2.18 Operatori e basi

Un operatore lineare $\hat{F}: D \to R$, è univocamente definito dalla sua azione sui vettori di una base, $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset D$. Ovvero, una volta noto l'insieme $\{|f_k\rangle = \hat{F}|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset R$, risulta di conseguenza definita l'azione dello stesso operatore su un qualsiasi vettore $|a\rangle \in D$. Infatti, $\forall |a\rangle \in D$ si ha

$$|a\rangle = \sum_{k=1}^{N} a_k |e_k\rangle\,,$$

dove $\{a_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{C}$ rappresenta l'insieme delle componenti del vettore $|a\rangle$ rispetto alle suddetta base. Ne consegue che l'azione di $\hat{F}$ sul vettore generico $|a\rangle \in D$ si ottiene come

$$\hat{F}|a\rangle = \hat{F}\sum_{k=1}^{N} a_k|e_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} a_k\hat{F}|e_k\rangle = \sum_{k=1}^{N} a_k|f_k\rangle \in R\,,$$

ovvero il vettore dato dall'azione dell'operatore $\hat{F}$ sul vettore $|a\rangle$ si ottiene dalla combinazione dei vettori dell'insieme $\{|f_k\rangle = \hat{F}|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ con i coefficienti corrispondenti alle componenti dello stesso vettore $|a\rangle$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ del dominio D.

2.18.1 Inverso di un operatore

Così come accade per le funzioni, non tutti gli operatori ammettono un inverso ovvero sono invertibili. In generale, sono **non-invertibili** tutti quegli operatori la cui azione implica una "perdita di informazione". Un tipico esempio è quello degli operatori di proiezione o proiettori. In questi casi, poiché dall'azione del proiettore sul vettore si ottiene solo la componente dello stesso in una data direzione, tutte le informazioni contenute nelle altre componenti vengono cancellate. Risulta quindi impossibile risalire al vettore originale partendo dalla sola componente selezionata. L'operazione di proiezione **non è univoca**, infatti esistono infiniti vettori diversi che hanno la stessa proiezione in una data direzione.
D'altro canto sono invertibili gli operatori di rotazioni, traslazioni, dilatazioni, contrazioni, ecc.. Tutte queste operazioni, infatti, non comportano perdita di informazione e sono quindi reversibili.

Def.: Alcune definizioni.

- Un operatore $\hat{F}: D \to R$, si dice **uno-ad-uno** o **iniettivo** se $\forall\,|a\rangle, |b\rangle \in D$

$$|a\rangle \neq |b\rangle \quad\Longrightarrow\quad \hat{F}|a\rangle \neq \hat{F}|b\rangle\,,$$

  ovvero se, $\forall\,|a'\rangle, |b'\rangle \in D$

$$\hat{F}|a'\rangle = \hat{F}|b'\rangle \quad\Longrightarrow\quad |a'\rangle = |b'\rangle\,.$$

- Si dice **suriettivo** se: $\forall\,|f_a''\rangle \in R$, $\exists\,|a''\rangle \in D$, tale che

$$|f_a''\rangle = \hat{F}|a''\rangle\,,$$

  quindi l'immagine tramite l'operatore del dominio coincide con il range, potremmo scrivere: $\hat{F}[D] = R$. Questo, ovviamente non implica che $\hat{F}$ sia iniettivo, infatti, la condizione necessaria per la suriettività è che ogni vettore del range sia immagine o mappa di **almeno un** vettore del dominio.
- Infine, un operatore **iniettivo e suriettivo** si dice **biiettivo**, ovvero la trasformazione da esso definita è **biunivoca**. Formalmente si ha che: $\hat{F}: D \to R$, è un operatore **biiettivo** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ per ogni $|f_a\rangle \in R$, esiste (suriettività) ed è unico (iniettività) $|a\rangle \in D$, tale che $\hat{F}|a\rangle = |f_a\rangle$.

- Un operatore $\hat{F} : D \to R$ si dice **invertibile** o **regolare** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ esiste un altro operatore $\hat{F}^{-1}$ tale che:

$$\hat{F}^{-1}|f_a\rangle = |a\rangle\,,$$

$\forall\,|a\rangle \in D$ con $\hat{F}|a\rangle = |f_a\rangle \in R$. L'operatore $\hat{F}^{-1}$ è l'**inverso** di $\hat{F}$. Dalla definizione si ha che

$$\hat{F}^{-1}\hat{F} = \hat{F}\hat{F}^{-1} = \hat{I}\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore indennità.

