2.36.5 Trasformate di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$

Il teorema di Plancherel, che non dimostreremo, garantisce l'esistenza, almeno in media, sia delle trasformate che dell'anti-trasformate di Fourier di funzioni a quadrato sommabili.

Teorema di Plancherel. (Michel Plancherel, 16 gennaio 1885 - 4 marzo 1967, Svizzera). Sia $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, allora la TF è definita come

$$\mathscr{F}_k[f] = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-ikx} dx$$

ed è essa stessa una funzione a quadrato sommabile, la cui anti-trasformata di Fourier converge in media, in $\mathbb{R}$, alla funzione $f(x)$, ovvero

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x}[\mathscr{F}_k[f]] = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \mathscr{F}_k[f]\, e^{ikx} dk\,.$$

Dal teorema di Plancherel segue anche l'equazione di Parseval per le TF che sancisce l'identità tra le norme della funzione e della sua TF, cioè

$$\|f(x)\| = \|\mathscr{F}_k[f]\|\,.$$

La verifica è immediata, infatti, indicando con $\tilde{f}(k)$ la TF della funzione $f(x)$, si ha

$$f(x) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \right|^2 dx = 0\,,$$

sviluppando la seconda identità, si ottiene l'equazione di Parseval

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \right|^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{f}^*(k') \tilde{f}(k) e^{i(k-k')x} \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dk f^*(x) \tilde{f}(k) e^{ikx} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk - 2\text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk \\
\Longrightarrow \quad & \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk\,.
\end{aligned}$$

Si ha anche la forma generalizzata dell'equazione di Parseval, infatti, $\forall\, f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k) dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f^*(x) g(x') e^{ik(x-x')} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x-x')}}_{\delta(x-x')} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' f^*(x) g(x') \\
\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k) \tilde{g}(k) dk &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx\,.
\end{aligned}$$

2.36.6 Alcuni esempi notevoli di trasformate di Fourier

Calcoliamo esplicitamente le TF di alcune funzioni notevoli.

La funzione a gradino

Sia $f(x) \in L(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, la funzione gradino definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases},$$

con $a \in (0,\infty)$. Come specificato, questa funzione è a quadrato sommabile e anche sommabile in $\mathbb{R}$, in quanto è non nulla solo nell'intervallo finito $(-a,a)$. Calcoliamo la TF

$$\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ika} - e^{ika}}{-ik} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen}(ka)}{k}.$$

È interessante osservare che il limite per $a \to \infty$ di questa espressione dà la rappresentazione della delta di Dirac $\delta(k)$ moltiplicata per $\sqrt{2\pi}$. Usando il teorema di Plancherel si ha che l'anti-trasformata di Fourier della funzione $\tilde{f}(k)$ deve coincidere quasi ovunque con la funzione di partenza $f(x)$. Calcoliamo l'anti-trasformata e si ha

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_{-x}[\tilde{f}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ka)}{k} e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(ka)}{k} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(a+x)} - e^{ik(-a+x)}}{2ik} dk = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(a+x)} - e^{ik(-a+x)}}{k - i\varepsilon} dk, \end{aligned}$$

i risultati dell'integrale dipendono dal valore del coefficiente $(\pm a + x)$ della variabile k negli esponenziali. Si hanno i seguenti cinque casi, che sono riconducibili a sole tre valori dell'anti-trasformata, cioè

$$\mathscr{F}_{-x}[\tilde{f}] = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & x < -a & \to & x+a < 0 \text{ e } x-a < 0 \\ 1/2 & x = -a & \to & x+a = 0 \text{ e } x-a = -2a \\ 1 & |x| < a & \to & x+a > 0 \text{ e } x-a < 0 \\ 1/2 & x = a & \to & x+a = 2a \text{ e } x-a = \\ 0 & x > a & \to & x+a > 0 \text{ e } x-a > 0 \end{array} \right\} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Verifichiamo, infine, la validità dell'equazione di Parseval, calcolandone il membro destro e quello sinistro, ovvero la norme delle funzioni $f(x)$ e $\tilde{f}(k)$. Consideriamo per economia di scrittura le norme al quadrato, per la funzione $f(x)$ si ha

