



2. Spazi vettoriali

2.1 Spazi vettoriali

Definizione 2.1.1 Uno spazio vettoriale E è un insieme non vuoto in cui sono definite due operazioni:

- una mappa: $E \times E \rightarrow E$, ovvero un'applicazione detta **somma**, che associa ad una coppia di elementi di E un terzo suo elemento;
- una mappa: $\mathbb{C} \times E \rightarrow E$, che associa ad una coppia formata da un numero complesso e da un elemento di E un secondo elemento di E , tale operazione si chiama **moltiplicazione per uno scalare**.

Prima di elencare le proprietà che le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare verificano nello spazio vettoriale E , introduciamo la notazione “bra-ket” di Dirac (Paul Adrien Maurice Dirac, 8 agosto 1902 - 20 ottobre 1984, Regno Unito). Questo formalismo, messo a punto dal fisico britannico nel 1939 per descrivere gli stati di un sistema quantistico, può essere proficuamente usato anche per oggetti matematici astratti come, ad esempio, i vettori dello spazio vettoriale E . Il termine bra-ket deriva dalla parola inglese *bracket* che significa “parentesi”. In particolare si indicano con il termine “ket” $|a\rangle$ gli elementi di E e con il termine “bra” $\langle b|$ i “duali”, appartenenti allo spazio duale di E . Come vedremo, il prodotto scalare dei due vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ si scrive giustapponendo a sinistra il bra del primo vettore e, a destra, il ket del secondo: $\langle a|b\rangle$.

2.2 Proprietà degli spazi vettoriali

Sia E uno spazio vettoriale allora, $\forall |a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in E$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, si hanno i seguenti assiomi:

1. $|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$, **proprietà commutativa della somma**;
2. $(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$, **proprietà associativa della somma**;
3. $\exists! |d\rangle \in E$, tale che $|a\rangle + |d\rangle = |b\rangle$ (definizione di somma);
4. $\alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle$, **proprietà associativa del prodotto per uno scalare**;
5. $(\alpha + \beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$, **proprietà distributiva, per gli scalari, del prodotto per uno scalare**;
6. $\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle$, **proprietà distributiva, per i vettori, del prodotto per uno scalare**;
7. $\exists 1 \in \mathbb{C}$, tale che: $1|a\rangle = |a\rangle$, **elemento scalare neutro del prodotto per uno scalare**;

8. $\exists! |0\rangle \in E$, tale che: $|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$, **elemento vettore neutro della somma**.

Valgono, inoltre, le seguenti banali proprietà:

- $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, se $\alpha \neq 0$ e $\alpha|a\rangle = |0\rangle \implies |a\rangle = |0\rangle$;
- $\forall |a\rangle \in E$, se $|a\rangle \neq |0\rangle$ e $\alpha|a\rangle = |0\rangle \implies \alpha = 0$;
- $\forall |a\rangle \in E$, $0|a\rangle = |0\rangle$.

L'operazione di somma si dice **interna** allo spazio vettoriale, infatti tutti gli elementi coinvolti appartengono allo stesso spazio vettoriale E . L'operazione di prodotto per uno scalare è invece **esterna**, in quanto lo scalare non è un elemento di E . In generale gli scalari sono elementi di un insieme $S \subset \mathbb{C}$ e si dice che E è **uno spazio vettoriale sul campo S** . Nei casi particolari in cui $S = \mathbb{C}$ o $S = \mathbb{R}$ si parla di spazio vettoriale complesso o reale.

Esempi di spazi vettoriali

Sono spazi vettoriali:

- gli stessi \mathbb{R} e \mathbb{C} ;
- \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n , ovvero gli insiemi di n -uple di numeri reali e complessi;
- $M(n \times n, \mathbb{R})$ e $M(n \times n, \mathbb{C})$, gli spazi delle matrici $n \times n$ ad elementi reali e complessi;
- Gli insiemi, $\{P_n\}$, di polinomi di grado n .