Proposizione. Un operatore lineare $\hat{F} : D \to R$ è **iniettivo** $\Longleftrightarrow$ $N(\hat{F}) = \{|0\rangle\}$, ovvero il nucleo contiene solo il vettore nullo.

Dim.: ($\Longrightarrow$) Avendo per ipotesi che $\hat{F}$ è iniettivo dimostriamo che il nucleo contiene solo il vettore nullo $|0\rangle$. Sia $|a\rangle \in N(\hat{F})$ allora: $\hat{F}|a\rangle = |0\rangle$, ma l'operatore è lineare e quindi $\hat{F}|0\rangle = |0\rangle$, d'altro canto, essendo un operatore iniettivo si ha l'implicazione

$$\hat{F}|a\rangle = \hat{F}|0\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad |a\rangle = |0\rangle\,,$$

quindi se il vettore $|a\rangle$ appartiene al nucleo, esso coincide con il vettore nullo e viceversa. Infatti, è la stessa iniettività a implicare come un vettore non nullo non possa appartenere al nucleo, ovvero si ha che

$$\forall\,|b\rangle \neq |0\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \hat{F}|b\rangle \neq \hat{F}|0\rangle = |0\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad |b\rangle \notin N(\hat{F})\,.$$

Dim.: ($\Longleftarrow$) Sotto l'ipotesi è che il nucleo contenga solo il vettore nullo, cioè $N(\hat{F}) = \{|0\rangle\}$, dimostriamo che $\hat{F}$ è un operatore iniettivo. Siano $|a\rangle$ e $|b\rangle$ due vettori tali che: $\hat{F}|a\rangle = \hat{F}|b\rangle$, ne consegue che

$$\hat{F}|a\rangle - \hat{F}|b\rangle = \hat{F}\big(|a\rangle - |b\rangle\big) = |0\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \big(|a\rangle - |b\rangle\big) \in N(\hat{F}) \qquad \Longrightarrow \qquad |a\rangle = |b\rangle\,,$$

ovvero, l'immagine di $\big(|a\rangle - |b\rangle\big)$ tramite l'operatore $\hat{F}$ è il vettore nullo, quindi il vettore $\big(|a\rangle - |b\rangle\big)$ è un elemento del nucleo, che contiene, però, solo il solo vettore nullo, quindi $|a\rangle = |b\rangle$, l'operatore $\hat{F}$ è iniettivo.

Lemma. Siano $\hat{F}$ e $\hat{G}$ due operatori invertibili, **allora** l'operatore prodotto $\hat{F}\hat{G}$ è invertibile e vale al relazione $(\hat{F}\hat{G})^{-1} = \hat{G}^{-1}\hat{F}^{-1}$.

Dim.: Applichiamo l'operatore inverso $\hat{G}^{-1}$ da destra all'operatore prodotto $\hat{F}\hat{G}$ e otteniamo l'identità

$$\hat{F}\underbrace{\hat{G}\hat{G}^{-1}}_{\hat{I}} = \hat{F}\,,$$

su ambo i membri facciamo agire da destra l'operatore inverso $\hat{F}^{-1}$ applicando, da destra, su ambo i membri prima l'operatore $\hat{G}^{-1}$, poi $\hat{F}^{-1}$ si ha

$$\hat{F}\hat{G}\hat{G}^{-1}\hat{F}^{-1} = \hat{F}\hat{F}^{-1} = \hat{I}\,.$$

Avremmo potuto far agire da sinistra sul prodotto degli operatori, prima $\hat{F}^{-1}$ e poi $\hat{G}^{-1}$ ottenendo

$$\hat{G}^{-1}\hat{F}^{-1}\hat{F}\hat{G} = \hat{I}\,.$$

Associando due a due gli operatori dei membri sinistri, si ottengono le identità che definisco l'operatore inverso del prodotto $\hat{F}\hat{G}$, cioè

$$(\hat{F}\hat{G})\left(\hat{F}^{-1}\hat{G}^{-1}\right) = \left(\hat{F}^{-1}\hat{G}^{-1}\right)(\hat{F}\hat{G}) = \hat{I}\,,$$

da cui si evince che

$$(\hat{F}\hat{G})^{-1} = \hat{F}^{-1}\hat{G}^{-1}\,.$$

Teorema di invertibilità. Un operatore $\hat{F}: D \to D$ è **invertibile** $\iff$ è **biiettivo**, ovvero se e solo se definisce una trasformazione biunivoca di D in se stesso.

