Metodi Matematici per la Fisica

Secondo appello estivo - 9 luglio 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$
\text{ㄉ}_m = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{2m}(x)}{\cosh(x)} dx \,,
$$

$\forall\, m \in \mathbb{N}$.

Curiosità. Il simbolo ㄉ è equivalente alla lettera "d" del cosiddetto alfabeto *bopomofo*, che è stato concepito e utilizzato a partire dal 1910 nella Repubblica Popolare Cinese per fini didattico-pedagogici. Permette di traslitterare alcune lingue cinesi tra cui il cinese standard. È composto da 37 caratteri e 5 segni tonali, che permettono la trascrizione di tutti i suoni del mandarino.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è meromorfa e non ha singolarità lungo il percorso d'integrazione. Usiamo l'espressione di Eulero per la potenza $2m$-esima della funzione seno a numeratore e si ha

$$
\text{ㄉ}_m = \frac{1}{(2i)^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx = \frac{1}{(-4)^m} \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} T_{j,m} \,,
$$

con

$$
T_{j,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx \,, \qquad \forall\, j \in \{0,1,\ldots,2m\}\,, \ \ \forall\, m \in \mathbb{N}\,.
$$

Questi integrali si calcolano usando il percorso a rettangolo,

$$
\Gamma_R = [-R,R] \cup \{z : z = R + iy, y \in [0,\pi]\} \cup \{z : z = -x + i\pi, x \in [-R,R]\} \cup \{z : z = -R - iy, y \in [0,\pi]\} \,,
$$

orientato in verso positivo, cioè antiorario. Consideriamo le espressioni degli integrali in termini del teorema dei residui

$$
\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)}, z = i\pi/2\right]
$$

e scomponendo il percorso nei tratti rettilinei

$$
\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)} dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx + i \int_0^{\pi} \frac{e^{2i(R+iy)(j-m)}}{\cosh(R+iy)} dy - \int_{-R}^{R} \frac{e^{2i(x+i\pi)(j-m)}}{-\cosh(x)} dx - i \int_0^{\pi} \frac{e^{2i(-R+iy)(j-m)}}{\cosh(-R+iy)} dy \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx + i e^{2iR(j-m)} \int_0^{\pi} \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(R+iy)} dy + e^{-2\pi(j-m)} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx \\
&\quad - i e^{-2iR(j-m)} \int_0^{\pi} \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(-R+iy)} dy \,.
\end{aligned}
$$

Nel limite $R \to \infty$ la prima espressione non cambia e si ha

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)}, z = i\pi/2\right] = 2\pi\, e^{\pi(m-j)} ,$$

mentre la seconda diventa

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz(j-m)}}{\cosh(z)} dz &= \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx}_{=T_{j,m}} + ie^{2iR(j-m)} \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(R+iy)} dy}_{=0} \\
&\quad + e^{-2\pi(j-m)} \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix(j-m)}}{\cosh(x)} dx}_{=T_{j,m}} - ie^{-2iR(j-m)} \underbrace{\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(-R+iy)} dy}_{=0} \\
&= \left(1 + e^{-2\pi(j-m)}\right) T_{j,m} = 2e^{\pi(m-j)} \cosh(\pi(m-j))\, T_{j,m} , \qquad \forall\, j \in \{0,1,\ldots,2m\} , \quad \forall\, m \in \mathbb{N} .
\end{aligned}$$

Verifichiamo che i limiti per $R \to \infty$ degli integrali sui tratti verticali siano nulli, usando la disuguaglianza di Darboux, $\forall\, j \in \{0,1,\ldots,2m\}$, si ha