2.3 Il prodotto scalare o prodotto interno

Sia E uno spazio vettoriale su un campo complesso $S \subset \mathbb{C}$, il prodotto scalare o interno è una operazione che associa ad una **coppia ordinata** di elementi dello spazio vettoriale E un elemento del campo scalare S . Usando la notazione bra-ket

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow S.$$

Si hanno le seguenti proprietà, $\forall |a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in E$ e $\forall \alpha, \beta \in S$

PS1) $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$, **non vale la proprietà commutativa**, invertendo l'ordine dei vettori si ottiene lo scalare complesso coniugato dell'originale;

PS2) $\langle c|(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha\langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle$, è lineare rispetto al vettore ket;

PS3) $\langle a|a\rangle \geq 0$, $\langle a|a\rangle = 0 \iff |a\rangle = |0\rangle$, il prodotto scalare di un vettore per sé stesso è un numero reale non negativo, è nullo se e solo se il vettore è il vettore nullo.

Due vettori, $|a\rangle, |b\rangle \in E$, sono **ortogonali** $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0$.

2.4 Spazi vettoriali duali

Dalla definizione di prodotto scalare è evidente una asimmetria tra il **primo** vettore, in forma *bra*, ed il **secondo** vettore, in forma *ket*. Infatti si parla di coppia **ordinata** di vettori. Come visto, la proprietà PS2) evidenzia la linearità del prodotto rispetto al fattore ket. In particolare, dato uno spazio vettoriale E su un campo scalare S , si ha che: $\forall |a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in E$ e $\forall \alpha, \beta \in S$, detto $|s\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ il prodotto può essere scritto come

$$\langle c|s\rangle = \alpha\langle c|a\rangle + \beta\langle c|b\rangle.$$

Se consideriamo il prodotto $\langle s|c\rangle$, invertendo l'ordine, cioè scambiando bra e ket, avremo

$$\langle s|c\rangle = \langle c|s\rangle^* = \alpha^*\langle a|c\rangle + \beta^*\langle b|c\rangle,$$

non è lineare in $\langle s|$, è bensì **antilineare**. Il prodotto è ancora una combinazione lineare dei prodotti, ma i coefficienti sono diversi da quelli che usiamo per combinare i vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ per formare $|s\rangle$, sono i loro complessi coniugati.

Una procedura formale per aggirare questa asimmetria consiste nel definire, accanto allo spazio vettoriale E che ha per elementi dei soli vettori in forma ket, uno spazio vettoriale **duale**, detto E^* , che contiene gli stessi elementi di E ma in forma bra. In questo modo si ha una **corrispondenza biunivoca** tra gli elementi di E e quelli di E^* , infatti: $\forall |a\rangle \in E, \exists! \langle a| \in E^*$ e viceversa. Il prodotto scalare è quindi un'applicazione, non più da $E \times E$ in \mathbb{C} , bensì

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : E^* \times E \rightarrow \mathbb{C},$$

ed è di conseguenza lineare sia rispetto al fattore ket, $|\cdot\rangle \in E$, che a quello bra, $\langle \cdot| \in E^*$. In generale si dice che $\langle a| \in E^*$ è il vettore duale di $|a\rangle \in E$. Se $|a\rangle = \alpha|b\rangle$ allora il duale sarà $\langle a| = \alpha^*\langle b|$. Questo si evince dalla definizione di prodotto scalare. Infatti, preso un terzo vettore $|c\rangle \in E$, che ha duale $\langle c| \in E^*$, avremo

$$\langle a|c\rangle = \langle c|a\rangle^* = (\alpha\langle c|b\rangle)^* = \alpha^*\langle b|c\rangle \implies \langle a| = \alpha^*\langle b|.$$

2.5 La disuguaglianza di Schwarz

Sia E uno spazio vettoriale, **allora**: $\forall |a\rangle, |b\rangle \in E$ vale la disuguaglianza di Schwarz (Karl Hermann Amandus Schwarz, 25 gennaio 1843 - 30 novembre 1921, Germania)

$$|\langle a|b\rangle| \leq \sqrt{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle}. \quad (2.1)$$