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-a}^{a} dx = 2a.$$

Per la TF $\tilde{f}(k)$ usiamo il percorso di integrazione Γ_ε, che si ottiene deformando con continuità l'asse reale in modo che aggiri l'origine da sotto con una semi-circonferenza di raggio ε, centrata nell'origine e immersa nel semipiano della parti immaginarie negative, ovvero

$$\mathbb{R} \longrightarrow \Gamma_\varepsilon = (-\infty, -\varepsilon) \cup \{z : z = \varepsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\} \cup (\varepsilon, \infty).$$

Poiché l'origine rappresenta una singolarità eliminabile per la funzione integranda, il cambiamento del percorso di integrazione, dall'asse reale $\mathbb{R}$ a Γ_ε, non cambia il valore dell'integrale e la norma al quadrato della TF vale

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(ka)}{k^2} dk = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ika}+e^{-2ika}-2}{k^2} dk \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{2ika}+e^{-2ika}-2}{k^2} dk \qquad \text{(cambiamento del percorso d'integrazione)} \\
&= -\frac{1}{2\pi} 2i\pi \left.\frac{d}{dk} e^{2ika}\right|_{k=0} = -i \left.\frac{d}{dk} e^{2ika}\right|_{k=0} = 2a\,.
\end{aligned}$$

L'esponenziale del valore assoluto e la distribuzione Lorentziana

Consideriamo la funzione $f(x) = e^{-a|x|}$ con $a \in (0,\infty)$, si tratta di una funzione sia sommabile che a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$, cioè $f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, $\forall a \in (0,\infty)$, possiamo applicare il teorema di Plancherel. Calcoliamo la TF

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[e^{-a|x|}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{x(a-ik)}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-x(a+ik)}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-ik}+\frac{1}{a+ik}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{k^2+a^2}\,.
\end{aligned}$$

La funzione ottenuta

$$\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k\left[e^{-a|x|}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{k^2+a^2}\,,$$

si chiama distribuzione Lorentziana (Hendrik Antoon Lorentz, 18 luglio 1853 - 4 febbraio 1928, Olanda).
Calcoliamo l'anti-trasformata di Fourier della funzione $\tilde{f}(k)$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{-x}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{k^2+a^2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{k^2+a^2}e^{ikx}dk = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2+a^2}dk \\
&= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{(k+ia)(k-ia)}dk\,.
\end{aligned}$$

Possiamo chiudere il percorso di integrazione con semi-circonferenze centrate nell'origine, di raggio divergente, immerse nel semi-piano delle parti immaginarie positive o negative, concordemente con il segno della variabile reale x, così da poter utilizzare il teorema dei residui per ottenere il valore dell'integrale, che coincide con quello cercato, grazie al lemma di Jordan che assicura la nullità dei contributi delle semi-circonferenza. La funzione integranda ha due poli semplici in $k = \pm ia$, per cui si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{-x}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{k^2+a^2}\right] &= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{(k+ia)(k-ia)}dk \\
&= \frac{a}{\pi}\begin{cases} 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{ikx}}{(k+ia)(k-ia)}, k=ia\right] = \dfrac{\pi}{a}e^{-ax} = \dfrac{\pi}{a}e^{-a|x|} & x>0 \\[2ex] -2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{ikx}}{(k+ia)(k-ia)}, k=-ia\right] = \dfrac{\pi}{a}e^{ax} = \dfrac{\pi}{a}e^{-a|x|} & x<0 \end{cases} \\
&= e^{-a|x|} = f(x)\,,
\end{aligned}$$

il segno meno nella seconda espressione tiene conto del verso di percorrenza negativo, ovvero in senso orario, del percorso chiuso nel semi-piano delle parti immaginari negative.