Dim.: ($\Rightarrow$) Abbiamo per ipotesi che $\hat{F}$ sia invertibile, quindi esiste un operatore $\hat{F}^{-1}$, tale che $\hat{F}\hat{F}^{-1} = \hat{F}^{-1}\hat{F} = \hat{I}$. Allora $\forall\,|a\rangle, |b\rangle \in D$, con $\hat{F}|a\rangle = \hat{F}|b\rangle$ si ha, applicando su ambo i membri l'operatore inverso,

$$\hat{F}|a\rangle = \hat{F}|b\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{F}^{-1}\hat{F}|a\rangle = \hat{F}^{-1}\hat{F}|b\rangle \quad \Rightarrow \quad |a\rangle = |b\rangle\,,$$

l'operatore è quindi iniettivo e, poiché dominio e range coincidono, $\hat{F}$ è anche suriettivo e quindi biiettivo.
Dim.: ($\Leftarrow$) L'iniettività dell'operatore implica che l'unico elemento del nucleo sia il vettore nullo, ovvero che l'unica soluzione dell'equazione $\hat{F}|x\rangle = |0\rangle$ sia $|x\rangle = |0\rangle$. Consideriamo una base del dominio, $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset D$, e dimostriamo che i vettori dell'insieme $\{|f_k\rangle = \hat{F}|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, che sono le immagini dei vettori della base tramite l'operatore $\hat{F}$, rappresentano un'altra base dello stesso spazio vettoriale D. A tal fine facciamo vedere come l'unica combinazione lineare dei vettori dell'insieme $\{|f_k\rangle\}_{k=1}^N$ coincidente con il vettore nullo sia quella banale. Presa una generica combinazione lineare che dia il vettore nullo, i cui coefficienti sono gli elementi dell'insieme $\{a_k\}_{k=1}^N$, si ha

$$|0\rangle = \sum_{k=1}^N a_k|f_k\rangle = \sum_{k=1}^N a_k\hat{F}|e_k\rangle = \hat{F}\left(\sum_{k=1}^N a_k|e_k\rangle\right)\,.$$

I coefficienti a_k sono tutti nulli poiché la combinazione lineare dei vettori della base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, tra parentesi tonde, rappresenta il vettore nullo, che è l'unica soluzione dell'equazione $\hat{F}|x\rangle = |0\rangle$. Ne consegue che, essendo in numero N e linearmente indipendenti, i vettori dell'insieme $\{|f_k\rangle\}_{k=1}^N$ rappresentano una base di D. È quindi possibile definire l'operatore inverso $\hat{F}^{-1}$ attraverso la sua azione sui vettori della suddetta base, come

$$\hat{F}^{-1}|f_k\rangle = |e_k\rangle\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

2.18.2 Azione di un operatore sui vettori bra

Fino ad ora gli operatori sono stati definiti in termini della loro azione su vettori di tipo ket. Per definirne l'azione sui vettori bra, duali dei ket, si usa la nozione di prodotto scalare. Dati i vettori $|a\rangle \in E$, $\langle b| \in E^*$ e l'operatore $\hat{F}: E \to E$, si ha

$$\left(\langle b|\hat{F}\right)|a\rangle = \langle b|\left(\hat{F}|a\rangle\right) = \left\langle b\left|\hat{F}\right|a\right\rangle\,,$$

l'operatore $\hat{F}$ agisce indifferentemente sia sui ket, da sinistra verso destra, che sui bra da destra verso sinistra.

