2.34.10 Teorema della convergenza nel caso di "variazione limitata"

La successione numerica $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ si definisce a **variazione limitata** (VL) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$

- $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$;
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| < \infty$.

Teorema di convergenza della serie trigonometrica di Fourier per le funzioni a variazione limitata. Se le successioni numeriche $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ dei coefficienti della serie trigonometrica Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\Big]$$

sono **a variazione limitata**, **allora** la serie è **uniformemente convergente** in ogni intervallo chiuso che non contenga multipli di 2π e, in ogni caso, **converge ovunque**.

La successione dei coefficienti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ della serie trigonometrica di Fourier della funzione a gradino è a VL, infatti

- $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{2k+1} = 0$;
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_{2k+1} - b_{2k+3}| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (b_{2k+1} - b_{2k+3}) = b_1 = \dfrac{4}{\pi} < \infty$.

Quindi, nell'intervallo $(-\pi,\pi)$ che non contiene multipli di 2π, si ha, per il teorema di Fejér e per quello sulla convergenza nel caso di VL, che la serie converge uniformemente alla funzione media e in dettaglio si ha

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\big[(2k+1)x\big]}{2k+1} = S(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ +1 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = \pm\pi\,,\ x = 0 \end{cases} .$$

La funzione $S(x)$, somma della serie di Fourier, coincide quasi dappertutto con la funzione di partenza $f(x)$, in altri termini la loro differenza è una funzione QDN.

<u>**N.B.**</u>: Le funzioni trigonometriche **sono periodiche**, con periodi pari a $2\pi/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e quindi le loro somme mantengono un periodo 2π. Formalmente è possibile estendere la funzione $S(x)$, somma della serie trigonometrica di Fourier, anche al di fuori dell'intervallo $(-\pi,\pi)$ e si ha che, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$S(x) = S(x+2m\pi)\,, \qquad \text{con: } m = \mathrm{int}\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right), \qquad (x+2m\pi) \in (-\pi,\pi)\,,$$

ovvero che la funzione somma $S(x)$ è essa stessa periodica ed ha il periodo massimo delle funzioni trigonometriche, cioè 2π.

Dall'equazione di Parseval della seria trigonometrica di Fourier della funzione a gradino,

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx \overset{\text{P.}}{=} \pi\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\,,$$

si ottiene la somma della serie dei quadrati degli inversi dei numeri dispari, che vale quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

2.35 Distribuzioni e delta di Dirac

Consideriamo la successione numerica

$$\left\{ \int_a^b g_k(x) f(x) dx \right\}_{k=0}^{\infty},$$

ottenuta integrando su un intervallo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ i prodotti delle funzioni della successione **non convergente** $\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathscr{F}$ per la funzione $f(x) \in \mathscr{G}$, dove $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ sono due classi di funzioni non necessariamente coincidenti.
Se, $\forall\, f(x) \in \mathscr{G}$, esiste il limite della successione numerica

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x) f(x) dx,$$

si dice che la successione $\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ rappresenta una **distribuzione** $\gamma(x)$ **rispetto alla classe di funzioni** $\mathscr{G}$ (classe delle funzioni di prova). Formalmente la distribuzione $\gamma(x)$ è definita dell'identità

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b g_k(x) f(x) dx = \int_a^b \gamma(x) f(x) dx.$$

La nozione di distribuzione generalizza quella di funzione, perciò le distribuzioni si chiamano anche **funzioni generalizzate**.
Se la successione di funzioni $\{g_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ convergesse in modo ordinario allora la funzione limite coinciderebbe con la distribuzione $\gamma(x)$, si avrebbe cioè

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \gamma(x) \in \mathscr{F}.$$

La precedente identità si usa, in forma simbolica per indicare che la distribuzione è definita da una data successione, anche quando non si ha convergenza ordinaria.