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{e^{-2y(j-m)}}{\cosh(\pm R+iy)} dy \right| \le 2 \int_0^{\pi} \frac{e^{-2y(j-m)}}{\left|e^{\pm R+iy} + e^{\mp R-iy}\right|} dy \le \begin{cases} \dfrac{e^{-2\pi(j-m)}}{\left|e^{\pm R} - e^{\mp R}\right| (m-j)} \underset{R\to\infty}{\sim} \dfrac{e^{-2\pi(j-m)}}{m-j} e^{-R} & j \ne m \\[2ex] \dfrac{\pi}{\left|e^{\pm R} - e^{\mp R}\right|} \underset{R\to\infty}{\sim} \pi e^{-R} & j = m \end{cases} .$$

In entrambi i casi, $j \ne m$ e $j = m$, al divergere di R gli integrali si annullano.
Uguagliando le due espressioni, in termini del residuo e dei contributi sui tratti rettilinei per il limite dell'integrale su Γ_R, otteniamo i valori degli integrali

$$T_{j,m} = \frac{\pi}{\cosh(\pi(m-j))} \qquad \forall\, j \in \{0,1,\ldots,2m\} , \quad \forall\, m \in \mathbb{N} .$$

Usiamo questa espressione in

$$\text{ㄉ}_m = \frac{1}{(-4)^m} \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \binom{2m}{j} T_{j,m} , \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

e abbiamo il risultato finale

$$\text{ㄉ}_m = \frac{1}{(-4)^m} \pi \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} \frac{(-1)^j}{\cosh(\pi(m-j))} , \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} .$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottengano tutte le serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^{10}} ,$$

con centro in $z = 1$.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione $f(z)$ è meromorfa, ha la sola singolarità polare di ordine 10 nell'origine. Le serie di Laurent centrate in $z = 1$ sono quindi due e hanno come domini di convergenza il disco e l corona circolare

$$C_1 = \{z : |z-1| < 1\} , \qquad C_2 = \{z : |z-1| > 1\} .$$

Per la serie convergente in C_1, consideriamo la riscrittura

$$f(z) = \frac{1}{(1+z-1)^{10}} ,$$

che, con la condizione $|z-1|<1$, è proporzionale alla derivata nona della serie geometrica di ragione $\alpha=-(z-1)$. Infatti si, per $|\alpha|<1$, si ha

$$\frac{1}{1+\alpha}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\alpha^j\,,$$

quindi per la decima potenza,

$$\frac{1}{(1+\alpha)^{10}}=-\frac{1}{9!}\frac{d^9}{d\alpha^9}\frac{1}{1+\alpha}=\frac{1}{9!}\sum_{j=9}^{\infty}(-1)^{j+1}j(j-1)\cdots(j-8)\alpha^{j-9}\,.$$

Ne consegue

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(1+z-1)^{10}}=\frac{1}{9!}\sum_{j=9}^{\infty}(-1)^{j+1}j(j-1)\cdots(j-8)(z-1)^{j-9}=\{k=j-9\}\\&=\frac{1}{9!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+9)(k+8)\cdots(k+1)(z-1)^k\,.\end{aligned}$$

Quindi, considerando la forma generale

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(z-1)^k\,,$$

i coefficienti sono dati da

$$C_k=\begin{cases}0 & k<0\\ (-1)^k\binom{k+9}{k} & k\geq 0\end{cases}\,.$$

È interessante notare che, poiché nel punto $z=1$ la funzione $f(z)$ è analitica, la serie ottenuta ha solo la parte regolare, cioè i coefficienti con indici negativi sono nulli.
La serie di Laurent che converge nella corona C_2, in cui si ha $|z-1|>1$, si ottiene come

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{(z-1)^{10}\,(1+1/(z-1))^{10}}=\frac{1}{(z-1)^{10}9!}\sum_{j=9}^{\infty}(-1)^{j+1}j(j-1)\cdots(j-8)(z-1)^{-j+9}\\&=\sum_{j=9}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{j!}{9!(j-7)!}(z-1)^{-j-1}=\sum_{j=9}^{\infty}(-1)^{j+1}\binom{j}{9}(z-1)^{-j-1}=\{k=-j-1\}\\&=\sum_{k=-\infty}^{-10}(-1)^k\binom{-k-1}{9}(z-1)^k\,.\end{aligned}$$

Anche in questo caso, scrivendo la forma generale

$$f(z)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}D_l(z-1)^l\,,$$

per i coefficienti di Laurent si ha la legge multipla

$$D_l=\begin{cases}(-1)^l\binom{-k-1}{9} & l\leq -10\\ 0 & k>-10\end{cases}\,.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{ㄖ}_\beta=\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^\beta(\alpha)d\alpha$$

con $\operatorname{Re}(\beta)>-1$.

