

## 2.26 Equazioni agli autovalori e loro risoluzione

### 2.26.1 Operatori limitati

La norma di un operatore  $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$  è definita come

$$\|\hat{A}\| = \sup_{\forall |a\rangle, \|a\|=1} [\|\hat{A}|a\rangle\|].$$

Un operatore  $\hat{A}$  si dice **limitato** se  $\|\hat{A}\| < \infty$ . Ovvero, in modo equivalente, un operatore è limitato se esiste un  $K \in (0, \infty)$

$$\|\hat{A}|a\rangle\| \leq K \|a\|, \quad \forall |a\rangle \in E_N.$$

La norma dell'operatore coincide con il minimo tra i numeri  $K$  che verificano la condizione precedente. Si hanno i seguenti teoremi.

**Teorema sulla norma del prodotto di due operatori limitati.** Il prodotto di due operatori limitati,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , è un operatore limitato e si ha

$$\|\hat{A}\hat{B}\| \leq \|\hat{A}\| \|\hat{B}\|.$$

**Dim.:** Siano  $\hat{A}, \hat{B} : E_N \rightarrow E_N$  due operatori limitati con

$$0 \leq \|\hat{A}\| < \infty, \quad 0 \leq \|\hat{B}\| < \infty.$$

Possiamo definire la norma dell'operatore anche come

$$\|\hat{A}\| = \sup_{|a\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\|\hat{A}|a\rangle\|}{\|a\|} \right\},$$

ne consegue che,  $\forall |a\rangle \neq |0\rangle$ ,

$$\|\hat{A}\| \geq \frac{\|\hat{A}|a\rangle\|}{\|a\|} \quad \Rightarrow \quad \|\hat{A}\| \|a\| \geq \|\hat{A}|a\rangle\|.$$

Considerando l'azione dell'operatore  $\hat{A}$  sul vettore  $\hat{B}|a\rangle$ ,  $\forall |a\rangle$  tale che  $\hat{B}|a\rangle \neq |0\rangle$ ,

$$\|\hat{A}\hat{B}|a\rangle\| \leq \|\hat{A}\| \|\hat{A}|a\rangle\| \leq \|\hat{A}\| \|\hat{B}\| \|a\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\hat{A}\hat{B}|a\rangle\|}{\|a\|} \leq \|\hat{A}\| \|\hat{B}\|.$$

Infine, per la norma dell'operatore prodotto  $\hat{A}\hat{B}$  si ha

$$\|\hat{A}\hat{B}\| = \sup_{|a\rangle \neq |0\rangle} \left\{ \frac{\|\hat{A}\hat{B}|a\rangle\|}{\|a\|} \right\} \leq \|\hat{A}\| \|\hat{B}\|.$$

**Teorema sulla norma dell'aggiunto di un operatore limitato.** L'aggiunto di un operatore limitato,  $\hat{A} : E_N \rightarrow E_N$ , è limitato e si hanno le seguenti identità

$$\|\hat{A}\| = \|\hat{A}^\dagger\|, \quad \|\hat{A}\hat{A}^\dagger\| = \|\hat{A}^\dagger\hat{A}\| = \|\hat{A}\|^2.$$

**Dim.:**  $\forall |a\rangle, |b\rangle \in E_N$

$$|\langle a|\hat{A}^\dagger|b\rangle| = |\langle b|\hat{A}|a\rangle| \leq \|b\| \|\hat{A}|a\rangle\| \leq \|b\| \|\hat{A}\| \|a\|,$$

quindi, posto  $|b\rangle = \hat{A}^\dagger|a\rangle$ , si ha

$$\|\hat{A}^\dagger|a\rangle\|^2 = \langle a|\hat{A}\hat{A}^\dagger|a\rangle \leq \|\hat{A}^\dagger|a\rangle\| \|\hat{A}\| \|a\|,$$

dividendo ambo i membri per  $\|\hat{A}^\dagger|a\rangle\| (> 0)$  si ottiene

$$\|\hat{A}^\dagger|a\rangle\| \leq \|\hat{A}\| \|a\|.$$

Poiché la precedente vale  $\forall |a\rangle \in E_N$ , consideriamo l'estremo superiore, la variare di  $|a\rangle$ , con  $\|a\| = 1$ , si ha cioè

$$\sup_{\|a\|=1} [\|\hat{A}^\dagger|a\rangle\|] = \|\hat{A}^\dagger\| \leq \sup_{\|a\|=1} [\|\hat{A}\| \|a\|] = \|\hat{A}\| \implies \|\hat{A}^\dagger\| \leq \|\hat{A}\|.$$