Dim.: Definiamo il vettore $|c\rangle$ in termini dei vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$, e di un numero reale t , come

$$|c\rangle = |a\rangle + t\langle a|b\rangle|b\rangle,$$

ovviamente: $|c\rangle \in E$. Consideriamo il prodotto scalare di $\langle c|c\rangle$ che, come visto, rappresenta un numero reale non negativo. Dobbiamo moltiplicare membro a membro l'identità precedente con la sua *duale*

$$\langle c| = \langle a| + t\langle a|b\rangle\langle b|,$$

dove abbiamo usato la realtà di t , ovvero $t \in \mathbb{R}$ e il fatto che il duale di $\langle b|a\rangle|b\rangle$ sia $\langle b|a\rangle^*\langle b|$, ovvero $\langle a|b\rangle\langle b|$, si ottiene quindi

$$0 \leq \langle c|c\rangle = \langle a|a\rangle + 2t|\langle a|b\rangle|^2 + t^2|\langle a|b\rangle|^2\langle b|b\rangle.$$

Il secondo membro può essere studiato come un polinomio di secondo grado nelle variabile reale t , con coefficienti reali e non negativi. La richiesta che il polinomio sia sempre non nullo $\forall t \in \mathbb{R}$, equivale a richiedere che il discriminante sia minore di o uguale a zero. In particolare avremo

$$|\langle a|b\rangle|^4 - |\langle a|b\rangle|^2\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \leq 0 \implies |\langle a|b\rangle|^2 \leq \langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \implies |\langle a|b\rangle| \leq \sqrt{\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle},$$

l'ultima relazione non è altro che la disuguaglianza di Schwarz.

Dato un insieme di n spazi vettoriali $\{E_k\}_{k=1}^n$, tutti sullo stesso campo scalare S , si definisce **prodotto cartesiano** di questi spazi vettoriali lo spazio vettoriale E dato da

$$E = \{|A\rangle \equiv (|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle) : |a_1\rangle \in E_1, |a_2\rangle \in E_2, \dots, |a_n\rangle \in E_n\},$$

in cui, $\forall |A\rangle, |B\rangle \in E$ e $\forall \alpha \in S$, sono definite le operazioni di somma e prodotto per uno scalare come

$$\begin{aligned} |A\rangle + |B\rangle &= (|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle) + (|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle) \\ &= (|a_1\rangle + |b_1\rangle, |a_2\rangle + |b_2\rangle, \dots, |a_n\rangle + |b_n\rangle), \\ \alpha|A\rangle &= \alpha(|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle) = (\alpha|a_1\rangle, \alpha|a_2\rangle, \dots, \alpha|a_n\rangle). \end{aligned}$$

Il prodotto cartesiano degli spazi E_1, E_2, \dots, E_n si indica con $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Ad esempio lo spazio tridimensionale classico è $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Il concetto di lunghezza di un vettore, definito negli spazi vettoriali “fisici” \mathbb{R}^n , con, ad esempio, $n = 1, 2, 3$, perde significato in ogni altro caso. La generalizzazione di tale concetto al generico spazio vettoriale è rappresentata dalla nozione di **norma** di un vettore.

2.6 La norma

La norma è un’applicazione che associa ad ogni vettore di uno spazio vettoriale un numero reale. Dato il vettore $|a\rangle$, la sua norma può essere indicata o con il simbolo $N(a)$, ovvero con $\|a\|$. Poiché la norma è definita solo per i vettori è sufficiente usare la sola lettera che identifica il vettore senza quindi scrivere il simbolo ket. Ciò vale anche per la norma di una somma, infatti si può scrivere

$$\||a\rangle + |b\rangle\| = \|a + b\|.$$

La norma in uno spazio vettoriale E è, quindi, un’applicazione $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, che deve verificare le seguenti proprietà, $\forall |a\rangle, |b\rangle \in E$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

N1) $\|c\| = 0 \Leftrightarrow |c\rangle = |0\rangle$;

N2) $\|\alpha|a\rangle\| = |\alpha| \|a\|$;

N3) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$, **disuguaglianza triangolare**.