Curiosità. Il simbolo ㄖ rappresenta la lettera "r" dell'alfabeto bopomofo descritto nel primo problema.

Soluzione del terzo problema

Facciamo il cambiamento di variabile $t = \cos^2(\alpha)$, da cui: $dt = -2\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha)$, alla luce del quale riscriviamo la funzione integranda come

$$
\begin{aligned}
\square_\beta &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^\beta(\alpha) d\alpha = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^{\beta-1}(\alpha)\cos^{-1}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha) d\alpha \\
&= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\left(1-\cos^2(\alpha)\right)^{\beta/2-1/2}}_{=(1-t)^{\beta/2-1/2}} \underbrace{\cos^{-1}(\alpha)}_{=t^{-1/2}} \underbrace{\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha) d\alpha}_{=-dt/2},
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\square_\beta = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\beta/2-1/2} t^{-1/2} dt\,.
$$

Usando la rappresentazione in forma di integrale della funzione beta di Eulero e considerandone la relazione con la funzione gamma

$$
\beta(u,z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{u-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)}\,, \qquad \mathrm{Re}(z),\, \mathrm{Re}(u) > 0\,,
$$

si ha

$$
\square_\beta = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{\beta/2+1/2-1} t^{1/2-1} dt = \frac{1}{2}\beta(\beta/2+1/2, 1/2)\,,
$$

dove si sono usate $z = 1/2$ e $u = \beta/2 + 1/2$ e le condizioni di convergenza sono verificate, infatti

$$
\mathrm{Re}(z) = 1/2 > 0\,, \qquad \mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(\beta)/2 + 1/2 > 0 \;\Leftarrow\; \mathrm{Re}(\beta) > -1\,.
$$

In termini delle funzioni gamma si ha

$$
\square_\beta = \frac{\Gamma(\beta/2+1/2)\Gamma(1/2)}{2\Gamma(\beta/2+1)}\,,
$$

usando infine: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(\beta/2+1) = (\beta/2)\Gamma(\beta/2)$, si arriva al risultato

$$
\square_\beta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta/2+1/2)}{\beta\,\Gamma(\beta/2)}\,.
$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che: $\nexists\,(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, tale che l'operatore

$$
\hat{S} = \sum_{j=1}^{3} \eta_j \hat{\sigma}_j\,,
$$

dove $\left\{\hat{\sigma}_j\right\}_{j=1}^3$ è l'insieme degli operatori di Pauli agenti nello spazio vettoriale bidimensionale E_2, sia un proiettore. Se ne calcoli la norma.

Soluzione del quarto problema

Poiché gli operatori di Pauli sono hermitiani, scegliendo un vettore reale $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$, si ha che l'operatore $\hat{S} = \vec{\eta} \cdot \vec{\hat{\sigma}}$ è hermitiano. Verifichiamo l'idempotenza, calcoliamo il quadrato dell'operatore

$$
\hat{S}^2 = \sum_{j,k=1}^{3} \eta_j \eta_k \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \sum_{j,k=1}^{3} \eta_j \eta_k \left(\hat{I}\delta_{jk} + 2i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m\right) = \hat{I}\sum_{j=1}^{3} \eta_j^2\,.
$$