Questo prova che la limitatezza di  $\hat{A}$  implica quella di  $\hat{A}^\dagger$ . Lo stesso argomento può essere usato per l'operatore  $\hat{A}^\dagger$ , avremmo quindi

$$\|(\hat{A}^\dagger)^\dagger\| \leq \|\hat{A}^\dagger\| \implies \|\hat{A}\| \leq \|\hat{A}^\dagger\| \implies \|\hat{A}\| = \|\hat{A}^\dagger\|.$$

Dal teorema precedente, infine, si ha, per due operatori limitati,  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$

$$\|\hat{A}^\dagger\hat{A}\| \leq \|\hat{A}^\dagger\| \|\hat{A}\| = \|\hat{A}\|^2,$$

inoltre

$$\|\hat{A}|a\rangle\|^2 = \langle a|\hat{A}^\dagger\hat{A}|a\rangle \leq \|\hat{A}^\dagger\hat{A}|a\rangle\| \|a\| \leq \|\hat{A}^\dagger\hat{A}\| \|a\|^2$$

e prendendo l'estremo superiore di questa relazione, con  $\|a\| = 1$ , si ha

$$\|\hat{A}\|^2 = \left[ \sup_{\|a\|=1} \|\hat{A}|a\rangle\| \right]^2 \leq \sup_{\|a\|=1} \|\hat{A}^\dagger\hat{A}\| \|a\|^2 = \|\hat{A}^\dagger\hat{A}\|.$$

In definitiva, le due disuguaglianze:  $\|\hat{A}\|^2 \geq \|\hat{A}^\dagger\hat{A}\|$  e  $\|\hat{A}^\dagger\|^2 \leq \|\hat{A}^\dagger\hat{A}\|$  implicano

$$\|\hat{A}\|^2 = \|\hat{A}^\dagger\hat{A}\|.$$

## 2.27 Gli operatori compatti

Gli operatori compatti rappresentano la naturale generalizzazione degli operatori definiti in spazi a dimensione finita. La compattezza permette di estendere ad operatori definiti in spazi infinito dimensionale molte delle proprietà dimostrate in un numero finito di dimensioni.

---

**Def.:** Uno spazio di Hilbert è **separabile** se e solo se ammette una base ortonormale costituita, al più, da una infinità numerabile di vettori.

---

In assenza di diverse specificazioni, nel prosieguo gli spazi vettoriali a dimensione infinita che utilizzeremo, tipicamente indicati con il simbolo  $E$ , saranno spazi di Hilbert separabili.

---

**Def.:** In uno spazio vettoriale  $E$  definito su un campo scalare  $S \subset \mathbb{C}$ , una successione  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$  si dice **debolmente convergente**  $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \langle b \rangle \in E^*$ , la successione numerica  $\{\langle b|a_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset S$  converge. Ovvero se e solo se,  $\{\langle b|a_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset S$  è una successione di Cauchy. La convergenza tradizionale si chiama anche **convergenza forte**. Si dimostra che la convergenza forte implica la debole, mentre non è vero il contrario.

---

In uno spazio metrico  $(E, \|\cdot\|)$ , sia data la successione  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  convergente a  $|x \rangle \in E$ , ovvero,  $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , tale che

$$\|x_k - x\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0(\varepsilon).$$

Consideriamo un generico  $\langle y | \in E^*$  e studiamo il prodotto  $\langle y|x_k - x \rangle$ . Usando la disuguaglianza di Schwarz, si ha che:  $\forall \langle y | \in E^*$ , ovviamente  $\|y\| < \infty$ ,

$$0 \leq |\langle y|x_k \rangle - \langle y|x \rangle| = |\langle y|x_k - x \rangle| \leq \|y\| \|x_k - x\| < \|y\| \varepsilon,$$

ovvero

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle y|x_k \rangle = \langle y|x \rangle,$$

quindi la successione numerica  $\{\langle b|x_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$  converge a  $\langle y|x \rangle$ . Ovvero la successione  $\{|x_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$  converge debolmente a  $|x \rangle$ .