Abbiamo ottenuto quanto previsto dal teorema Plancherel nel caso di funzioni continue, cioè la coincidenza tra la funzione $f(x)$ originale e l'anti-trasformata della sua TF $\tilde{f}(k)$.
Verifichiamo l'equazione di Parseval, ovvero la coincidenza delle norme al quadrato delle funzioni $f(x)$ e $\tilde{f}(k)$. Per la $f(x)$ si ha

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2ax} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-2ax} dx = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}.$$

Nel caso della TF $\tilde{f}(k)$ usiamo la procedura di integrazione nel piano complesso k già adottata in precedenza, si ha

$$\|\tilde{f}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \frac{2a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(k^2+a^2)^2} = \frac{2a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(k+ia)^2(k-ia)^2},$$

possiamo usare il teorema dei residui chiudendo il percorso d'integrazione con una semi-circonferenza centrata nell'origine, di raggio divergente, immersa indifferentemente nel semipiano della parti immaginarie positive o negative. Infatti la funzione integranda moltiplicata per la stessa variabile k tende uniformemente a zero al divergere del raggio su entrambe le semi-circonferenze, quindi, per il lemma di integrazione sugli archi infiniti, si ha che in entrambi i casi gli integrali sugli archi sono nulli al divergere del raggio. Scegliamo di chiudere sopra, quindi si ha

$$\|\tilde{f}\|^2 = \frac{2a^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(k+ia)^2(k-ia)^2}, = \frac{2a^2}{\pi} 2i\pi \left. \frac{d}{dk} \frac{1}{(k+ia)^2} \right|_{k=ia} = -8ia^2 \frac{1}{(2ia)^3} = \frac{1}{a}.$$

L'equazione di Parseval è verificata in quanto le norme sono uguali della funzione $f(x)$ e della sua TF sono uguali.

La distribuzione gaussiana

Consideriamo la distribuzione Gaussiana

$$f(x) = e^{-ax^2},$$

che, $\forall a \in (0,\infty)$, rappresenta una funzione sommabile e a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$, cioè, come nel caso dell'esponenziale del valore assoluto, $f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$ e si può applicare il teorema di Plancherel.
Calcoliamo la TF

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+ikx)} dx,$$

il polinomio di secondo grado in x ad esponente può essere scritto come

$$ax^2 + ikx = \left(\sqrt{a}x + \frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{k^2}{4a},$$

sostituendo questa espressione si ottiene

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + \frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx.$$

La funzione integranda è ancora una distribuzione Gaussiana anche se di variabile complessa. Poiché non ha singolarità, possiamo deformare con continuità il percorso d'integrazione senza cambiare il valore dell'integrale, in particolare sostituiamo l'asse reale con la retta a esso parallela di equazione $\mathrm{Im}(z) = -ik/(2a)$ appartenente al semi-piano delle parti immaginarie positive o negative a seconda che k sia rispettivamente negativo o positivo. Avremo

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2} dx = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} e^{-\left(\sqrt{a}z+\frac{ik}{2\sqrt{a}}\right)^2} dz,$$

dove $\Gamma = \{z : \mathrm{Im}(z) = -ik/(2a)\}$ rappresenta la retta precedentemente descritta. Posto $z = r - ik/(2a)$ l'ultimo integrale diventa

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[e^{-ax^2}\right] &= \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} e^{-\left[\sqrt{a}\left(r-\frac{ik}{2a}\right)+\frac{ik}{2\sqrt{a}}\right]^2} dr = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} e^{-ar^2} dr \\ &= \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi a}} \int_{\Gamma} e^{-(\sqrt{a}r)^2} dr\sqrt{a} = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2a}},\end{aligned}$$

dive si è usato il ben noto integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

In definitiva si ha che la TF di una distribuzione Gaussiana è ancora una distribuzione Gaussiana,

$$\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k\left[e^{-ax^2}\right] = \frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}.$$

È quindi banale verificare il teorema di Plancherel, calcoliamo l'anti-trasformata della TF, usando il risultato già ottenuto, si ha

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{f}\right] = \mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-\frac{k^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}} \mathscr{F}_{-x}\left[e^{-\frac{k^2}{4a}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{2/(4a)}} e^{-\frac{x^2}{4/(4a)}} = e^{-ax^2} = f(x).$$