Questo operatore, $\forall\,\vec{\eta} \neq (0,0,0)$, è diverso diverso dall'operatore $\hat{S}$, poiché non esiste una combinazione degli operatori di Pauli coincidente con l'operatore identità.
Consideriamo il quadrato della norma dell'operatore

$$\left\|\hat{S}\right\|^2 = \left(\sup_{\|x\|=1}\left\{\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|\right\}\right)^2 = \sup_{\|x\|=1}\left\{\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|^2\right\},$$

con

$$\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|^2 = \langle x|\hat{S}^\dagger\hat{S}|x\rangle = \sum_{j,k=1}^{3}\eta_j^*\eta_k\langle x|\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k|x\rangle\,,$$

usando le relazioni dell'algebra degli operatori di Pauli e la condizione $\|x\| = 1$,

$$\begin{aligned}\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|^2 &= \sum_{j,k=1}^{3}\eta_j^*\eta_k\langle x|\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k|x\rangle\,, = \sum_{j,k=1}^{3}\eta_j^*\eta_k\langle x|\left(\hat{I}\delta_{jk} + i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m\right)|x\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{3}\left|\eta_j\right|^2 + i\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{jkm}\eta_j^*\eta_k\langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle\,.\end{aligned}$$

La norma al quadrato è reale, quindi

$$\begin{aligned}\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{3}\left|\eta_j\right|^2 + \mathrm{Re}\left(i\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{jkm}\eta_j^*\eta_k\langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle\right) = \sum_{j=1}^{3}\left|\eta_j\right|^2 - \mathrm{Im}\left(\sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{jkm}\eta_j^*\eta_k\langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle\right)\\ &= \sum_{j=1}^{3}\left|\eta_j\right|^2 - \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{jkm}\,\mathrm{Im}\left(\eta_j^*\eta_k\right)\langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la realtà del valore di aspettazione $\langle x|\hat{\sigma}_m|x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall\, m \in \{1,2,3\}$, conseguenza dell'hermitianità degli operatori di Pauli. Per calcolare i valori di aspettazione usiamo la rappresentazione matriciale rispetto alla base degli autovettori del terzo autovettore, quindi

$$\begin{aligned}\langle x|\hat{\sigma}_1|x\rangle &= \left(x^{1*}\,x^{2*}\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix} = x^{1*}x^2 + x^{2*}x^1 = 2\,\mathrm{Re}\left(x^{1*}x^2\right),\\ \langle x|\hat{\sigma}_2|x\rangle &= \left(x^{1*}\,x^{2*}\right)\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix} = -ix^{1*}x^2 + ix^{2*}x^1 = 2\,\mathrm{Im}\left(x^{1*}x^2\right),\\ \langle x|\hat{\sigma}_3|x\rangle &= \left(x^{1*}\,x^{2*}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ x^2\end{pmatrix} = \left|x^1\right|^2 - \left|x^2\right|^2,\end{aligned}$$

dove x^1 e x^2 sono le componenti contro-varianti del vettore $|x\rangle$ rispetto alla base degli autovettori del terzo operatore di Pauli. Inoltre, avendo $\mathrm{Im}\left(\eta_j^*\eta_k\right) = -\mathrm{Im}\left(\eta_k^*\eta_j\right)$, $\forall\, j,k \in \{1,2,3\}$, la norma al quadrato può essere scritta come

$$\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|^2 = \sum_{j=1}^{3}\left|\eta_j\right|^2 - 2\,\mathrm{Im}\left(\eta_1^*\eta_2\right)\left(\left|x^1\right|^2 - \left|x^2\right|^2\right) - 4\,\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\mathrm{Re}\left(x^{1*}x^2\right) - 4\,\mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\mathrm{Im}\left(x^{1*}x^2\right).$$