2.35.1 La funzione delta di Dirac

La cosiddetta **funzione delta di Dirac** (Paul Adrien Maurice Dirac, 8 agosto 1902 - 20 ottobre 1984, Regno Unito) $\delta(x)$ è (in realtà) una distribuzione e può essere definita dalla sua azione sotto il segno di integrale, ovvero, $\forall f(x) \in \mathscr{G}$, dove ora $\mathscr{G}$ rappresenta la classe delle funzioni di prova, si ha

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & f(x) \text{ è continua in } x_0 \in (a,b) \\ \frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right] & \exists\, f(x_0^{\pm}) \text{ e } x_0 \in (a,b) \\ \frac{1}{2} f(a^+) & \exists\, f(x_0^+) \text{ e } x_0 = a \\ \frac{1}{2} f(b^-) & \exists\, f(x_0^-) \text{ e } x_0 = b \\ 0 & x_0 \notin (a,b) \end{cases}.$$

In generale, se la funzione di prova è continua in un intorno di x_0 si ha l'identità che più di tutte identifica la delta di Dirac, cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0), \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Nel caso in cui la funzione di prova fosse una costante, ad esempio l'unità, avremmo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Una rappresentazione delle delta è data dalla successione di funzioni $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, con

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{x}, \qquad \longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{x} = \delta(x).$$

Molto utilizzata è anche la rappresentazione integrale

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk.$$

Verifichiamo l'equivalenza tra queste due rappresentazioni.
Dalla prima, data nella forma del limite di una successione, si ottiene quella in forma integrale, infatti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{x} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{ix} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk.$$

In questo caso l'integrale può essere considerato come un valore principale di Cauchy all'infinito, ovvero si esclude dall'asse reale l'intorno dell'infinito, $(-\infty,-R)\cup(R,\infty)$, per poi passare al limite $R\to\infty$, in cui tale intorno diventa infinitesimo e quindi

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} = \int_{-\infty}^{\infty}.$$

Come detto, l'identità con cui si definisce la delta è **solo formale**, perciò la definizione simbolica

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk,$$

significa che, $\forall f(x)$ appartenente alla classe delle funzioni di prova della delta, che in questo caso è quella delle **funzioni sommabili e a variazione limitata in** $\mathbb{R}$ per le quali esistano i valori limite $f(0^{\pm})$, si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dx\, e^{ikx}f(x) = \frac{1}{2}\Big[f(0^-)+f(0^+)\Big].$$

Una funzione $f(x)$ si dice a **variazione limitata** nell'intervallo (a,b) $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ la sua **variazione totale in** (a,b), $V_{(a,b)}(f)$, è finita, cioè

$$V_{(a,b)}(f) = \sup_{P(a,b)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\right\} < \infty,$$

dove l'estremo superiore (sup) si intende rispetto alla partizione $P(a,b) = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ dell'intervallo (a,b).

2.35.2 Proprietà della funzione delta di Dirac

D1. La funzione $\delta(x)$ è simmetrica, $\delta(x) = \delta(-x)$, infatti, dalla rappresentazione integrale si ha, con la sostituzione $k' = -k$,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = -\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} e^{-ik'x}dk' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'x}dk' = \delta(-x).$$

D2. $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)\,,$$

infatti, usando sempre la rappresentazione integrale, con la sostituzione $k' = |\alpha|k$ e grazie alla simmetria, verificata al punto **D1**, si ha

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\alpha x}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ik|\alpha|x}dk = \frac{1}{|\alpha|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ik'x}dk' = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)\,.$$

D3. $\forall\, g(x) \in \mathscr{G}$, valgono le identità formali

$$\begin{aligned}
&g(x)\delta(x-x_0) = g(x_0)\delta(x-x_0)\,,\\
&x\delta(x) = 0\,,\\
&\delta(x-x')\delta(x-x'') = \delta(x-x')\delta(x'-x'')\,.
\end{aligned}$$

D4. Consideriamo una funzione $g(x)$, che abbia solo **zeri semplici** nei punti $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ e sia, inoltre, **invertibile e monotona, almeno in un intorno,** $I_k = (x_k-\eta_k, x_k+\eta_k)$**, con** $\eta_k > 0$**, di ciascuno zero**, allora si ha l'identità formale

$$\delta[g(x)] = \sum_{k=1}^{N}\frac{\delta(x-x_k)}{|dg/dx|_{x=x_k}}\,.$$

La monotonia è garantita dal fatto che gli zeri siano di ordine uno, quindi ammettono intorni in cui la derivata non si annulli, ovvero la funzione è monotona e l'espressione a secondo membro non ha poli. L'identità è formale deve essere, quindi, verificata sotto il segno di integrale. Per una generica $f(x) \in \mathscr{G}$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta[g(x)]f(x)dx = \sum_{k=1}^{N}\int_{x_k-\eta_k}^{x_k+\eta_k}\delta[g(x)]f(x)dx\,,$$

