & \mathscr{B}_{M2} & \dots & \mathscr{B}_{MM} \end{pmatrix},$$

dove $\mathscr{B}_{lj}$, con $l, j \in \{1, 2, \dots, M\}$, rappresenta un blocco, ovvero una matrice $m_l \times m_j$. Nel caso di A_d, solo i blocchi diagonali $\mathscr{A}_{jj}$, $m_j \times m_j$, sono non nulli e proporzionali all'identità I_{m_j}, tramite l'autovalore j-esimo.
Per ipotesi si ha che il commutatore degli operatori e quindi anche delle matrici A_d e B deve essere nullo, ovvero, mantenendo la notazione a blocchi (entrambi gli indici bassi), il blocco (k,m) del commutatore è

$$\begin{aligned} 0 = [A_d, B]_{km} &= \sum_{j=1}^{M} \mathscr{A}_{kj}\mathscr{B}_{jm} - \sum_{l=1}^{M} \mathscr{B}_{kl}\mathscr{A}_{lm} \\ &= \lambda_k \mathscr{B}_{km} - \lambda_m \mathscr{B}_{km} \\ &= \big(\lambda_k - \lambda_m\big)\mathscr{B}_{km}, \qquad \forall\, k,m \in \{1,2,\dots,M\}, \end{aligned}$$

poiché gli autovalori $\{\lambda_k\}_{k=1}^{M}$ sono distinti, si ottiene che gli unici blocchi non nulli di B sono quelli diagonali. Inoltre, ciascun blocco diagonale, non nullo, $\mathscr{B}_{kk}$ è una matrice normale, infatti, dalla condizione di normalità dell'operatore $\hat{B}$ e quindi della matrice B, che lo rappresenta rispetto a una base ON, si ha

$$\begin{aligned} 0 = [B, B^\dagger]_{km} &= \sum_{j=1}^{M} \mathscr{B}_{kj}\mathscr{B}_{jm}^{T*} - \sum_{l=1}^{M} \mathscr{B}_{kl}^{T*}\mathscr{B}_{lm} = \delta_{km}\mathscr{B}_{kk}\mathscr{B}_{kk}^{T*} - \delta_m^k \mathscr{B}_{kk}^{T*}\mathscr{B}_{kk} \\ &= \delta_{km}\left(\mathscr{B}_{kk}\mathscr{B}_{kk}^{T*} - \mathscr{B}_{kk}^{T*}\mathscr{B}_{kk}\right) = \delta_{km}\left[\mathscr{B}_{kk}, \mathscr{B}_{kk}^{\dagger}\right], \qquad \forall\, k,m \in \{1,2,\dots,M\}. \end{aligned}$$

Ne consegue che il blocco diagonale (k,k), ovvero la matrice $\mathscr{B}_{kk}$ ammette un insieme ON di autovettori $\{b_j^{(k)}\}_{j=\mu_k+1}^{\mu_k+m_k}$, con autovalori $\{\beta_j\}_{j=\mu_k+1}^{\mu_k+m_k}$, dove μ_k è la somma dei primi $(k-1)$ ordini di degenerazione

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{k-1} m_k, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\dots,M\}.$$

Poiché la matrice $\mathscr{B}_{kk}$ è $m_k \times m_k$, gli autovettori sono i vettori colonna $m_k \times 1$

$$b_j^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{(j)}^{\mu_k+1} \\ b_{(j)}^{\mu_k+2} \\ \vdots \\ b_{(j)}^{\mu_k+m_k} \end{pmatrix}, \qquad \forall j \in \{\mu_k+1, \mu_k+2, \ldots, \mu_k+m_k\}, \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,M\}.$$

Possiamo, infine, definire m_k vettori $|b_j\rangle$ come

$$|b_j^{(k)}\rangle = \sum_{l=\mu_k+1}^{\mu_k+m_k} b_{(k)}^l |u_l\rangle, \qquad j \in \{\mu_k+1, \mu_k+2, \ldots, \mu_k+m_k\}, \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,M\},$$

ovvero, il vettore $|b_j^{(k)}\rangle$ si ottiene combinando solo gli m_k autovettori $|u_l\rangle$ relativi all'autovalore λ_k. In notazione a blocchi avremmo

$$|b_j^{(k)}\rangle \quad \hookleftarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_j^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-esima posizione.}$$

L'azione dell'operatore $\hat{B}$ sul vettore $|b_j\rangle$ è rappresentata dall'equazione matriciale

$$\hat{B}|b_j^{(k)}\rangle \quad \hookleftarrow \quad B \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_j^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_{kk} b_j^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \beta_j \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_j^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hookrightarrow \quad \beta_j |b_j^{(k)}\rangle,$$

quindi, per l'operatore $\hat{B}$ si hanno le N equazioni agli autovalori

$$\hat{B}|b_j^{(k)}\rangle = \beta_j |b_j^{(k)}\rangle, \qquad \forall j \in \bigcup_{l=1}^{M} \{\mu_l+1, \mu_l+2, \ldots, \mu_l+m_l\} \equiv \{1,2,\ldots,N\}.$$