Un esempio è quello dell'operatore che rappresenta l'operazione di "prodotto per uno scalare" $\alpha \in S$, ovvero $\hat{F} = \alpha\hat{I} : E \to E$, è ovviamente proporzionale all'identità. Ne consegue che, $\forall\,|a\rangle \in E$ e $\forall\,\langle b| \in E^*$ si ha

$$\langle b|\hat{F}|a\rangle = \alpha\langle b|a\rangle\,.$$

Attenzione: Il vettore bra che si ottiene facendo agire l'operatore $\hat{F}$ da destra verso sinistra su $\langle b|$, cioè $\langle b|\hat{F}$, **non è il duale** di $\hat{F}|b\rangle$. Si può facilmente vedere, considerando, appunto, l'operatore prodotto per lo scalare α, con $\mathrm{Im}(\alpha) \neq 0$, $\hat{F} = \alpha\hat{I}$. Infatti, sia $|c\rangle$ il vettore ottenuto dall'azione di $\hat{F}$ su $|a\rangle$, cioè

$$|c\rangle = \hat{F}|a\rangle = \alpha|a\rangle\,,$$

il duale di $|c\rangle$ è

$$\langle c| = \alpha^*\langle a| \neq \alpha\langle a| = \langle a|\hat{F}\,,$$

il simbolo "diverso" vale in quanto, come specificato, lo scalare α ha parte immaginaria non nulla e quindi $\alpha^* \neq \alpha$.

2.18.3 Operatore aggiunto o coniugato hermitiano

Sia $\hat{F} : E \to E$ un operatore lineare, si chiama **aggiunto** o **aggiunto hermitiano** o **coniugato hermitiano** di $\hat{F}$, e si indica con il simbolo $\hat{F}^\dagger$, l'operatore la cui azione da destra verso sinistra su un generico $\langle a| \in E^*$, cioè $\langle a|\hat{F}^\dagger$, rappresenta il duale del vettore $\hat{F}|a\rangle$.
In altri termini, il duale del vettore $|b\rangle$, ottenuto dall'azione di $\hat{F}$ su un generico vettore $|a\rangle \in E$, ovvero $|b\rangle = \hat{F}|a\rangle$, è dato da

$$\langle b| = \langle a|\hat{F}^\dagger\,.$$

Un'altra definizione in termini del prodotto scalare è la seguente: $\forall\,|a\rangle, |b\rangle \in E$ e $\langle a|, \langle b| \in E^*$, con $\hat{F} : E \to E$, si ha

$$\langle a|\hat{F}|b\rangle = \langle b|\hat{F}^\dagger|a\rangle^*\,.$$

Proprietà dell'aggiunto

Dato l'operatore lineare $\hat{F} : E \to E$ si hanno le seguenti proprietà.

- L'aggiunto dell'aggiunto coincide con l'operatore iniziale

$$\left(\hat{F}^\dagger\right)^\dagger = \hat{F}\,.$$

Dim.: Usiamo la definizione con il prodotto scalare, quindi $\forall\,|a\rangle, |b\rangle \in E$, $\langle a|, \langle b| \in E^*$ abbiamo

$$\langle a|\hat{F}|b\rangle = \langle a|\hat{F}^\dagger|b\rangle^* = \left\langle a\middle|\left(\hat{F}^\dagger\right)^\dagger\middle|b\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{F}^\dagger\right)^\dagger = \hat{F}\,.$$

L'implicazione è conseguenza dell'arbitrarietà dei vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$.

- L'aggiunto della somma è uguale alla somma degli aggiunti. Dati gli operatori $\hat{F}, \hat{G} : E \to E$ si ha

$$\left(\hat{F} + \hat{G}\right)^\dagger = \hat{F}^\dagger + \hat{G}^\dagger\,.$$

Dim.: $\forall\,|a\rangle, |b\rangle \in E$ e $\langle a|, \langle b| \in E^*$,

$$\begin{aligned}
\left\langle a\middle|\left(\hat{F}+\hat{G}\right)^\dagger\middle|b\right\rangle &= \langle b|\left(\hat{F}+\hat{G}\right)|a\rangle^* \\
&= \langle b|\hat{F}|a\rangle^* + \langle b|\hat{G}|a\rangle^* \\
&= \langle a|\hat{F}^\dagger|b\rangle + \langle a|\hat{G}^\dagger|b\rangle \\
&= \langle a|\left(\hat{F}^\dagger+\hat{G}^\dagger\right)|b\rangle \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{F}+\hat{G}\right)^\dagger = \hat{F}^\dagger + \hat{G}^\dagger\,.
\end{aligned}$$