Considerando la N3), con $|b\rangle = -|a\rangle$ e sfruttando le altre proprietà, si ha

$$0 = \|0\| = \||a\rangle + (-|a\rangle)\| \leq \|a\| + \|a\| = 2\|a\| \quad \Rightarrow \quad \|a\| \geq 0.$$

Quindi la condizione di non-negatività della norma può essere omessa esplicitamente, in quanto implicata dalle precedenti.

Uno spazio vettoriale E in cui sia definita una norma $\|\cdot\|$, si dice **spazio normato** o **spazio metrico**. Un spazio metrico è quindi identificato dalla coppia $(E, \|\cdot\|)$. In generale, in un dato spazio vettoriale si possono definire norme diverse.

Esempi

Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n , prodotto cartesiano di n spazi \mathbb{R} . In \mathbb{R}^n si può definire la norma euclidea. Ovvero, $\forall |a\rangle \in \mathbb{R}^n$, con $|a\rangle = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, si ha

$$\|a\|_{\text{Euc.}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

È immediato osservare come questa norma verifichi le tre proprietà N1, N2 e N3.

Potremmo anche definire altre norme come ad esempio:

$$\|a\|_{\text{mod.}} = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|;$$

$$\|a\|_{\text{max}} = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}.$$

È banale verificare come anche queste norme, parimenti a quella euclidea, verifichino le condizioni N1, N2 e N3.

2.7 Norma indotta dal prodotto scalare

In uno spazio vettoriale metrico E è possibile definire una norma sfruttando il prodotto scalare. In questo caso si dice che **il prodotto scalare induce una norma**, ovvero che **la norma è indotta dal prodotto scalare**. In particolare, la norma del vettore $|a\rangle \in E$ è definita come

$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}.$$

In primo luogo, dalla proprietà PS3) del prodotto scalare si ha

$$\|a\| = \sqrt{\langle a|a \rangle} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle a|a \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a\rangle = |0\rangle.$$

Inoltre, $\forall \alpha \in S$, dove S è il campo scalare su cui è definito lo spazio vettoriale E , si ottiene la proprietà N2), infatti

$$\|\alpha|a\rangle\| = \sqrt{|\alpha|^2 \langle a|a \rangle} = |\alpha| \|a\|.$$

Infine, data una generica coppia di vettori $|a\rangle, |b\rangle \in E$, esiste sempre un terzo vettore $|c\rangle \in E$, tale che $|a\rangle = |b\rangle + |c\rangle$. Consideriamo l'identità tra i prodotti scalari del membro sinistro per sé stesso e il destro per sé stesso

$$\begin{aligned} \langle a|a \rangle &= (\langle b| + \langle c|)(|b\rangle + |c\rangle) = \langle b|b\rangle + \langle c|c\rangle + 2\operatorname{Re}[\langle b|c\rangle] \\ &\leq \langle b|b\rangle + \langle c|c\rangle + 2|\langle b|c\rangle| \\ &\leq \langle b|b\rangle + \langle c|c\rangle + 2\sqrt{\langle b|b\rangle \langle c|c\rangle} \\ &= (\sqrt{\langle b|b\rangle} + \sqrt{\langle c|c\rangle})^2. \end{aligned}$$

Estraendo la radice quadrata e usando la definizione di norma indotta dal prodotto scalare, si ottiene la disuguaglianza triangolare del punto N3), infatti

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle a|a \rangle} &\leq \sqrt{\langle b|b\rangle} + \sqrt{\langle c|c\rangle} \\ \|a\| &\leq \|b\| + \|c\| \\ \|b+c\| &\leq \|b\| + \|c\|. \end{aligned}$$

Nella sua forma più nota la disuguaglianza triangolare è data come relazione tra le lunghezze dei lati di un triangolo. Possiamo, quindi, generalizzare e considerare un triangolo "astratto" di vertici $|x\rangle, |y\rangle$ e $|z\rangle$, allora i lati saranno

$$|a\rangle = |x\rangle - |y\rangle, \quad |b\rangle = |x\rangle - |z\rangle, \quad |c\rangle = |z\rangle - |y\rangle,$$

con $|a\rangle = |b\rangle + |c\rangle$, la disuguaglianza precedente diventa

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|y-z\|.$$

2.8 Convergenza in uno spazio metrico

La nozione di norma è fondamentale per definire il concetto di convergenza in un spazio metrico.

