2.9 Spazi di Banach

La successione $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ dello spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ si dice di Cauchy $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, k_0(\varepsilon)$, tale che

$$\|a_k - a_m\| < \varepsilon\,, \qquad \forall\, k, m \geq k_0\,.$$

Teorema di convergenza. Le tre condizioni seguenti sono equivalenti

I) $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy;

II) $\left\|a_{p_k} - a_{q_k}\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\, \{p_k\}, \{q_k\} \subset \mathbb{N}$, successioni crescenti di interi positivi;

III) $\left\|a_{p_{k+1}} - a_{p_k}\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\, \{p_k\} \subset \mathbb{N}$, successione crescente di interi positivi.

Dim.: è banale verificare che: I) $\Rightarrow$ II) $\Rightarrow$ III), per concludere la dimostrazione basta verificare che I) $\Rightarrow$ III). Verifichiamo le tre implicazioni successive.
I) $\Rightarrow$ II). Se $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy, si ha che $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, k_0(\varepsilon)$, tale che

$$\|a_m - a_n\| < \varepsilon\,, \qquad \forall\, m, n \geq k_0\,.$$

Inoltre, $\forall\, \{p_k\}_{k=1}^{\infty}, \{q_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, successioni crescenti di numeri naturali e $\forall\, k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $\exists\, k_1(k_0) \in \mathbb{N}$, tale che

$$p_k, q_k \geq k_0(\varepsilon)\,, \qquad \forall\, k \geq k_1(k_0)\,,$$

quindi vale anche la disuguaglianza

$$\left\|a_{p_k} - a_{q_k}\right\| < \varepsilon\,, \qquad \forall\, k \geq k_1(k_0)\,, \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \left\|a_{p_k} - a_{q_k}\right\| = 0\,,$$

che rappresenta la condizione di convergenza del punto II).

II) $\Rightarrow$ III). Tra tutte le coppie di successioni crescenti di numeri naturali scegliamo p_k e $q_k = p_{k+1}$.

III) $\Rightarrow$ I). Supponiamo che la successione $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ non sia di Cauchy. In questo caso, $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste un'infinità di coppie $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, per cui vale $\|a_m - a_n\| \geq \varepsilon$, infatti, se così non fosse si avrebbe la condizione di Cauchy. Da questa infinità di valori è possibile estrarre una successione crescente $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, tale che $\left\|a_{p_{k+1}} - a_{p_k}\right\| \geq \varepsilon$ e quindi

$$\lim_{k\to\infty} \left\|a_{p_{k+1}} - a_{p_k}\right\| > 0\,.$$

Ciò è in contraddizione con l'asserto III), che richiedeva, invece, l'annullamento del limite precedente, $\forall\, \{p_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Dimostriamo che **ogni successione convergente è una successione di Cauchy**. Sia $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ una successione convergente al vettore $|a\rangle$, si ha cioè il limite

$$\lim_{k\to\infty} \|a_k - a\| = 0\,.$$

Ne consegue che, date due generiche successioni crescenti di interi $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, la norma della differenza tra i termini p_k-esimo e q_k-esimo della successione è infinitesima al divergere di k, ovvero

$$0 \leq \left\|a_{p_k} - a_{q_k}\right\| = \left\|a_{p_k} - a + a - a_{q_k}\right\| \leq \|a_{p_k} - a\| + \left\|a_{q_k} - a\right\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 + 0\,,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza triangolare, dopo aver aggiunto e sottratto il vettore limite $|a\rangle$ nella norma. Per l'affermazione II) si ha che $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy.
Come abbiamo già visto in uno degli esempi precedenti, l'implicazione inversa non è in vera. Si hanno, infatti, successioni di Cauchy non convergenti. Riportiamo di seguito un altro esempio.
Esempio. Sia $\mathscr{P}([0,1])$ lo spazio vettoriale metrico dei polinomi $P(x)$ definiti nell'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$, la cui norma è data da

$$\|P\| = \max_{x\in[0,1]} \{|P(x)|\} .$$

Consideriamo la successione di polinomi $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, con