Scegliamo le componenti $x^1 = \mathrm{sen}(\theta)e^{i\phi}$ e $x^2 = \cos(\theta)$ da cui

$$\begin{aligned}\left|x^1\right|^2 - \left|x^2\right| &= \mathrm{sen}^2(\theta) - \cos^2(\theta) = -\cos(2\theta)\,,\\ \mathrm{Re}\left(x^{1*}x^2\right) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{sen}(\theta)e^{-i\phi}\cos(\theta)\right) = \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi) = \frac{\mathrm{sen}(2\theta)\cos(\phi)}{2}\,,\\ \mathrm{Im}\left(x^{1*}x^2\right) &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{sen}(\theta)e^{-i\phi}\cos(\theta)\right) = \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\cos(\phi) = -\frac{\mathrm{sen}(2\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)}{2}\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|^2 = \sum_{j=1}^{3}\left|\eta_j\right|^2 + 2\,\mathrm{Im}\left(\eta_1^*\eta_2\right)\cos(2\theta) - 2\,\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\mathrm{sen}(2\theta)\cos(\phi) + 2\,\mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\mathrm{sen}(2\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)\,.$$

Massimizziamo questa quantità rispetto agli angoli θ e ϕ, si hanno le componenti del gradiente

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|^2 = -4\,\mathrm{Im}\left(\eta_1^*\eta_2\right)\mathrm{sen}(2\theta) - 4\cos(2\theta)\left(\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\cos(\phi) - \mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\mathrm{sen}(\phi)\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left\|\hat{S}|x\rangle\right\|^2 = 2\,\mathrm{sen}(2\theta)\left(\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\mathrm{sen}(\phi) + \mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\cos(\phi)\right),$$

si azzerano in $(\theta_1, \phi_{1,k})$, tali che

$$\mathrm{sen}(2\theta_1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_1 = 0\,,$$
$$\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\cos(\phi_1) - \mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\mathrm{sen}(\phi_1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{1,k} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)}{\mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)}\right) + k\pi\,,$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
Inoltre, si azzerano in $(\theta_{2,k}, \phi_{2,k})$, tali che

$$\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\mathrm{sen}(\phi_2) + \mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\cos(\phi_2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{2,k} = \arctan\left(\frac{-\mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)}{\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)}\right) + k\pi\,,$$
$$\mathrm{Im}\left(\eta_1^*\eta_2\right)\mathrm{sen}(2\theta_2) + \cos(2\theta_2)\left(\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\cos(\phi_2) - \mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\mathrm{sen}(\phi_2)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \qquad \theta_{2,k} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\mathrm{sen}(\phi_2) - \mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\cos(\phi_2)}{\mathrm{Im}(\eta_1^*\eta_2)}\right) + k\pi$$

con $k \in \mathbb{Z}$.
In definitiva, posto

$$R(\theta,\phi) = 2\,\mathrm{Im}\left(\eta_1^*\eta_2\right)\cos(2\theta) - 2\,\mathrm{sen}(2\theta)\left(\mathrm{Im}\left(\eta_2^*\eta_3\right)\cos(\phi) - 2\,\mathrm{Im}\left(\eta_3^*\eta_1\right)\mathrm{sen}(\phi)\right)$$

ovvero

$$R(\theta,\phi) = \left\|\hat{S}|x\rangle\right\| - \sum_{j=1}^{3}\left|\eta_j\right|^2,$$

si ha

$$\left\|\hat{S}\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left|\eta_j\right|^2 + \max_{k,l,m\in\mathbb{Z}}\left\{R(\theta_1,\phi_{1,k}), R(\theta_{2,l},\phi_{2,m}),\right\}}\,.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$ㄌ(x) = \delta'\left(x^2-1\right).$$

Curiosità. Il simbolo ㄌ rappresenta la lettera “l” dell’alfabeto bopomofo descritto nel primo problema.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Calcoliamo direttamente la trasformata di Fourier integrando per parti

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[ㄌ\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'\left(x^2-1\right)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\delta\left(x^2-1\right)\frac{e^{-ikx}}{2x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2-1\right)\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{ik}{x}\right)e^{-ikx}dx\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2-1\right)\left(\frac{1}{x}+ik\right)\frac{e^{-ikx}}{x}dx\,.
\end{aligned}$$