- L'aggiunto del prodotto è uguale al prodotto degli aggiunti in ordine invertito, siano $\hat{F}$ e $\hat{G}$ due operatori lineari dallo spazio vettoriale E su se stesso, allora anche il loro prodotto è un operatore con lo stesso dominio e lo stesso range, $\hat{F}\hat{G} : E \to E$, e si ha

$$\left(\hat{F}\hat{G}\right)^{\dagger} = \hat{G}^{\dagger}\hat{F}^{\dagger}\,.$$

<u>**Dim.:**</u> $\forall\,|a\rangle \in E$ e $\langle b| \in E^*$,

$$\begin{aligned} \left\langle a \middle| \left(\hat{F}\hat{G}\right)^{\dagger} \middle| b \right\rangle &= \left\langle b \middle| \hat{F}\hat{G} \middle| a \right\rangle^* \\ &= \left[\left(\langle b|\hat{F}\right)\left(\hat{G}|a\rangle\right)\right]^* \\ &= \left\langle a \middle| \hat{G}^{\dagger}\hat{F}^{\dagger} \middle| b \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{F}\hat{G}\right)^{\dagger} = \hat{G}^{\dagger}\hat{F}^{\dagger}\,. \end{aligned}$$

2.18.4 Operatori hermitiani

(Charles Hermite, 24 dicembre 1822 - 14 gennaio 1901, Francia) Un operatore lineare $\hat{H} : E \to E$ si dice **hermitiano** o **autoaggiunto** se

$$\hat{H} = \hat{H}^{\dagger}\,,$$

ovvero se coincide con il suo aggiunto. Come vedremo, gli operatori hermitiani hanno un ruolo fondamentale in meccanica quantistica, infatti sono gli unici atti a rappresentare le cosiddette "osservabili fisiche".
Siano $\hat{F}$ e $\hat{G}$ operatori hermitiani, si hanno le seguenti proprietà.

OH1) Il prodotto di due operatori hermitiani è un operatore hermitiano se e solo se i due operatori commutano, infatti, avendo $\hat{F}^{\dagger} = \hat{F}$ e $\hat{G}^{\dagger} = \hat{G}$,

$$\left(\hat{F}\hat{G}\right)^{\dagger} = \hat{F}\hat{G} \qquad \Longleftrightarrow \qquad [\hat{F},\hat{G}] = 0\,.$$

<u>**Dim.:**</u> La dimostrazione è immediata, infatti

$$\left(\hat{F}\hat{G}\right)^{\dagger} = \hat{G}^{\dagger}\hat{F}^{\dagger} = \hat{G}\hat{F} \underbrace{=}_{[\hat{F},\hat{G}]=0} \hat{F}\hat{G}\,.$$

OH2) Il commutatore di due operatori hermitiani è un operatore **antihermitiano**. Ovvero, indicando con $\hat{H}$ il commutatore di $\hat{F}$ e $\hat{G}$ si ha

$$\hat{H}^{\dagger} = \left[\hat{F},\hat{G}\right]^{\dagger} = -\hat{H}\,.$$

<u>**Dim.:**</u> Per dimostrare la precedente calcoliamo direttamente l'aggiunto del commutatore sfruttando le proprietà note, si ha cioè

$$\hat{H}^{\dagger} = \left[\hat{F},\hat{G}\right]^{\dagger} = \left(\hat{F}\hat{G}\right)^{\dagger} - \left(\hat{G}\hat{F}\right)^{\dagger} = \hat{G}\hat{F} - \hat{F}\hat{G} = \left[\hat{G},\hat{F}\right] = -\left[\hat{F},\hat{G}\right] = -\hat{H}\,.$$

Ovviamente se i due operatori commutano si ha $\hat{H} = \hat{0}$, ovvero è l'operatore nullo, che è al contempo sia hermitiano che antihermitiano.

