2.36 Trasformate di Fourier

Estendendo a tutto l'asse reale l'intervallo $(-\pi,\pi)$ di definizione del sistema ON e completo della fasi $\left\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\right\}_{k=-\infty}^{\infty} \subset L^2(-\pi,\pi)$, si ottiene la possibilità di rappresentare funzioni, che abbiano opportune proprietà di sommabilità à la Lebesgue, per mezzo di espressioni integrali dette **trasformate di Fourier**.

2.36.1 Serie di Fourier in forma complessa

Come anticipato, il sistema delle fasi $\left\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ è **ON e completo** in $L^2(-\pi,\pi)$, ne consegue che: $\forall\, f(x) \in L^2(-\pi,\pi)$, si ha la serie formale di Fourier

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_k = \left(\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, f\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

che converge in media alla funzione $f(x)$, ovvero

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = f(x).$$

Nella stessa classe di funzioni $L^2(-\pi,\pi)$, anche il sistema delle funzioni trigonometriche è ON e completo e quindi, la serie di Fourier della funzione $f(x)$ anche rispetto a tale sistema converge in media alla stessa funzione $f(x)$. In questo caso si usa la notazione

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)\right].$$

Sviluppando la serie rispetto al sistema delle fasi è possibile trovare le relazioni che legano i coefficienti dell'insieme $\{a_{k-1}, b_k\}_{k=1}^{\infty}$ della serie trigonometrica ai coefficienti dell'insieme $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ di quella delle fasi, infatti

$$\begin{aligned} f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} &= \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}\right) \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(c_k + c_{-k}\right)\cos(kx) + i\left(c_k - c_{-k}\right)\operatorname{sen}(kx)\right], \end{aligned}$$

dal confronto si hanno le relazioni cercate

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c_0, \qquad a_k = \frac{c_k + c_{-k}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad b_k = \frac{i(c_k - c_{-k})}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Queste relazioni possono essere ottenute direttamente dai prodotti scalari che definiscono gli stessi coefficienti. Ad esempio, dalle definizioni in termini dei prodotti scalari

$$a_k = (\cos(kx)/\pi, f), \qquad c_j = (e^{ijx}/\sqrt{2\pi}, f), \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad j \in \mathbb{Z},$$

si ricava la relazione

$$a_k = \frac{(e^{ikx} + e^{-ikx}, f)}{2\pi} = \frac{(e^{ikx}, f) + (e^{-ikx}, f)}{2\pi} = \sqrt{2\pi}\, \frac{c_k + c_{-k}}{2\pi} = \frac{c_k + c_{-k}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Infine, grazie alle proprietà delle fasi, per funzioni a quadrato sommabili in $(-\pi,\pi)$ e a valori reali, si ha $c_j = c_{-j}^*$, $\forall\, j \in \mathbb{Z}$, e quindi

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re}(c_k), \qquad b_k = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im}(c_k), \qquad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

È stato incluso anche il caso $k = 0$, infatti: $c_0 \in \mathbb{R}$, quindi $\operatorname{Im}(c_0) = 0$ e $b_0 = 0$.

2.36.2 Dalle serie alle trasformate di Fourier

Lo sviluppo in serie trigonometrica e anche "esponenziale" di Fourier di una generica funzione $f(x) \in L(-\pi,\pi)$, per il teorema di Fejér, è C_1-sommabile ed è sommabile in senso ordinario, se inoltre il k-esimo coefficiente è un $O(1/k)$, per $k \to \infty$. La somma della serie coincide quasi dappertutto in $(-\pi,\pi)$ con la funzione $f(x)$, ovvero converge in media a $f(x)$.
Nel caso in cui il dominio di definizione della funzione sia un generico intervallo simmetrico $(-T/2,T/2)$, con $T>0$ e quindi $f(x) \in L(-T/2,T/2)$, è immediato ricondurre il problema della possibilità di ottenere la rappresentazione di tale funzione a quello delle funzioni definite nell'intervallo $(-\pi,\pi)$. Infatti, usando il sistema ON e completo delle fasi, con il cambiamento di variabile