gli integrali sugli intervalli I_k, con $k \in \{1,2,\ldots,N\}$, che non contengono zeri dell'argomento della delta, danno contributo nullo, è quindi lecito limitarsi ai soli intorni degli zeri in cui, per ipotesi, la funzione è invertibile. In tali intervalli possiamo fare la sostituzione

$$y = g(x)\,,\qquad x = g^{-1}(y)\,,\qquad dx = \frac{dg^{-1}}{dy}dy = \frac{dy}{dg/dx}\,.$$

L'ordine degli estremi di integrazione è determinato dalla monotonia della funzione di $g(x)$, ad esempio se

$$\frac{dg}{dx}(x_i) > 0\,,\qquad \Longrightarrow \qquad g(x_i+\eta_i) > g(x_i-\eta_i)\,,$$

allora l'integrale sull'i-esimo intervallo I_i, dove la funzione $g(x)$ è strettamente crescente, vale

$$\int_{x_i-\eta_i}^{x_i+\eta_i}\delta[g(x)]f(x)dx = \int_{g(x_i-\eta_i)}^{g(x_i+\eta_i)}\delta(y)f[g^{-1}(y)]\frac{dy}{dg/dy} = \frac{f(x_i)}{(dg/dy)_{x=x_i}} = \frac{f(x_i)}{|dg/dy|_{x=x_i}}\,.$$

Se invece la funzione $\delta(x)$ è strettamente decrescente nell'intervallo I_j, ovvero

$$\frac{dg}{dx}(x_j) < 0\,,\qquad \Longrightarrow \qquad g(x_j+\eta_j) < g(x_j-\eta_j)\,,$$

per l'integrale si ha

$$\int_{x_j-\eta_j}^{x_j+\eta_j}\delta[g(x)]f(x)dx = \int_{g(x_j-\eta_j)}^{g(x_j+\eta_j)}\delta(y)f[g^{-1}(y)]\frac{dy}{dg/dy} = -\frac{f(x_j)}{-|dg/dy|_{x=x_j}} = \frac{f(x_j)}{|dg/dy|_{x=x_j}},$$

i due segni meno derivano dal fatto che gli estremi sono invertiti, il minore è l'estremo superiore, mentre il maggiore è quello inferiore e dal fatto che la derivata in x_j è negativa e quindi coincide con l'opposto del suo modulo.
In definitiva, in ogni intorno I_k si ha

$$\int_{x_k-\eta_k}^{x_k+\eta_k}\delta[g(x)]f(x)dx = \frac{f(x_k)}{|dg/dy|_{x=x_k}},$$

lo stesso risultato può essere ottenuto come

$$\int_{x_k-\eta_k}^{x_k+\eta_k}\delta[g(x)]f(x)dx = \int_{x_k-\eta_k}^{x_k+\eta_k}\frac{\delta(x-x_k)}{|dg/dy|_{x=x_k}}f(x)dx = \frac{f(x_k)}{|dg/dy|_{x=x_k}}, \qquad k\in\{1,2,\ldots,N\}.$$

si ottiene di conseguenza l'identità desiderata.

D5. È interessante osservare che dall'identità simbolica $x\delta(x)=0$ segue che, date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con $f(x)=g(x)$, possiamo anche scrivere, $\forall K\in\mathbb{C}$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x)}{x} + K\delta(x) \quad\Longrightarrow\quad f(x) = g(x) + \underbrace{xK\delta(x)}_{=0} \quad\Longrightarrow\quad f(x)=g(x).$$

In altri termini, **la differenza tra i rapporti** $f(x)/x$ **e** $g(x)/x$ **è espressa sotto forma di una funzione generalizzata**. Alla luce di questo risultato, è possibile re-interpretare la ben nota relazione

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x},$$

in particolare si evince che tale identità **non è corretta**. Infatti, la rappresentazione della funzione $1/x$ deve tener conto del fatto che il suo integrale sull'intervallo simmetrico $(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\forall\varepsilon>0$, esiste ed è nullo, cioè