È facile verificare che i vettori dell'insieme $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^N$ rappresenta un insieme di autovettori anche per l'operatore $\hat{A}$. Infatti $\hat{A}$ agisce su ciascun vettore $|b_k\rangle$ come un operatore proporzionale all'identità,

$$\hat{A}|b_j^{(k)}\rangle = \hat{A} \sum_{l=\mu_k+1}^{\mu_k+m_k} b_{(j)}^l |u_l\rangle = \sum_{l=\mu_k+1}^{\mu_k+m_k} b_{(j)}^l \hat{A}|u_l\rangle = \sum_{l=\mu_k+1}^{\mu_k+m_k} b_{(j)}^l \mu_k |u_l\rangle = \mu_k |b_j^{(k)}\rangle, \qquad \forall k \in \{1,2,\ldots,N\}.$$

In definitiva, $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^N$ rappresenta un insieme ON di autovettori comuni per gli operatori normali e commutanti $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

2.31 Le matrici di Pauli

Otto Stern (17 febbraio 1888 - 17 agosto 1969, Germania) e Walter Gerlach (primo agosto 1889 - 10 agosto 1979, Germania) nel 1922 effettuarono un esperimento per misurare lo spin dell'elettrone. La misura dimostrò che la componente dello spin lungo una data direzione è quantizzata, ovvero i valori ottenuti non sono continui ma discreti. In particolare, nel caso dell'elettrone si hanno solo due possibili valori che, in unità della costante di Planck ridotta, $\hbar \simeq 10^{-34}$ J s, sono $\pm 1/2$. Ciò significa che, ad esempio, l'operatore *terza componente dello spin*, indicato con $\hat{\sigma}_z$, agisce in uno spazio bidimensionale, infatti ha solo due autovalori che, in unità $\hbar/2$, sono $\lambda_+ = +1$ e $\lambda_- = -1$. Detti $|z_\pm\rangle$ gli autovettori corrispondenti, si hanno le equazioni

$$\hat{\sigma}_z |z_\pm\rangle = \pm |z_\pm\rangle \,.$$

L'operatore è hermitiano, quindi gli autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali, quindi l'insieme $\{|z_\pm\rangle\}$ rappresenta una base ON dello spazio dello spin e si ha la rappresentazione spettrale

$$\hat{\sigma}_z = \lambda_+ |z_+\rangle\langle z_+| + \lambda_- |z_-\rangle\langle z_-| = |z_+\rangle\langle z_+| - |z_-\rangle\langle z_-| \,.$$

La rappresentazione diagonale di $\hat{\sigma}_z$ rispetto alla base di autovettori è

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} \langle z_+|\hat{\sigma}_z|z_+\rangle & \langle z_+|\hat{\sigma}_z|z_-\rangle \\ \langle z_-|\hat{\sigma}_z|z_+\rangle & \langle z_-|\hat{\sigma}_z|z_-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

che rappresenta la cosiddetta terza matrice di Pauli.
Supponiamo di voler misurare la componente dello spin in una direzione arbitraria definita dal versore $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. L'operatore corrispondente, $\hat{\sigma}_n$, è quindi dato dalla combinazione

$$\hat{\sigma}_n = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\sigma}_y + \cos\theta\,\hat{\sigma}_z \,.$$

Detti $\{|x_\pm\rangle\}$ e $\{|y_\pm\rangle\}$ gli autovettori di $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{\sigma}_y$, rispettivamente, con equazioni agli autovalori

$$\hat{\sigma}_x |x_\pm\rangle = \pm |x_\pm\rangle \,, \qquad \hat{\sigma}_y |y_\pm\rangle = \pm |y_\pm\rangle \,,$$

si hanno i valori di aspettazione

$$\langle x_+|\hat{\sigma}_n|x_+\rangle = \sin\theta\cos\phi \qquad \langle y_+|\hat{\sigma}_n|y_+\rangle = \sin\theta\sin\phi \qquad \langle z_+|\hat{\sigma}_n|z_+\rangle = \cos\theta \,.$$

Rispetto ad una generica base ON, l'operatore hermitiano $\hat{\sigma}_n$ è rappresentato dalla matrice hermitiana

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix} , \qquad a, b \in \mathbb{R} \,.$$

Inoltre, poiché la traccia ed il determinante sono invarianti e corrispondono rispettivamente alla somma e al prodotto degli autovalori, si hanno

$$\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_n) = a + b = 0 \,, \quad \det(\hat{\sigma}_n) = ab - |c|^2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad |c|^2 = 1 - a^2 \,.$$

Scegliendo come base ON quella degli autovettori di $\hat{\sigma}_z$, $\{|z_\pm\rangle\}$, abbiamo

$$(\sigma_n)^+_+ = \langle z_+|\hat{\sigma}_n|z_+\rangle = a = \cos\theta \quad \Longrightarrow \quad c = e^{-i\delta}\sin\theta \,.$$