$$x \longrightarrow x'(x) = \frac{2\pi}{T}x, \qquad \Longrightarrow \qquad x \in (-T/2,T/2) \longrightarrow x' \in (-\pi,\pi),$$

la serie formale di Fourier della funzione $f(x)$ è

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx'(x)}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ik\frac{2\pi}{T}x}}{\sqrt{2\pi}}$$

e i coefficienti si ottengono integrando la funzione $f(x)$ sull'intervallo $(-T/2,T/2)$, cioè

$$c_k = \left(\frac{e^{ikx'}}{\sqrt{2\pi}}, f[x(x')]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx'} f[x(x')]dx' = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-ik\frac{2\pi}{T}x} f(x)dx.$$

Consideriamo il limite $T \to \infty$, possiamo estendere la trattazione a funzioni sommabili su tutto l'asse reale. Procediamo in modo euristico, senza preoccuparci (per ora) delle condizioni di convergenza. Assumiamo che la serie di Fourier converga in senso ordinario e che la funzione $f(x)$ sia continua, sostituiamo, quindi, il simbolo di Hurwitz con quello di identità, si ha cioè

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x}.$$

Definiamo le quantità: $\Delta p = 2\pi/T$ e $p_k = k\Delta p = k2\pi/T$, in termini delle quali le espressioni dei coefficienti diventano

$$c_k = \frac{\sqrt{2\pi}}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-ik\frac{2\pi}{T}x} f(x)dx = \frac{\Delta p}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-ip_k x} f(x)dx.$$

Trattando la variabile p_k come se fosse continua, definiamo la funzione

$$\tilde{f}(p_k) = \frac{c_k}{\Delta p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-ip_k x} f(x)dx.$$

La serie di Fourier acquisisce una forma "discreta" che potremmo definire simmetrica rispetto alla funzione $\tilde{f}(p_k)$, ovvero

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ip_k x} \tilde{f}(p_k)\Delta p.$$

Infatti, passando dal discreto al continuo, si ha che la variazione finita diventa un differenziale, cioè: $\Delta p \to dp$ e la somma diventa un integrale: $\sum \Delta p \to \int dp$, di conseguenza le espressioni per le funzioni $f(x)$ e $\tilde{f}(p_k)$ diventano "speculari", a meno del cambiamento di segno dell'esponente dell'esponenziale.
In dettaglio, considerando il limite $T \to \infty$ e si ha che:

- l'intervallo $\Delta p = 2\pi/T$ diventa infinitesimo, il differenziale dp;
- la serie tende, quindi, all'integrale in dp su tutto l'asse reale $(-\infty,\infty)$ della funzione $e^{ipx}\tilde{f}(p)$.

Ne consegue che per la funzione $f(x)$ si ottiene la rappresentazione integrale

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx}\tilde{f}(p)dp\,,$$

mentre i coefficienti di Fourier hanno la solita espressione integrale anche se in questo caso l'indice p non è più discreto, diventa bensì una variabile continua, si ha infatti

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}f(x)dx\,.$$

Ovviamente la validità di queste relazioni è conseguenza della liceità delle operazioni fatte per passare dalla serie all'integrale. Quando le rappresentazioni sono valide le funzioni $\tilde{f}(p)$ e $f(x)$ si chiamano rispettivamente **trasformata di Fourier** della funzione $f(x)$ e **anti-trasformata di Fourier** della funzione $\tilde{f}(p)$.
Da un punto di vista fisico, le serie e le trasformate di Fourier si usano quando una grandezza fisica può essere interpretata come **sovrapposizione di quantità periodiche**. In questi casi si parla di **decomposizione spettrale** o **analisi spettrale** di Fourier.
Nel caso in cui sia definita in un intervallo **finito**, la funzione $f(x)$ è decomposta in funzioni periodiche elementari che hanno frequenze **discrete** $p_k = 2\pi k/T$, $k \in \mathbb{Z}$ e con l'insieme dei coefficienti di Fourier $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$.
Se, invece, la funzione $f(x)$ è definita su tutto l'asse reale, la scomposizione è fatta in termini di funzioni elementari, le fasi $e^{ipx}/\sqrt{2\pi}$, che hanno frequenze **continue**, così come gli indici dei coefficienti, che sono quindi delle funzioni $\tilde{f}(p)$ dette anche **densità spettrali**.