Def. (Convergenza in norma). Sia $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di vettori dello spazio metrico $(E, \|\cdot\|)$, tale successione converge in norma ad un vettore $|a\rangle \in E \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon)$, tale che

$$\|a_k - a\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

In questo caso si scrive formalmente che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k\rangle = |a\rangle, \quad \text{ovvero: } |a_k\rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} |a\rangle,$$

mentre il limite vero e proprio, in termini di quantità reali, è

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - a\| = 0.$$

è possibile definire anche un'altra tipologia di convergenza, detta **convergenza debole**, che si basa sul prodotto scalare. In particolare la successione $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ converge debolmente a $|b\rangle \in E \iff \forall |c\rangle \in E$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle c|b_k\rangle = \langle c|b\rangle,$$

ovvero la successione numerica $\{\langle c|b_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $\langle c|b\rangle$. La convergenza in norma di una successione ad un dato vettore, quando la norma è indotta dal prodotto scalare, implica quella debole allo stesso vettore, mentre non è vera l'implicazione opposta.

Teorema di unicità del limite. Sia $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di vettori dello spazio metrico $(E, \|\cdot\|)$, convergente ad un vettore $|a\rangle \in E$, **allora** $|a\rangle$ è unico.

Dim.: La convergenza implica che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - a\| = 0.$$

Supponiamo che esista un vettore $|b\rangle \in E$, tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - b\| = 0.$$

Applichiamo la disuguaglianza triangolare e facciamo il limite per $k \rightarrow \infty$,

$$0 \leq \|a - b\| = \|a - a_k + a_k - b\| \leq \|a_k - a\| + \|a_k - b\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

da cui: $|a\rangle = |b\rangle$, quindi il limite è unico.

Si dice che una norma definita in uno spazio vettoriale E , che è quindi uno spazio metrico, **induce** su di esso una convergenza.

Def.: Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, definite sullo stesso spazio vettoriale E sono **equivalenti** $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ inducono la stessa convergenza, ovvero, se e solo se, \forall successione $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k\|_1 = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k\|_2 = 0.$$

Esempio

è interessante osservare che in alcuni casi non è possibile definire una norma che induca la convergenza nota in un dato spazio vettoriale. Consideriamo lo spazio vettoriale, $\mathcal{C}([0, 1])$, delle funzioni continue definite nell'intervallo $[0, 1]$. Data una successione di tali funzioni, $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}([0, 1])$, si dice che la successione converge **puntualmente** a $f(x)$ in $[0, 1]$, se e solo se, $f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x), \forall x \in [0, 1]$. Verifichiamo che non esiste una norma che induca la convergenza puntuale. Supponiamo, invece, che esista una norma $\|\cdot\|$, tale che

$$\|f_k - f\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \iff f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Definiamo le funzioni della successione partendo dalla successione $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$

$$g_k(x) = \begin{cases} 2^k x & 0 \leq x \leq 2^{-k} \\ 2 - 2^k x & 2^{-k} < x \leq 2^{1-k} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

queste funzioni sono tutte non nulle, quindi $\|g_k\| > 0 \forall k \in \mathbb{N}$, per cui possiamo normalizzare, ovvero definire le funzioni $f_k(x)$ come: $f_k(x) = g_k(x)/\|g_k(x)\|$. Ne consegue che, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|f_k(x)\| = 1$, quindi la successione $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ non converge a zero rispetto alla norma $\|\cdot\|$. D'altra parte si ha che

$$f_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

La norma cercata, ovvero una norma che garantisca la convergenza a zero, non può esistere.