Usiamo la proprietà descritta dalla relazione formale

$$\delta\left(x^2-1\right)=\frac{\delta\,(x-1)}{|2x|_{x=1}}+\frac{\delta\,(x+1)}{|2x|_{x=-1}}=\frac{\delta(x-1)+\delta(x+1)}{2}\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[\text{力}\right]&=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\delta(x-1)+\delta(x+1))\left(\frac{1}{x}+ik\right)\frac{e^{-ikx}}{x}dx\\&=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left[-(-1+ik)\,e^{ik}+(1+ik)\,e^{-ik}\right]=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left[e^{ik}+e^{ik}+ik\left(e^{-ik}-e^{ik}\right)\right],\end{aligned}$$

usando le formule di Eulero per le funzioni seno e coseno, si ottiene

$$\mathscr{F}_k\left[\text{力}\right]=\frac{\cos(k)+k\,\mathrm{sen}(k)}{2\sqrt{2\pi}}\,.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si ottenga l'operatore risolvente dell'operatore di proiezione $\hat{P}$.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

L'operatore risolvente $\hat{P}_\lambda$ del proiettore $\hat{P}$ è definito come

$$\hat{P}_\lambda=\left(\hat{I}\lambda-\hat{P}\right)^{-1}$$

e dipende dal parametro scalare complesso λ, cioè $\lambda\in\mathbb{C}$. Assumendo le condizioni di convergenza, l'operatore risolvente è rappresentato da una serie geometrica operatoriale. In particolare, con la condizione sul parametro

$$\frac{\|\hat{P}\|}{|\lambda|}<1\qquad\Rightarrow\qquad|\lambda|>\|\hat{P}\|=1\,,$$

si ha

$$\hat{P}_\lambda=\lambda^{-1}\left(\hat{I}-\hat{P}\lambda^{-1}\right)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k-1}\,.$$

Infatti, moltiplicando la serie per l'operatore $\left(\hat{I}\lambda-\hat{P}\right)$ da sinistra e da destra si hanno

$$\begin{aligned}\left(\hat{I}\lambda-\hat{P}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k-1}&=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^{k+1}\lambda^{-k-1}\\&=\hat{I}+\hat{P}\lambda^{-1}+\hat{P}^2\lambda^{-2}+\ldots-\left(\hat{P}\lambda^{-1}+\hat{P}^2\lambda^{-2}+\hat{P}^3\lambda^{-3}+\ldots\right)=\hat{I}\,,\\\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k-1}\left(\hat{I}\lambda-\hat{P}\right)&=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^{k+1}\lambda^{-k-1}\\&=\hat{I}+\hat{P}\lambda^{-1}+\hat{P}^2\lambda^{-2}+\ldots-\left(\hat{P}\lambda^{-1}+\hat{P}^2\lambda^{-2}+\hat{P}^3\lambda^{-3}+\ldots\right)=\hat{I}\,,\end{aligned}$$

da cui si evince che l'operatore $\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k-1}$ è l'inverso dell'operatore $\left(\hat{I}\lambda-\hat{P}\right)$ e quindi è l'operatore risolvete $\hat{P}_\lambda$. La somma della serie operatoriale può calcolata usando l'idempotenza del proiettore, infatti

$$\hat{P}_\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k-1}=\frac{1}{\lambda}\left(\hat{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\hat{P}^k\lambda^{-k}\right)=\{k'=k-1\}=\frac{1}{\lambda}\left(\hat{I}+\frac{\hat{P}}{\lambda}\sum_{k'=0}^{\infty}\lambda^{-k'}\right)=\frac{1}{\lambda}\left(\hat{I}+\frac{\hat{P}}{\lambda}\frac{1}{1-1/\lambda}\right),$$

in definitiva

$$\hat{P}_\lambda=\frac{1}{\lambda}\left(\hat{I}+\frac{\lambda}{1-\lambda}\hat{P}\right).$$