Come contro esempio scegliamo la successione di vettori ortonormali  $\{|e_k \rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$  con  $\langle e_k|e_m \rangle = \delta_m^k, \forall k, m \in \mathbb{N}$ . Questa non è una successione di Cauchy, infatti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_{k+1} - e_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\|e_{k+1}\|^2 + \|e_k\|^2} = \sqrt{2},$$

quindi non converge. Un generico sottoinsieme  $\{|e_k \rangle\}_{k \in J_N} \subset \{|e_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$ , dove  $J_N \subset \mathbb{N}$  è un insieme di  $N$  numeri naturali distinti, genera un sotto-spazio  $E_N \subset E$  di dimensione  $N$ . Ne consegue che la proiezione,  $|x_{(J_N)} \rangle$ , di un generico vettore  $|x \rangle \in E$  nel sotto-spazio  $E_N$  si ottiene applicando l'operatore

$$\hat{I}_{J_N} = \sum_{k \in J_N} |e_k \rangle \langle e_k|$$

sul vettore  $|x \rangle$ , ovvero si ha

$$|x_{(J_N)} \rangle = \hat{I}_{J_N} |x \rangle = \sum_{k \in J_N} |e_k \rangle \langle e_k|x \rangle = \sum_{k \in J_N} x^k |e_k \rangle.$$

La norma di  $|x_{(J_N)}\rangle$  non può eccedere quella del vettore originale  $|x\rangle$ , quindi

$$0 \leq \|x_{(J_N)}\|^2 = \langle x_{(J_N)} | x_{(J_N)} \rangle = \sum_{k,m \in J_N} (x^k)^* x^m \langle e_k | e_m \rangle = \sum_{k \in J_N} |x^k|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

La disuguaglianza vale anche nel limite  $N \rightarrow \infty$ , quindi la serie dei moduli quadri delle componenti  $x^k = \langle e_k | x \rangle$  converge, cioè

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \in J_N} |x^k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x^k|^2 < \infty.$$

La convergenza della serie implica il limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x^k|^2 = 0,$$

che, a sua volta, è equivalente ai limiti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (x^k)^* = 0.$$

In definitiva si ha che le successioni delle componenti  $\{x^k = \langle e_k | x \rangle\}_{k=1}^{\infty}$  e delle componenti complesse coniugate  $\{(x^k)^* = \langle x | e_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$  sono successioni di Cauchy. In particolare, la seconda condizione, considerata l'arbitrarietà del vettore  $|x\rangle$ , rappresenta la definizione cercata di **convergenza debole della successione non convergente**  $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ .

---

**Def.:** Un operatore  $\hat{A}$  in uno spazio di Hilbert  $E$  si dice **compatto** se, per ogni successione **limitata**  $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ , la successione  $\{\hat{A}|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$  contiene una sotto-successione convergente.

---

**Esempio.** Data una generica coppia di vettori  $|a\rangle \in E$  e  $\langle b| \in E^*$ , dimostriamo che l'operatore  $\hat{A} = |a\rangle\langle b|$  è compatto. Sia  $\{|x_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$  una generica successione limitata, ovvero:  $\exists M \in (0, \infty)$ , tale che,  $\|x_k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$ . Da ciò segue che la successione complessa  $\{\langle b | x_k \rangle\}_{k=1}^{\infty}$  è anch'essa limitata, infatti

$$|\langle b | x_k \rangle| \leq \|x_k\| \|b\| \leq M \|b\|, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass (Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano; 5 ottobre 1781 - 18 dicembre 1848) - asserente che ogni successione limitata in  $\mathbb{R}^n$  e in particolare in  $\mathbb{C}$ , che è isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , ha una sotto-successione convergente - esiste una sotto-successione convergente  $\{\langle b | x_{q_k} \rangle\}_{k=1}^{\infty}$ , con  $\{q_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ , ovvero:  $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ , tale che

$$\langle b | x_{q_k} \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha.$$

Anche la corrispondente sotto-successione vettoriale  $\{\hat{A}|x_{q_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  converge, infatti

$$\hat{A}|x_{q_k}\rangle = \langle b | x_{q_k} \rangle |a\rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \alpha |a\rangle \in E.$$

L'operatore  $\hat{A}$  è quindi compatto.