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} .$$

Si tratta di una successione di Cauchy, lo verifichiamo usando l'affermazione III), ovvero osservando che

$$\lim_{k\to\infty} \left\|P_{p_{k+1}}(x) - P_{p_k}(x)\right\| = 0 .$$

per ogni successione crescente di numeri naturali $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Possiamo verificarlo direttamente, ovvero

$$\left\|P_{p_{k+1}}(x) - P_{p_k}(x)\right\| \;=\; \left\|\sum_{j=p_k+1}^{p_{k+1}} \frac{x^j}{j!}\right\| = \sum_{j=p_k+1}^{p_{k+1}} \frac{1}{j!} = \frac{1}{(p_k+1)!} + \frac{1}{(p_k+2)!} + \cdots \frac{1}{p_{k+1}!} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Il limite è nullo in quanto ciascuno dei $(p_{k+1} - p_k)$ termini è infinitesimo per $k \to \infty$, poiché la successione di numeri naturali p_k è crescente.
Infine, è immediato osservare che il limite della successione esiste ed è

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x ,$$

si tratta della funzione esponenziale e non di un polinomio. La successione quindi converge, ma ad un elemento che **non appartiene** allo spazio vettoriale che la contiene, Quindi diremo che, nello spazio vettoriale $\mathscr{P}([0,1])$, questa successione pur essendo una successione di Cauchy, non converge.

Def.: Uno spazio vettoriale metrico si dice **completo** se e solo se, per definizione, ogni successione di Cauchy di sui elementi converge ad un elemento dello stesso spazio vettoriale. Un spazio vettoriale normato e completo è anche detto **spazio di Banach** (Stefan Banach, 30 marzo 1892 - 31 agosto 1945, Polonia).

Lemma (Convergenza della norma delle successioni di Cauchy). Sia $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di Cauchy in $(E, \|\cdot\|)$, **allora** la successione delle norme $\{\|a_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ converge.

Dim.: Si ha, per ipotesi, che: $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists k_0(\varepsilon)$, tale che

$$\|a_m - a_n\| < \varepsilon\,, \qquad \forall\, m, m \geq k_0\,.$$

Usando la disuguaglianza triangolare si ottiene

$$\varepsilon > \|a_m - a_n\| + \|a_m - a\| \geq \|a_n - a\| \geq \big|\,\|a_n\| - \|a_m\|\,\big|\,,$$

ovvero la condizione di Cauchy per la successione delle norme $\{\|a_k\|\}_{k=1}^{\infty}$, che è quindi convergente, essendo una successione di scalari, in particolare di numeri reali non negativi.
La convergenza assoluta, ovvero la convergenza della successione delle norme, implica la limitatezza della successione. In generale **ogni successione di Cauchy** $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ **è limitata**, cioè: $\exists M > 0$, tale che: $\|a_k\| \leq M$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

2.10 Spazi di Hilbert e definizioni

In uno spazio vettoriale il concetto di convergenza è definito rispetto ad una norma, si dice, infatti, che la **la norma induce una convergenza**.

- Uno spazio vettoriale **normato** o **metrico** è detto **spazio di Banach** o **completo** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ **ogni successione di Cauchy** di sui elementi **converge**, rispetto alla norma data, **ad un elemento dello stesso spazio**.
- Qualora la norma, che induce la convergenza che, a sua volta, dà la completezza, sia indotta dal prodotto scalare, cioè $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot|\cdot\rangle}$, si ha un particolare spazio vettoriale completo detto **spazio di Hilbert** (David Hilbert, 23 gennaio 1862 - 14 febbraio 1943, Germania). Ovvero uno spazio di Hilbert **è uno spazio di Banach in cui la norma, che ne definisce la completezza, è indotta dal prodotto scalare**.

2.11 Serie di vettori

Le serie e le relative condizioni di convergenza si studiano considerando, come sempre, le successioni delle somme parziali. Sia $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$, con E spazio normato, l'insieme dei termini della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k\rangle\,,$$

si dice che la serie converge in $E \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ è convergente in E la successione delle somme parziali

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} |a_k\rangle\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Quindi se $\exists\,|a\rangle \in E$, tale che:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} |a_k\rangle - a\right\| = \lim_{n\to\infty}\|a_1 + a_2 + \cdots + a_n - a\| = 0\,,$$

in questo caso si scrive

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k\rangle = |a\rangle\,.$$

Se convergesse anche la serie delle norme, cioè se si avesse

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty\,,$$

allora diremmo che la serie è **assolutamente convergente**.