Verifichiamo infine l'equazione di Parseval, calcolando le norme al quadrato delle due funzioni $f(x)$ e $\tilde{f}(k)$e constatandone l'uguaglianze,

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{2a}x)^2} dx\sqrt{2a} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}, \\ \|\tilde{f}\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2}{2a}}}{2a} dk = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k}{\sqrt{2a}}\right)^2} \frac{dk}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}.\end{aligned}$$

2.36.7 Trasformazioni di Fourier per risolvere le equazioni differenziali

Consideriamo un'equazione differenziale **lineare a coefficienti costanti** che, in forma operatoriale, può essere data come

$$\hat{O}_x u(x) = f(x),$$

dove $\hat{O}_x$ è un **operatore differenziale** di ordine n a coefficienti costanti

$$\hat{O}_x = \sum_{j=0}^{n} q_j \frac{d^j}{dx^j},$$

dove $\{q_j\}_{j=0}^{n} \subset \mathbb{C}$ è l'insieme dei coefficienti, la $f(x)$ è la **funzione d'ingresso** (*input*) e $u(x)$ è la **funzione incognita**.

Facciamo la TF di ambo i membri dell'equazione, assumendo che la funzione d'ingresso sia sommabile in $\mathbb{R}$, ovvero $f(x) \in L(\mathbb{R})$ e indicando con $\tilde{u}(k)$ e $\tilde{f}(k)$ le TF della funzione incognita, da determinare nella classe $L(\mathbb{R})$, e di quella d'ingresso, avremo

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_k\big[\hat{O}_x u(x)\big] &= \mathscr{F}_k[f] \\ \sum_{j=0}^{n} q_j \mathscr{F}_k\left[\frac{d^j u}{dx^j}\right] &= \tilde{f}(k) \\ \sum_{j=0}^{n} q_j (ik)^j \tilde{u}(k) &= \tilde{f}(k)\,. \end{aligned}$$

Si passa, cioè, da un'**equazione differenziale** per le funzioni nella variabile x ad un'**equazione algebrica** per le relative TF. La TF della soluzione è

$$\tilde{u}(k) = \tilde{f}(k)\left[\sum_{j=0}^{n} q_j (ik)^j\right]^{-1} \equiv \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)\,,$$

dove abbiamo indicato con $\tilde{g}(k)$ l'inverso del polinomio di grado n nella variabile k con coefficienti $i^j q_j$, con $j \in \{0,1,\ldots,n\}$. Facendo le anti-TF, usando il teorema delle TF delle convoluzione e indicando con $g(x) = \mathscr{F}_{-x}[\tilde{g}]$, si ottiene la soluzione,

$$u(x) = \mathscr{F}_{-x}\big[\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)\big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_{-x}\big[\tilde{f}\big] * \mathscr{F}_{-x}[\tilde{g}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f*g)(x)\,.$$

Esplicitamente, la soluzione si ricava come convoluzione della funzione d'ingresso $f(x)$ e dell'anti-TF della funzione $\tilde{g}(k)$, che si chiama **ammettanza**, cioè

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx'\,.$$

La funzione $g(x)$ che permette di ottenere la soluzione in corrispondenza di ogni funzione d'ingresso $f(x)$, che ammetta convoluzione con la stessa $g(x)$, si può interpretare come la soluzione $u_0(x)$ dell'equazione **impulsiva**, ovvero dell'equazione che ha lo stesso operatore differenziale e una delta di Dirac come funzione d'ingresso. Infatti, applicando il metodo delle TF si ha

$$\mathscr{F}_k\big[\hat{O}_x u_0(x)\big] = \mathscr{F}_k[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{g}(k) \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(x)\,.$$