2.36.3 Trasformate di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$

La definizione di trasformata di Fourier (TF) in $L^2(\mathbb{R})$ non è banale poiché non tutte le funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ ammettono l'integrale di Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\,.$$

Ciò è conseguenza della non limitatezza di $\mathbb{R}$ e quindi del fatto che una generica funzione appartenente alla classe $L^2(\mathbb{R})$ possa non appartenere a quella delle funzioni semplicemente sommabili in $\mathbb{R}$, cioè $L(\mathbb{R})$, non avendo un comportamento asintotico adatto. L'integrale della TF esiste sempre, invece, se la funzione $f(x)$ è direttamente sommabile in $\mathbb{R}$, cioè se $f(x) \in L(\mathbb{R})$. Si dimostra facilmente che in questo caso l'integranda è assolutamente limitata dal modulo della stessa funzione $f(x)$ che è, ovviamente, sommabile in $\mathbb{R}$, ovvero

$$\left|f(x)e^{-ikx}\right| \leq |f(x)| \in L(\mathbb{R})\,.$$

Def.: La definizione di TF, che tiene conto dell'esistenza della stessa, è la seguente: $\forall\, f(x) \in L(\mathbb{R})$ la funzione $\mathscr{F}_k[f]$ definita come

$$\mathscr{F}_k[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

rappresenta la **trasformata di Fourier della funzione** $f(x)$. Se la TF ammette anti-trasformata, posto $\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k[f]$, si ha

$$\mathscr{F}_{-x}[\tilde{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

questa funzione è detta **anti-trasformata di Fourier** di $\tilde{f}(k)$.
È stato introdotto il simbolo operatoriale $\mathscr{F}_y[g]$, definito $\forall g(x) \in L(\mathbb{R})$, per indicare l'integrale della funzione $g(x)$, che compare come argomento nelle parentesi quadre, moltiplicata per la fase pura e^{-iyx}, che ha ad esponente, a moltiplicare l'unità immaginaria, il prodotto della variabile della funzione $g(x)$ con quella che compare a pedice dello stesso simbolo operatoriale, la y in questo caso, il tutto diviso per $\sqrt{2\pi}$. In virtù di questa definizione, è possibile usare lo stesso simbolo sia per la trasformata che per l'anti-trasformata di Fourier, come del resto è stato fatto.

Nel caso in cui le condizioni di convergenza siano soddisfatte si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{-x}[\tilde{f}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \tilde{f}(x') e^{ik(x-x')} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x')}}_{\delta(x-x')} = f(x)\,,
\end{aligned}$$

ovvero l'anti-trasformata di Fourier della TF di una funzione $f(x)$, coincide con la stessa funzione di partenza $f(x)$.

2.36.4 Alcuni teoremi sulle trasformate di Fourier in $L(\mathbb{R})$

Enunciamo e dimostriamo alcuni teoremi e alcune proprietà delle TF in $L(\mathbb{R})$.

Teorema sulla continuità delle trasformate di Fourier. La TF di una generica $f(x) \in L(\mathbb{R})$ è un funzione continua.