Teorema di equivalenza tra la completezza e la convergenza assoluta delle serie. Uno spazio vettoriale metrico è completo, ovvero è uno spazio di Banach $\Longleftrightarrow$ ogni serie assolutamente convergente converge.

Dim.: ($\Longrightarrow$) Sia E uno spazio di Banach e $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ l'insieme dei termini di una serie assolutamente convergente, per cui si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty\,.$$

Dimostriamo che la successione delle somme parziali,

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} |a_k\rangle\right\}_{n=1}^{\infty}\,,$$

è una successione di Cauchy di E ed è, quindi, in quanto lo spazio E è completo per ipotesi. La convergenza assoluta implica che la successione delle somme parziali assolute sia una successione di Cauchy, in quanto per successioni di scalari la condizioni di Cauchy e di convergenza sono equivalenti, si ha quindi che: $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,k_0(\varepsilon)$, tale che

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \|a_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|\right| = \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| < \varepsilon\,, \qquad \forall\,m,n \geq k_0\,,$$

dove, senza perdita di generalità, si è posto $m > n$. Usando, anche in questo caso, la disuguaglianza triangolare si ottiene la condizione di Cauchy anche per la successione delle somme parziali della serie vettoriale, infatti, $\forall\,m,n \geq k_0$,

$$\varepsilon > \left|\sum_{k=1}^{m} \|a_k\| - \sum_{k=1}^{n} \|a_k\|\right| = \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \geq \left\|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k\rangle\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{m} |a_k\rangle - \sum_{k=1}^{n} |a_k\rangle\right\|\,.$$

Ne consegue che la serie vettoriale **converge** in quanto converge la successione delle somme parziali, essendo, come appena dimostrato, una successione di Cauchy in spazio vettoriale completo.

Dim.: ($\Longleftarrow$) Sia E uno spazio vettoriale metrico tale che ogni sua serie assolutamente convergente sia anche convergente, volgiamo dimostrare che tale spazio vettoriale sia completo, ovvero che E sia uno spazio di Banach.
Consideriamo una generica successione di Cauchy $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$, per la quale richiediamo la condizione di Cauchy nella forma: $\forall\,p \in \mathbb{N}$, $\exists\,k(p)$, tale che

$$\|a_m - a_n\| < 2^{-p}\,, \qquad \forall\,m,n \geq k(p)\,.$$

Possiamo considerare, senza perdita di generalità, la funzione intera a valori interi $k(p)$ come **strettamente crescente**, cioè tale che

$$k(p+1) > k(p)\,, \qquad \forall\,p \in \mathbb{N}\,.$$

In questo caso si ha che la serie

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Big(|a_{k(p+1)}\rangle - |a_{k(p)}\rangle\Big)$$

è assolutamente convergente, infatti

$$0 \le \sum_{p=1}^{\infty}\left\|a_{k(p+1)} - a_{k(p)}\right\| < \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} = 1\,.$$

Anche la serie vettoriale converge, in quanto, si ha per ipotesi che converge ogni serie che sia assolutamente convergente converge. Il vettore somma $|S\rangle$ della serie si ottiene come limite della successione convergente delle somme parziali, il cui termine n-esimo è

$$\begin{aligned}
|S_n\rangle &= \sum_{p=1}^{n}\Big(|a_{k(p+1)}\rangle - |a_{k(p)}\rangle\Big)\\
&= |a_{k(2)}\rangle - |a_{k(1)}\rangle + |a_{k_0(3)}\rangle - |a_{k(2)}\rangle + \ldots + |a_{k(n+1)}\rangle - |a_{k(n)}\rangle\\
&= |a_{k(n+1)}\rangle - |a_{k(1)}\rangle\,,
\end{aligned}$$

si ha cioè

$$\lim_{n\to\infty}|S_n\rangle = \sum_{p=1}^{\infty}\Big(|a_{k(p+1)}\rangle - |a_{k(p)}\rangle\Big) = |S\rangle$$