OH3) L'anticommutatore di due operatori hermitiani è un operatore **hermitiano**. Ovvero, detto $\hat{J}$ l'anticommutatore di $\hat{F}$ e $\hat{G}$ si ha

$$\hat{J}^{\dagger} = \left\{\hat{F},\hat{G}\right\}^{\dagger} = \hat{J}\,.$$

<u>**Dim.:**</u> Anche in questo caso calcoliamo direttamente l'aggiunto dell'anticommutatore

$$\hat{J}^{\dagger} = \left\{\hat{F},\hat{G}\right\}^{\dagger} = \left(\hat{F}\hat{G}\right)^{\dagger} + \left(\hat{G}\hat{F}\right)^{\dagger} = \hat{G}\hat{F} + \hat{F}\hat{G} = \left\{\hat{F},\hat{G}\right\} = \hat{J}\,.$$

Qualora i due operatori anticommutassero si avrebbe $\hat{J} = \hat{0}$ ma, come detto, l'operatore nullo è sia hermitiano che antihermitiano.

OH4) Dati due operatori hermitiani, $\hat{F}$ e $\hat{G}$, è possibile definire un terzo operatore, $\hat{K}$, anch'esso hermitiano, pari a i-volte il commutatore dei due, cioè

$$\hat{K} = i\left[\hat{F},\hat{G}\right], \qquad \hat{K}^\dagger = \hat{K}.$$

<u>**Dim.:**</u> Ricordando che il duale di uno scalare è lo scalare complesso coniugato, si ha

$$\hat{K}^\dagger = -i\left[\hat{F},\hat{G}\right]^\dagger = -i\left(-\left[\hat{F},\hat{G}\right]\right) = i\left[\hat{F},\hat{G}\right] = \hat{K}.$$

OH5) Un generico operatore (non necessariamente hermitiano) $\hat{A}$ può essere sempre decomposto nella combinazione di due **opportuni** operatori hermitiani, $\hat{F}$ e $\hat{G}$, come

$$\hat{A} = \hat{F} + i\hat{G}.$$

<u>**Dim.:**</u> Gli operatori $\hat{F}$ e $\hat{G}$ possono essere ottenuti direttamente in termini della somma e della differenza degli operatori $\hat{A}$ e $\hat{A}^\dagger$,

$$\hat{F} = \frac{\hat{A}+\hat{A}^\dagger}{2}, \qquad \hat{G} = \frac{\hat{A}-\hat{A}^\dagger}{2i}.$$

Da queste definizioni segue che

$$\hat{A} = \hat{F} + i\hat{G}, \qquad \hat{A}^\dagger = \hat{F} - i\hat{G}.$$

Inoltre, l'hermitianità è data per costruzione, infatti

$$\begin{aligned}
\hat{F}^\dagger &= \left(\frac{\hat{A}+\hat{A}^\dagger}{2}\right)^\dagger = \frac{\hat{A}^\dagger+\hat{A}}{2} = \hat{F}, \\
\hat{G}^\dagger &= \left(\frac{\hat{A}-\hat{A}^\dagger}{2i}\right)^\dagger = \frac{\hat{A}^\dagger-\hat{A}}{-2i} = \frac{\hat{A}-\hat{A}^\dagger}{2i} = \hat{G}.
\end{aligned}$$

2.18.5 Operatori unitari

Sia $\hat{U}: E \to E$ un operatore **regolare** (invertibile), $\hat{U}$ è **unitario** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I},$$

ovvero se e solo se l'inverso coincide con l'aggiunto hermitiano.
Di seguito alcune proprietà degli operatori unitari.

OU1) Il prodotto di due operatori unitari $\hat{U}_1$ e $\hat{U}_2$ è un operatore unitario, detto $\hat{U}$ il prodotto si ha

$$\hat{U}^\dagger = \left(\hat{U}_1\hat{U}_2\right)^\dagger = \hat{U}^{-1}.$$

<u>**Dim.:**</u> Procediamo calcolando direttamente l'aggiunto del prodotto

$$\hat{U}^\dagger = \left(\hat{U}_1\hat{U}_2\right)^\dagger = \hat{U}_2^\dagger\hat{U}_1^\dagger = \hat{U}_2^{-1}\hat{U}_1^{-1} = \left(\hat{U}_1\hat{U}_2\right)^{-1} = \hat{U}^{-1},$$

quindi l'asserto.