In definitiva la soluzione generica è

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')u_0(x')dx'\,.$$

2.36.8 Il metodo di Green

In generale, un **problema differenziale** (anche integro-differenziale) è caratterizzato da un operatore differenziale (integro-differenziale) $\hat{O}_x$ tipico del sistema fisico, una funzione d'ingresso $f(x)$, che descrive le sollecitazioni cui lo stesso sistema è sottoposto e da un insieme di **condizioni al contorno**, che permettono di fissare tutti i gradi di libertà di una generica soluzione. Un tale problema è rappresentato dall'equazione

$$\hat{O}_x u(x) = f(x)$$

e dalla classe di funzioni $C(O)$, tipiche dell'operatore, che verificano, cioè, le condizioni al contorno.
Risolvere il problema significa trovare una soluzione dell'equazione appartenente alla classe di funzioni $C(O)$.
Formalmente la soluzione $u(x)$ dell'equazione si trova invertendo l'operatore $\hat{O}_x$, per cui

$$u(x) = \hat{O}_x^{-1} f(x).$$

In molti casi è possibile definire l'operatore inverso come un operatore integrale, ovvero

$$\hat{O}_x^{-1} f(x) = \int_E G(x,x') f(x') dx',$$

dove $E \subset \mathbb{R}$ è l'insieme in cui è definita la funzione d'ingresso e la stessa $G(x,x')$, ovvero: $f : E \to \mathbb{R}$ e $G : E^2 \to \mathbb{R}$. La funzione $G(x,x')$, che rappresenta il **nucleo** o **kernel**, dell'operatore integrale, si chiama **funzione di Green** dell'operatore differenziale $\hat{O}_x$ (George Green, 14 luglio 1793 -31 maggio 1841, Regno Unito).
Nel caso di operatori differenziali lineari a coefficienti costanti la funzione di Green è data dalla soluzione dell'equazione impulsiva e la sua dipendenza dalle variabili x e x' è nella forma $(x-x')$. Si ha infatti che

$$G(x,x') = G(x-x'),$$

ovvero la funzione di Green è una funzione di convoluzione che rappresenta il nucleo (*kernel*) di un **operatore integrale di convoluzione**. In particolare avevamo ottenuto

$$G(x-x') = u_0(x-x'),$$

dove $u_0(x)$ è la soluzione dell'equazione impulsiva che scritta nella variabile $(x-x')$ è

$$\hat{O}_x u_0(x-x') = \hat{O}_x G(x-x') = \delta(x-x').$$

Moltiplicando per la generica funzione d'ingresso $f(x')$ e integrando in dx' sull'insieme E, si ottiene la soluzione generale, infatti

$$\hat{O}_x \int_E G(x-x') f(x') dx' = \int_E \hat{O}_x G(x-x') f(x') dx' = \int_E \delta(x-x') f(x') dx' = f(x),$$

dove la prima identità è giustificata dal fatto che l'operatore non dipende dalla variabile d'integrazione x', è quindi immediato che l'integrale di convoluzione, a primo membro, è la soluzione cercata

$$u(x) = \int_a^b G(x-x') f(x') dx',$$

che, infatti, verifica l'identità

$$\hat{O}_x u(x) = f(x).$$

Alcune proprietà della funzione di Green

La funzione di Green $G(x,x')$ di un dato operatore differenziale $\hat{O}_x$ rappresenta la soluzione del problema impulsivo

$$\hat{O}_x G(x,x') = \delta(x-x'),$$

soddisfa, quindi, le seguenti proprietà.

- $\hat{O}_x G(x,x') = 0, \forall x \neq x'$.
- La $G(x,x')$ come funzione di x verifica le condizioni al contorno.
- La funzione di Green $G(x,x')$ è continua $\forall x \neq x'$, l'eventuale discontinuità in $x = x'$ è determinata dalla forma esplicita dell'operatore $\hat{O}_x$. Ad esempio, se $\hat{O}_x = d^2/dx^2$, la funzione di Green è continua anche in $x = x'$, mentre la derivata prima ha una discontinuità di tipo $\theta(x)$ di Heaviside, ovviamente la derivata seconda ne avrà una di tipo delta di Dirac.
- La funzione di Green è simmetrica rispetto allo scambio delle due variabili, cioè

$$G(x,x') = G(x',x)\,.$$