Indicando con $|a\rangle$ il vettore somma dei vettori $|S\rangle$ e $|a_{k(1)}\rangle$ il limite della successione delle somme parziali può essere scritto nelle forma

$$\lim_{n\to\infty}|S_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\Big(|a_{k(n+1)}\rangle - |a_{k(1)}\rangle\Big) = |S\rangle = |a\rangle - |a_{k(1)}\rangle\,,$$

in modo tale che il vettore $|a\rangle$ rappresenti il limite della successione $\{|a_{k(p)}\rangle\}_{p=1}^{\infty}$, che rappresenta una sotto-successione della successione di Cauchy iniziale. Dimostriamo che il vettore $|a\rangle$ è anche il limite della successione completa $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$. A tal fine consideriamo che per la norma della differenza tra lo stesso vettore limite $|a\rangle$ e il p-esimo vettore della successione si ha la seguente limitazione

$$0 \le \|a_p - a\| \le \underbrace{\left\|a_p - a_{k_0(p)}\right\|}_{\substack{\to 0\\ \text{II) Succ. Cauchy}}} + \underbrace{\left\|a_{k_0(p)} - a\right\|}_{\to 0} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

dove l'annullamento della prima norma, nel limite $p \to \infty$, è conseguenza del fatto che la successione sia di Cauchy, in particolare dell'affermazione II) del teorema di convergenza precedentemente dimostrato, mentre la seconda norma si annulla, nello stesso limite, per la convergenza della sotto-successione.
In definitiva abbiamo dimostrato che la generica successione di Cauchy $\{|a_p\rangle\}_{p=1}^{\infty} \subset E$ converge a un vettore dello stesso spazio vettoriale E, ovvero

$$\lim_{p\to\infty}|a_p\rangle = |a\rangle \in E\,.$$

Ne consegue che lo spazio metrico E è completo, è quindi uno spazio di Banach.

2.12 Operatori

Il concetto di **operatore** definito in uno spazio vettoriale generalizza quello di funzione che è invece definita in un campo scalare.
Consideriamo nello spazio vettoriale E una **operazione** f che associ ad un vettore $|a\rangle \in D \subset E$, un altro vettore $|b\rangle \in E$, per cui si possa scrivere $f : D \longrightarrow E$. Formalmente, usando la notazione *ket* per i vettori, dovremmo scrivere l'identità $|f(|a\rangle)\rangle = |b\rangle$, si tratta di una forma piuttosto convoluta. In forma **operatoriale**, invece, si ha

$$\hat{F}|a\rangle = |b\rangle\,,$$

dove $\hat{F}$ indica l'operatore. Si dice che il vettore $|b\rangle$ è il risultato dell'applicazione dell'operatore $\hat{F}$ sul vettore $|a\rangle \in D$. Un operatore è definito se e solo se è definita la sua "azione".

2.13 Dominio, range e nucleo

In generale detto $\hat{F}$ un operatore definito in uno spazio vettoriale E, si hanno:

- il **dominio** dell'operatore: $D = \{|a\rangle \in E : \hat{F}|a\rangle \text{ è definito}\}$;
- il **range** o portata dell'operatore: $R \supset \{|b\rangle \in E : |b\rangle = \hat{F}|a\rangle, \forall |a\rangle \in D\}$;
- il **nucleo** dell'operatore: $N(\hat{F}) = \{|a\rangle \in D : \hat{F}|a\rangle = |0\rangle\}$.

In generale il range R potrebbe non essere un sottoinsieme dello spazio vettoriale E che invece contiene il dominio D. Nei casi che studieremo, però, se non altrimenti specificato, considereremo sempre $D, R \subset E$.

2.14 Operatori lineari

Un operatore $\hat{F} : D \to R$, con $D, R \subset E$ ed E è uno spazio vettoriale su un campo scalare S, è un **operatore lineare** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, |a_1\rangle, |a_2\rangle \in D$ e $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in S$ si ha

$$\hat{F}\big(\alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle\big) = \alpha_1\hat{F}|a_1\rangle + \alpha_2\hat{F}|a_2\rangle\,;$$

si dice invece **anti-lineare** se

$$\hat{F}\big(\alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle\big) = \alpha_1^*\hat{F}|a_1\rangle + \alpha_2^*\hat{F}|a_2\rangle\,.$$

2.15 Algebra degli operatori

è possibile definire un'algebra (dall'arabo: "aggiustare") degli operatori, ovvero un insieme di operazioni tra e con gli operatori stessi. Si hanno le seguenti proprietà.