Dim.: $\forall f(x) \in L(\mathbb{R})$ consideriamo il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\mathscr{F}_{k+1/n}[f] - \mathscr{F}_k[f]\right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-i(k+1/n)x} - e^{-ikx} \right] f(x) dx \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[e^{-ix/n} - 1 \right] f(x) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-ix/n} - 1 \right| |f(x)| dx\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale per cui, data una successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, sommabili in un insieme E e assolutamente limitate da una funzione sommabile in E, cioè tali che: $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \phi(x)$, con $\phi(x) \in L(E)$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx\,.$$

Definiamo le funzioni della successione come

$$f_n(x) = \left| e^{-ix/n} - 1 \right| |f(x)|\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

per le quali si ha la limitazione

$$f_n(x) = \left|e^{-ix/n} - 1\right| |f(x)| \leq 2|f(x)| \in L(\mathbb{R}),$$

dove la sommabilità di $|f(x)|$ è conseguenza di quella della $f(x)$ stessa. Alla luce di questo risultato si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-ix/n} - 1\right| |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left|e^{-ix/n} - 1\right| |f(x)|dx = 0,$$

che prova la continuità della TF. Poiché, inoltre, la limitazione del modulo della differenza tra le TF non dipende dalla variabile k, la **continuità della TF è uniforme**.

Convergenza uniforme. Data la successione $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L(\mathbb{R})$, convergente in norma *uno* alla funzione $f(x) \in L(\mathbb{R})$, ovvero, tale che: $\|f_k - f\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, allora la successione delle TF $\{\mathscr{F}_k[f_n]\}_{n=1}^{\infty}$ converge in norma *uno*, uniformemente in $\mathbb{R}$, alla funzione $\mathscr{F}_k[f]$.

Dim.: Usando la disuguaglianza di Darboux si ha

$$|\mathscr{F}_k[f]| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-ikx} f(x)\right| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx,$$

allora

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{R}} \left\{ \left|\mathscr{F}_k[f_n] - \mathscr{F}_k[f]\right| \right\} &= \sup_{k\in\mathbb{R}} \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[f_n(x) - f(x)\right] dx \right| \right\} \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

La limitazione ottenuta non dipende dalla variabile k e quindi l'uniformità è dimostrata.
Enunciamo, infine, senza darne dimostrazione, il seguente lemma.

Lemma di Riemann-Lebesgue. $\forall f(x) \in L(\mathbb{R})$, si ha

$$\lim_{|k|\to\infty} \mathscr{F}_k[f] = 0,$$

ovvero la TF di una funzione sommabile è asintoticamente nulla.

Teorema sulla linearità delle trasformate di Fourier. $\forall f(x), g(x) \in L(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si ha la seguente identità

$$\mathscr{F}_k[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathscr{F}_k[f] + \beta \mathscr{F}_k[g].$$

La dimostrazione è banale e si basa direttamente sulla definizione e sulla linearità dell'integrale à la Lebesgue.

Derivate e trasformate di Fourier. Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile fino all'ordine $n \in \mathbb{N}$, con la funzione stessa e tutte le n derivate sommabili, cioè: $f(z), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x) \in L(\mathbb{R})$, il che implica $\lim_{|x|\to\infty} f^{(k)}(x) = 0$, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, allora

$$\mathscr{F}_k\left[f^{(n)}\right] = (ik)^n \mathscr{F}_k[f] \,.$$

<u>**Dim.:**</u> Integrando per parti e considerando che la sommabilità della funzione e delle sue prime n derivate assicura l'annullamento asintotico delle stesse, si ottiene l'identità cercata, infatti

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[f^{(n)}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{-ikx} dx \\
&= \underbrace{f^{(n-1)}(x) e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + ik \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(x) e^{-ikx} dx \\
&= (ik)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = (ik)^n \mathscr{F}_k[f] \,.
\end{aligned}$$

Integrazione e trasformate di Fourier. Data $f(x) \in L(\mathbb{R})$ si definisce la funzione primitiva

$$g(x) = \int f(x) dx + C \,, \qquad g'(x) = f(x) \,,$$

con C costante, si ha allora

$$\mathscr{F}_k\left[\int f(x) dx\right] = \frac{1}{ik} \mathscr{F}_k[f] - C\sqrt{2\pi}\, \delta(k) \,.$$