OU2) Gli operatori unitari conservano il prodotto scalare, negli spazi di Hilbert si dicono **isometrici** in quanto conservano la norma. Siano $|a\rangle$ e $|b\rangle$ due generici vettori dello spazio vettoriale E e, $|a'\rangle$ e $|b'\rangle$ le loro immagini tramite un operatore unitario $\hat{U}$,

$$|a'\rangle = \hat{U}|a\rangle, \qquad |b'\rangle = \hat{U}|b\rangle$$

si ha che

$$\langle a'|b'\rangle = \langle a|b\rangle\,.$$

In uno spazio di Hilbert si ha la conservazione della norma

$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{\langle a'|a'\rangle} = \|a'\|\,.$$

Da un punto di vista "geometrico" le trasformazioni unitarie possono essere assimilate alle rotazioni, che modificano i vettori mantenendone inalterata la lunghezza.
Dim.: L'identità tra i prodotti scalari, e quindi le norme, è immediata:

$$\langle a'|b'\rangle = \langle a|\underbrace{\hat{U}^\dagger\hat{U}}_{\hat{I}}|b\rangle = \langle a|b\rangle\,.$$

OU3) In generale un operatore unitario $\hat{U}$ può essere scritto in forma esponenziale in termini di un opportuno operatore hermitiano $\hat{H}$

$$\hat{U} = e^{i\hat{H}}\,.$$

Dim.: L'espressione precedente dell'operatore $\hat{U}: E \to E$ non è "direttamente utilizzabile", ovvero, pur sapendo come agisce l'operatore ad esponente, $\hat{H}: E \to E$, l'azione della "funzione" di un operatore deve essere definita in termini di uno sviluppo in serie di potenze della stessa funzione. Infatti, l'unica funzione di un operatore la cui azione può essere direttamente derivata da quella dell'operatore stesso è la **potenza intera**. Ovvero l'operatore $\hat{H}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, agisce come una sequenza di n operatori $\hat{H}$, cioè, per un generico vettore $|a\rangle \in E$,

$$\hat{H}^n|a\rangle = \hat{H}^{n-1}\underbrace{\left(\hat{H}|a\rangle\right)}_{|a_1\rangle} = \hat{H}^{n-2}\underbrace{\left(\hat{H}|a_1\rangle\right)}_{|a_2\rangle} = \cdots = \hat{H}|a_{n-1}\rangle\,.$$

Ne consegue che l'esponenziale può essere sviluppato in serie di potenze dell'operatore hermitiano $\hat{H}$

$$\hat{U} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(i\hat{H}\right)^k}{k!}\,.$$

L'aggiunto si ottiene applicando le proprietà dell'operazione di coniugazione hermitiana del prodotto, in particolare del prodotto di n operatori $\hat{O}_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, per cui si ha

$$\left(\hat{O}_1\hat{O}_2\cdots\hat{O}_n\right)^\dagger = \left(\hat{O}_2\cdots\hat{O}_n\right)^\dagger\hat{O}_1^\dagger = \left(\hat{O}_3\cdots\hat{O}_n\right)^\dagger\hat{O}_2^\dagger\hat{O}_1^\dagger = \cdots = \hat{O}_n^\dagger\hat{O}_{n-1}^\dagger\cdots\hat{O}_2^\dagger\hat{O}_1^\dagger\,.$$

Nel caso in questione di potenza intera di un operatore abbiamo che l'aggiunto della potenza è la potenza degli aggiunti, quindi

$$\hat{U}^\dagger = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\hat{H})^k}{k!}\right]^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(i\hat{H})^k}{k!}\right]^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-i\hat{H}^\dagger\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-i\hat{H}\right)^k}{k!} = e^{-i\hat{H}}\,.$$

Assumendo che valgano per gli operatori le regole delle potenze degli scalari otteniamo la condizione di unitarietà per $\hat{U}$, ovvero

$$\begin{aligned}\hat{U}\hat{U}^\dagger &= e^{i\hat{H}}e^{-i\hat{H}} = e^{i(\hat{H}-\hat{H})} = \hat{I}\,,\\ \hat{U}^\dagger\hat{U} &= e^{-i\hat{H}}e^{i\hat{H}} = e^{i(-\hat{H}+\hat{H})} = \hat{I}\,.\end{aligned}$$