O1) Dati due operatori $\hat{F}$ e $\hat{G}$, si dice che i due operatori sono uguali, ovvero: $\hat{F} = \hat{G} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\, |a\rangle \in E$ si ha

$$\hat{F}|a\rangle = \hat{G}|a\rangle\,.$$

O2) L'operatore **identità** $\hat{I}$ è definito dalla regola di azione

$$\hat{I}|a\rangle = |a\rangle\,, \qquad \forall\, |a\rangle \in E\,.$$

O3) Siano $\hat{F}$ e $\hat{G}$ due operatori lineari, con $\hat{F}, \hat{G} : D \to R$, definiamo l'operatore **somma** $\hat{S} = \hat{F} + \hat{G} : D \to R$, come l'operatore la cui azione è

$$\hat{S}|a\rangle = \hat{F}|a\rangle + \hat{G}|a\rangle\,,$$

$\forall\, |a\rangle \in D$. L'operatore differenza $\hat{M}$ o semplicemente la differenza è definita come $\hat{M} = \hat{F} + (-1)\hat{G} = \hat{F} - \hat{G} : D \to R$ e, $\forall\, |a\rangle \in D$, si ha

$$\hat{M}|a\rangle = \hat{F}|a\rangle - \hat{G}|a\rangle\,.$$

O4) Dati due operatori lineari $\hat{F}$ e $\hat{G}$ con

$$\hat{F} : D_F \to R_F\,, \qquad \hat{G} : D_G \to R_G\,,$$

se $R_G \subset D_F$, possiamo definire il **prodotto**: $\hat{P} = \hat{F}\hat{G} : D_G \to R_F$, cosicché: $\forall\, |a\rangle \in D_G$,

$$\hat{P}|a\rangle = \hat{F}\big(\hat{G}|a\rangle\big) = \hat{F}|b\rangle = |c\rangle \in R_F\,.$$

Se uno dei due operatori fosse l'identità, ad esempio $\hat{G} = \hat{I}$, avremmo

$$\hat{P} = \hat{F}\hat{I} = \hat{I}\hat{F} = \hat{F}\,.$$

In generale il prodotto di due operatori **non gode della proprietà commutativa**, cioè:

$$\hat{F}\hat{G} \neq \hat{G}\hat{F}\,.$$

Per formalizzare una tale proprietà si definisce un ulteriore operatore detto **commutatore** di due operatori come

$$[\hat{F},\hat{G}] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}\,.$$

Il commutatore di due operatori è nullo se e solo se gli operatori commutano. Tutti gli operatori commutano con l'identità.
L'**anti-commutatore** di due operatori $\hat{F}$ e $\hat{G}$ è dato da

$$\{\hat{F},\hat{G}\} = \hat{F}\hat{G} + \hat{G}\hat{F}.$$

Quando due operatori hanno anti-commutatore nullo si dice che **anti-commutano**.

2.16 Algebra dei commutatori

Considerata la generica terna di operatori $\hat{F},\hat{G},\hat{H} : D \to R$, si hanno per i commutatori le seguenti proprietà.

C1) Il commutatore è anti-simmetrico rispetto allo scambio dei due operatori, $[\hat{F},\hat{G}] = -[\hat{G},\hat{F}]$;

C2) Per i commutatori di un operatore con il prodotto di due operatori si hanno le identità

$$[\hat{F}\hat{G},\hat{H}] = \hat{F}[\hat{G},\hat{H}] + [\hat{F},\hat{H}]\hat{G}\,, \qquad [\hat{F},\hat{G}\hat{H}] = [\hat{F},\hat{G}]\hat{H} + \hat{G}[\hat{F},\hat{H}]\,.$$

C3) Infine, si ha l'identità di Jacobi (Carl Gustav Jacob Jacobi, 10 dicembre 1804 - 18 febbraio 1851, Germania)

$$[\hat{F},[\hat{G},\hat{H}]] + [\hat{G},[\hat{H},\hat{F}]] + [\hat{H},[\hat{F},\hat{G}]] = 0\,.$$

2.17 Basi

Una **base** di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori attraverso i quali è possibile esprimere ogni vettore dello stesso spazio vettoriale. Il concetto di base si fonda su quello di **indipendenza lineare**.