<u>**Dim.:**</u> La dimostrazione si basa sul risultato precedente riguardante la TF della derivata prima di una funzione. Considerando la funzione $g(x)$ e la sua derivata prima, si ha

$$\begin{aligned}
ik\mathscr{F}_k[g] &= \mathscr{F}_k\left[g'\right] \\
ik\mathscr{F}_k\left[\int f(x) dx + C\right] &= \mathscr{F}_k[f] \\
ik\mathscr{F}_k\left[\int f(x) dx\right] + C\sqrt{2\pi}\, ik\, \delta(k) &= \mathscr{F}_k[f] \\
\mathscr{F}_k\left[\int f(x) dx\right] &= \frac{1}{ik} \mathscr{F}_k[f] - C\sqrt{2\pi}\, \delta(k) \,.
\end{aligned}$$

Trasformate di Fourier delle traslazioni. Data $f(x) \in L(\mathbb{R})$, $\forall x_0, k_0 \in \mathbb{R}$, si hanno

$$\mathscr{F}_k[f(x + x_0)] = e^{ikx_0} \mathscr{F}_k[f(x)] \,, \qquad \mathscr{F}_k\left[e^{ik_0 x} f(x)\right] = \mathscr{F}_{k-k_0}[f(x)] \,.$$

Dim.: Dimostriamo la prima identità semplicemente applicando la definizione di TF,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[f(x+x_0)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+x_0)e^{-ikx}dx\,, \qquad \{x'=x+x_0\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ik(x'-x_0)}dx'\\ &= e^{ikx_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}dx' = e^{ikx_0}\mathscr{F}_k[f(x)]\,.\end{aligned}$$

Allo stesso modo si dimostra la seconda identità, ovvero

$$\mathscr{F}_k\left[e^{ik_0x}f(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(k-k_0)}dx = \mathscr{F}_{k-k_0}[f(x)]\,.$$

Prima di enunciare e dimostrare il teorema sulla convoluzione, ne diamo la definizione. La convoluzione di due funzioni sommabili in $\mathbb{R}$, $f(x), g(x) \in L(\mathbb{R})$, si indica con il simbolo "$*$" ed è data dall'integrale

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx'\,.$$

Direttamente dalla definizione si ottiene che la convoluzione è simmetrica rispetto allo scambio delle due funzioni, infatti, con la sostituzione $x-x'=y$, si ha

$$\begin{aligned}(g*f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-x')f(x')dx'\\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(y)g(x-y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = (f*g)(x)\,.\end{aligned}$$

Teorema della convoluzione per le trasformate di Fourier. Siano $f(x), g(x) \in L(\mathbb{R})$ allora

$$\mathscr{F}_k[f*g] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[f]\,\mathscr{F}_k[g]\,, \qquad \mathscr{F}_k[f\cdot g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_k[f]*\mathscr{F}_k[g]\right)(k)\,.$$

Dim.: Calcoliamo direttamente la TF della convoluzione

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[f*g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x')g(x')e^{-ikx}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x')g(x')e^{-ikx'}e^{-ik(x-x')}\\ &= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d(x-x')f(x-x')e^{-ik(x-x')}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x')e^{-ikx'}\\ &= \sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k[f]\,\mathscr{F}_k[g]\,.\end{aligned}$$

Allo stesso modo la TF del prodotto, con l'introduzione di un'integrazione ulteriore ed una opportuna delta di Dirac, è

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[f\cdot g] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x)g(x')e^{-ikx}\delta(x-x') \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x)g(x')e^{-ikx}e^{ik'(x-x')} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-i(k-k')x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x')e^{-ik'x'} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk'\mathscr{F}_{k-k'}[f]\,\mathscr{F}_k[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_k[f]*\mathscr{F}_k[f]\right)(k)\,.
\end{aligned}
$$