---

**Teorema** L'insieme degli operatori compatti rappresenta uno spazio vettoriale.

---

**Teorema** Ogni operatore compatto è limitato. Detti  $\mathcal{L}(E)$  e  $\mathcal{C}(E)$  gli insiemi degli operatori limitati e compatti, rispettivamente, di  $E$  si ha  $\mathcal{C}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ , inoltre,  $\mathcal{C}(E) = \mathcal{L}(E) \iff E$  ha dimensione finita.

**Dim.:** Sia  $\hat{A}$  un operatore compatto e non limitato nello spazio vettoriale  $E$ . Esiste, quindi, una successione  $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ , tale che,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\|a_k\| = 1$ , e  $\|\hat{A}|a_k\rangle\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ . Infatti, essendo l'operatore non limitato, si ha

$$\|\hat{A}\| = \sup_{\|a\|=1} \{\|\hat{A}|a\rangle\|\} = \infty,$$

con i vettori  $|a\rangle$ , di norma unitaria, è quindi possibile costruire la successione richiesta. Non esiste, di conseguenza, una sotto-successione di  $\{\hat{A}|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  convergente, ovvero  $\hat{A}$  non è compatto, il che è assurdo. Ne consegue che **l'operatore è limitato**.

Dimostriamo che  $\mathcal{C}(E) = \mathcal{L}(E)$  se e solo se  $E$  ha dimensione finita.

Verifichiamo la condizione necessaria del secondo punto del teorema, ovvero:  $\mathcal{C}(E) = \mathcal{L}(E) \Rightarrow \dim(E) < \infty$ . A tal fine facciamo vedere che la condizione  $\dim(E) = \infty$  implica l'inclusione stretta  $\mathcal{C}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ , ovvero l'esistenza di almeno un operatore limitato non compatto in  $E$ . Ad esempio l'operatore identità  $I$  è, ovviamente, limitato, infatti  $\|I\| = 1$ , ciononostante, in uno spazio a dimensione infinita, non è compatto. Consideriamo la successione ortonormale  $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  che, come già dimostrato, è limitata e non convergente, in quanto non è una successione di Cauchy. Ogni sotto-successione di una successione ortonormale è ancora ortonormale e quindi limitata e non convergente. Ne consegue che **non esiste una sotto-successione**  $\{|u_{q_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  di  $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  tale che  $\{\hat{I}|u_{q_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty} = \{|u_{q_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  converga, ovvero **l'operatore identità  $\hat{I}$  è limitato ma non è compatto**.

Dimostriamo la condizione sufficiente, cioè l'implicazione  $\dim(E) < \infty \Rightarrow \mathcal{C}(E) = \mathcal{L}(E)$ . Poiché la compattezza implica sempre limitatezza, per verificare l'equivalenza è sufficiente dimostrare che la limitatezza dell'operatore implica la sua compattezza. Sia  $N = \dim(E) < \infty$ , e  $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^N$  una base ortonormale di  $E$ , allora, grazie alla relazione di completezza, si ha, per un generico operatore limitato  $\hat{A}$ ,

$$\hat{A} = \hat{A}I = \sum_{k=1}^N \hat{A}|e_k\rangle\langle e_k| \equiv \sum_{k=1}^N T_k,$$

ovvero l'operatore può essere scritto come la somma degli  $N$  operatori  $T_k = \hat{A}|e_k\rangle\langle e_k|$ . Ciascuno di essi ha la forma dell'operatore dell'esempio precedente, ovvero  $\hat{O} = |a\rangle\langle b|$ , con  $|a\rangle$  e  $\langle b|$  copia generica di vettori. La limitatezza dell'operatore  $\hat{A}$  è necessaria in quanto altrimenti la norma del vettore  $\hat{A}|e_k\rangle$  potrebbe essere divergente, in questo l'affermazione per la quale un operatore di tipo ket-bra sia sempre compatto sarebbe falsa (non potremmo applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass). Abbiamo dimostrato che tale operatore è compatto e lo saranno di conseguenza anche i  $T_k$ . Infine, poiché l'insieme degli operatori compatti forma uno spazio vettoriale, la combinazione lineare degli  $N$   $T_k$  che definisce  $\hat{A}$  è essa stessa un operatore compatto. La condizione di dimensione finita si usa proprio in questo passaggio. Se, infatti, la dimensione fosse stata infinita, in generale, non sarebbe stato possibile decomporre l'operatore come serie di operatori compatti.