Def.: In uno spazio vettoriale E, gli N vettori dell'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N} \subset E$, che non contiene il vettore nullo, si dicono **linearmente indipendenti** $\stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ l'identità

$$\sum_{k=1}^{N} c_k |e_k\rangle = |0\rangle\,,$$

equivale alla condizione $c_k = 0$, $\forall k \in \{1,2,\ldots,N\}$, ovvero se e solo se l'unica combinazione lineare di questi vettori che dà il vettore nullo è la combinazione lineare banale. Se, invece, esistesse una N-upla di coefficienti, $\{c_k\}_{k=1}^N$, **non tutti nulli**, che verificasse l'identità dell'equazione precedente, allora i vettori sarebbero **linearmente dipendenti**.

Si hanno i seguenti fatti.

IL1) Il numero massimo N, di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale, rappresenta la dimensione dello spazio vettoriale stesso, scriviamo $\dim(E) = N$. Si dice che lo spazio vettoriale ha dimensione finita se, ovviamente, $N < \infty$.

IL2) Vettori **ortogonali** sono **linearmente indipendenti**, quindi un insieme di vettori ortogonali rappresenta un insieme di vettori linearmente indipendenti.
Dim.: Sia $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$ un insieme di N vettori ortogonali, tutti diversi dal vettore nullo, valgono quindi le identità

$$\langle e_m|e_n\rangle \;=\; \delta_{mn}\langle e_m|e_m\rangle\,, \qquad |e_n\rangle \neq |0\rangle \;\Rightarrow\; \langle e_n|e_n\rangle \neq 0\,, \qquad \text{con: } m,n \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Consideriamo la combinazione lineare di questi vettori che dà il vettore nullo

$$|0\rangle = \sum_{k=1}^N a_k|e_k\rangle$$

e dimostriamo che è la combinazione banale. Moltiplichiamo ambo i membri della precedente per il generico vettore *bra* $\langle e_j|/\langle e_j|e_j\rangle$, con $j = 1,2,\ldots,N$, ($\langle e_j|e_j\rangle \neq 0, \forall j$), si ottiene che

$$0 = \frac{\langle e_j|0\rangle}{\langle e_j|e_j\rangle} = \frac{1}{\langle e_j|e_j\rangle}\sum_{k=1}^N a_k\langle e_j|e_k\rangle = \frac{1}{\langle e_j|e_j\rangle}\sum_{k=1}^N a_k\langle e_k|e_k\rangle\delta_{kj} = a_j\,.$$

Ne consegue che tutti i coefficienti dell'insieme $\{a_k\}_{k=1}^N$ sono nulli, quindi i vettori ortogonali sono anche linearmente indipendenti.

IL3) Sia $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E$, un insieme di vettori linearmente, diremo che tale insieme rappresenta una base di $E \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall\,|a\rangle \in E$ è possibile scrivere

$$|a\rangle = \sum_{k=1}^N a_k|e_k\rangle\,.$$

Inoltre, i coefficienti a_k, con $k = 1,2,\ldots,N$, ovvero le **componenti** del vettore $|a\rangle$ rispetto alla suddetta base, sono **unici**.
Dim.: Supponiamo che esista un altro insieme di componenti $\{a'_k\}_{k=1}^N$ del vettore $|a\rangle$, rispetto alla stessa base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$, ovvero che si abbiano

$$|a\rangle = \sum_{k=1}^N a'_k|e_k\rangle\,, \qquad |a\rangle = \sum_{k=1}^N a_k|e_k\rangle\,,$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene

$$|0\rangle = |a\rangle - |a\rangle = \sum_{k=1}^N (a_k - a'_k)|e_k\rangle\,.$$

Poiché l'unica combinazione lineare di un insieme di vettori linearmente indipendenti che dia il vettore nullo è quella banale, si ha necessariamente che

$$a_k - a'_k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_k = a'_k\,, \qquad \forall k \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

da cui l'unicità dell'insieme delle componenti.