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{dx}{x} = 0.$$

Ma, se integriamo esplicitamente si ha

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d}{dx}\ln(x)dx = \ln(\varepsilon)-\ln(-\varepsilon) = -i\pi,$$

i due risultati non coincidono ed entrambi non dipendono dal valore di ε. È quindi necessario aggiungere al secondo membro della relazione "non corretta" iniziale, una "correzione" che ristabilisca l'identità integrale, cioè tale che il valore dell'integrale su $(-\varepsilon,\varepsilon)$ sia indipendente da ε e uguale a $-i\pi$. La scelta obbligata è quella di includere il termine $-i\pi\delta(x)$, quindi si ha

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Infatti il logaritmo è una funzione complessa a variabile reale, che ha la parte immaginaria discontinua in $x=0$, in cui la stessa parte immaginaria passa dal valore nullo, nel limite

$x \to 0^+$, a $-i\pi$, nel limite sinistro $x \to 0^-$. La derivata nell'origine deve essere divergente a causa di questa discontinuità. Considerando valori reali qualsiasi, anche negativi, per l'argomento, potremmo scrivere il logaritmo come

$$\ln(x) = \ln|x| + i\pi\theta(-x)\,.$$

Infine, avendo per la derivata la definizione precedente, cioè

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)\,,$$

si ottiene l'espressione della derivata prima della funzione a gradino di Heaviside (si vede la sezione successiva)

$$\frac{d}{dx}\theta(-x) = -\delta(x) = -\delta(-x) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)\,.$$

2.35.3 La funzione teta di Heaviside

La funzione teta di Heaviside (Oliver Heaviside, 18 maggio 1850 - 3 febbraio 1925, Regno Unito) è la funzione a gradino unitaria definita come

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}\,.$$

La derivata della $\theta(x)$ è la funzione delta di Dirac per cui si hanno

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)\,, \qquad \theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x')dx'\,.$$

Una rappresentazione integrale della $\theta(x)$ può essere ottenuta come

$$\theta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k - i\varepsilon}dk = \frac{1}{2i\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}dk + \frac{1}{2}\,,$$

dove si è usata la formula di Sokhotski-Plemelj. Dalla precedente si ottiene l'espressione della derivata in termini della delta di Dirac, infatti

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \delta(x)\,.$$

2.35.4 Derivata della delta di Dirac

Per ottenere l'espressione della derivata n-esima della funzione delta di Dirac, ne consideriamo l'azione sotto il segno di integrale, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n\delta(x)}{dx^n} f(x)dx$$

e assumiamo che la funzione di prova $f(x)$ sia dotata della derivata n-esima nell'origine, $x = 0$. Integrando iterativamente per parti e sfruttando l'annullamento della delta di Dirac per valori dell'argomento diverso da zero, si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n\delta(x)}{dx^n} f(x)dx &= \underbrace{\left.\frac{d^{n-1}\delta(x)}{dx^{n-1}} f(x)\right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-1}\delta(x)}{dx^{n-1}}\frac{df(x)}{dx}dx \\ &\vdots \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n}dx = (-1)^n\frac{d^n f}{dx^n}(0)\,.\end{aligned}$$

Nel caso semplice che si ha con $n = 1$, otteniamo

$$\int_{\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -\int_{\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx = -f'(0)\,.$$

Posto, ad esempio, $f(x) = xg(x)$, sempre con $n = 1$, si ha

$$\int_{\infty}^{\infty} \delta'(x) x g(x) dx = -g(0) = -\int_{\infty}^{\infty} \delta(x) g(x) dx\,.$$

In generale, con $f(x) = x^n g(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\infty}^{\infty} \frac{d^n\delta(x)}{dx^n} f(x) dx = \int_{\infty}^{\infty} x^n \frac{d^n\delta(x)}{dx^n} g(x) dx &= (-1)^n \int_{\infty}^{\infty} \delta(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} dx \\
&= (-1)^n \frac{d^n f}{dx^n}(0) \\
&= (-1)^n n!\, g(0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n n! \delta(x) g(x) dx\,,
\end{aligned}$$

da cui si ottiene l'identità formale

$$x^n \frac{d^n\delta(x)}{dx^n} = (-1)^n n! \delta(x)\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$