**Teorema** Siano,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  due operatori lineari, con  $\hat{A}$  compatto e  $\hat{B}$  limitato, allora gli operatori prodotto  $\hat{A}\hat{B}$  e  $\hat{B}\hat{A}$  sono compatti.

**Dim.:** Consideriamo una successione limitata  $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ , esiste, allora, una sotto-successione

$\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ , tale che  $\{\hat{A}|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  sia convergente. Poiché  $\hat{B}$  è limitato e quindi continuo<sup>2</sup>, anche la successione  $\{\hat{B}\hat{A}|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  converge, ovvero  $\hat{B}\hat{A}$  è **compatto**.

La successione  $\{\hat{B}|x_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  è limitata in quanto l'operatore  $\hat{B}$  è esso stesso limitato. L'operatore  $\hat{A}$  è, inoltre, compatto e quindi è possibile estrarre dalla precedente una sotto-successione  $\{\hat{B}|x_{q_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ , tale che  $\{\hat{A}(\hat{B}|x_{q_k}\rangle)\}_{k=1}^{\infty}$  converga. Quindi anche  $\hat{A}\hat{B}$  è un operatore compatto.

**Teorema** Se  $\hat{A}$  è compatto lo è anche  $\hat{A}^\dagger$ .

**Dim.:** Sia  $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  una successione limitata, ovvero  $\exists M \in (0, \infty)$ , tale che,  $\|a_k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$ . Definiamo la successione  $\{|b_k\rangle = \hat{A}^\dagger|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ , tale successione è limitata essendo limitati, sia la successione  $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ , che l'operatore  $\hat{A}^\dagger$ . Per la compattezza di  $\hat{A}$ , esiste una sotto-successione convergente di  $\{\hat{A}|b_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ . Tale sotto-successione  $\{\hat{A}|b_{q_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  è una successione di Cauchy, cioè:  $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , tale che

$$\|\hat{A}|b_{q_m}\rangle - \hat{A}|b_{q_n}\rangle\| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq k_0(\varepsilon).$$

Nelle stesse condizioni, consideriamo

$$\begin{aligned} \||b_{q_m}\rangle - |b_{q_n}\rangle\|^2 &= \|\hat{A}^\dagger(|a_{q_m}\rangle - |a_{q_n}\rangle)\|^2 \\ &= \langle a_{q_m} - a_{q_n} | \hat{A} \hat{A}^\dagger | a_{q_m} - a_{q_n} \rangle \\ &= \langle a_{q_m} - a_{q_n} | \hat{A} | b_{q_m} - b_{q_n} \rangle \\ &\leq \|a_{q_m} - a_{q_n}\| \|\hat{A}|b_{q_m}\rangle - \hat{A}|b_{q_n}\rangle\| \\ &< (\|a_{q_m}\| + \|a_{q_n}\|) \varepsilon \\ &\leq 2M \varepsilon. \end{aligned}$$

Anche la successione  $\{|b_{q_k}\rangle\}_{k=1}^{\infty}$  è una successione di Cauchy ed è, quindi, convergente. Ciò dimostra che anche l'operatore  $\hat{A}^\dagger$  è compatto.

<sup>2</sup>La limitatezza implica la continuità, infatti, dire che  $\hat{B}$  è limitato significa dire che:  $\exists K \in (0, \infty)$ , tale che

$$\|\hat{B}|x\rangle\| \leq K \|x\|, \quad \forall |x\rangle \in E.$$

Scelta allora la successione  $\{|x_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ , con  $|x_k\rangle \rightarrow |x\rangle$  per  $k \rightarrow \infty$ , si ha:  $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , tale che

$$\|x_k - x\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0(\varepsilon).$$

Ma si ha anche che:

$$0 \leq \|\hat{B}|x_k\rangle - \hat{B}|x\rangle\| \leq K \|x_k - x\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{B}|x_k\rangle = \hat{B}|x\rangle,$$

l'operatore  $\hat{B}$  è continuo.