Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 9 dicembre 2014

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)

Si calcoli l'integrale

$$P = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{Im}(z)}{2z^2 - 2z + 1}\, dz\,,$$

dove il percorso di integrazione è la circonferenza unitaria orientata in senso antiorario.

Soluzione 1

La funzione a numeratore dell'integranda **non è** analitica, non si può applicare "direttamente" il teorema di Cauchy e quindi quello dei residui. Sulla circonferenza unitaria si ha $z = e^{i\theta}$, quindi z^* coincide con l'inverso di z, cioè: $z^* = e^{-i\theta} = 1/z$ e la parte immaginaria è

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Ne consegue che l'integrale può essere scritto come

$$P = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{Im}(z)}{2z^2 - 2z + 1}\, dz = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z}{2z^2 - 2z + 1}\, dz - \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z(2z^2 - 2z + 1)}\, dz\,.$$

Le funzioni a numeratore dei due integrali sono ora analitiche e i poli, tutti semplici, delle integrande

$$z_0 = 0\,, \qquad z_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}\,,$$

sono tutti interni alla circonferenza unitaria, infatti

$$|z_0| = 0 < 1\,, \qquad |z_{1,2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1\,.$$

In particolare, la prima integranda ha i due poli $z_{1,2}$, mentre la seconda li ha tutti e tre, z_0 e $z_{1,2}$. Ne consegue che l'integrale coincide con la somma dei residui, ovvero

$$\begin{aligned} P &= 2i\pi\left(\sum_{j=1,2} \mathrm{Res}\left[\frac{z}{2i(2z^2 - 2z + 1)}, z_j\right] - \sum_{j=0,1,2} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{2iz(2z^2 - 2z + 1)}, z_j\right]\right) \\ &= \pi\left(\frac{z_1}{2(z_1 - z_2)} + \frac{z_2}{2(z_2 - z_1)} - \frac{1}{2z_1 z_2} - \frac{1}{2z_1(z_1 - z_2)} - \frac{1}{2z_2(z_2 - z_1)}\right) = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2 (6 punti)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$T = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x - e^{-2x}}\,.$$

Soluzione 2

Riscriviamo il denominatore come prodotto tra un seno iperbolico e l'esponenziale $e^{-x/2}$, ovvero si ha

$$T = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{2\,\mathrm{senh}(3x/2)}dx\,.$$

In questo modo appare evidente come l'integranda abbia infiniti poli semplici lungo l'asse immaginario nei punti $z_k = 2ik\pi/3$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Quindi il valore principale si riferisce all'unico di tali poli appartenente anche all'asse reale, cioè $z_0 = 0$.
Al fine di calcolare l'integrale definiamo il percorso d'integrazione Γ_R come mostrato in fig. 1. Si tratta di un rettangolo, con base sull'asse reale da $x = -R$ ad $x = R$ ed altezza pari a $2\pi/3$. Sia sulla base inferiore che su quella superiore ci sono due archi infinitesimi di raggio ϵ, γ_0 e γ_1, che aggirano da sopra e da sotto, in senso orario, i poli $z_0 = 0$ e $z_1 = 2i\pi/3$. Il percorso Γ_R non contiene singolarità dell'integranda.

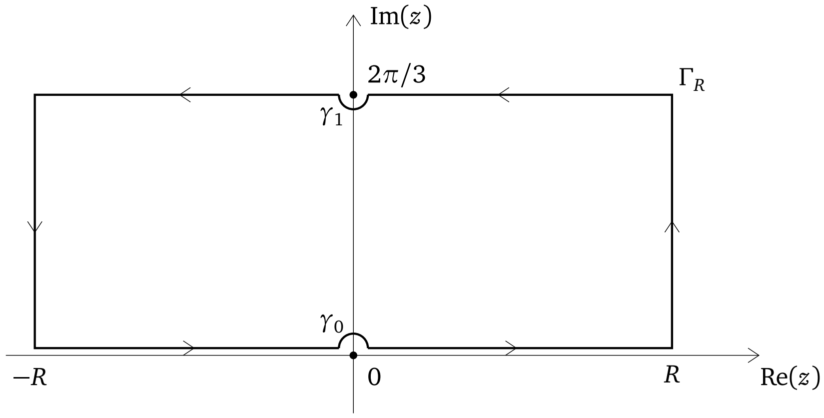

Figure 1: Percorso di integrazione dell'esercizio numero 2.

L'integrale su tale percorso non dipende nè da R nè da ϵ e per il teorema di Cauchy è nullo, ovvero

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{z/2}}{2\,\mathrm{senh}(3z/2)}\,dz = 0\,.$$

Nei limiti $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ si ha inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{R,1/\epsilon\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{z/2}}{2\,\mathrm{senh}(3z/2)}\,dz &= \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{2\,\mathrm{senh}(3x/2)}\,dx + e^{i\pi/3}\mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{2\,\mathrm{senh}(3x/2)}\,dx \\
&\quad + \int_{\gamma_0} \frac{e^{z/2}}{2\,\mathrm{senh}(3z/2)}\,dz + \int_{\gamma_1} \frac{e^{z/2}}{2\,\mathrm{senh}(3z/2)}\,dz \\
&= \left(1+e^{i\pi/3}\right)T - i\pi \lim_{z\to 0} \frac{e^{z/2}}{2\,\mathrm{senh}(3z/2)} z - i\pi \lim_{z\to 2i\pi/3} \frac{e^{z/2}}{2\,\mathrm{senh}(3z/2)}(z-2i\pi/3) \\
&= \left(1+e^{i\pi/3}\right)T - \frac{i\pi}{3}\left(1-e^{i\pi/3}\right)\,,
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che i contributi sui tratti verticali si annullano nel limite $R \to \infty$. In definitiva, considerando i due risultati

$$0 \;=\; \left(1+e^{i\pi/3}\right)T - \frac{i\pi}{3}\left(1-e^{i\pi/3}\right)\,,$$

si ha da cui il risultato finale

$$T = \frac{i\pi}{3}\,\frac{1-e^{i\pi/3}}{1+e^{i\pi/3}} = \frac{i\pi}{3}\,\frac{-i\,\mathrm{sen}(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

Esercizio 3 (5 punti)

Si determinino i primi dieci coefficienti della parte principale, ovvero C_{-10}, C_{-9}, $\ldots$, C_{-1}, dello sviluppo di Laurent in $z=0$ della funzione

$$f(z) = \mathrm{sen}\left[\mathrm{sen}(1/z^2)\right],$$

e si dimostri che

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = 0\,.$$

Soluzione 3

Le singolarità in $z=0$ è essenziale. I coefficienti si calcolano sfruttando la serie di Taylor della funzione seno in $z=0$, ovvero

$$\mathrm{sen}(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)\,.$$

Per la funzione completa $f(z)$ si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathrm{sen}(z^{-2}) - \frac{\mathrm{sen}^3(z^{-2})}{3!} + \frac{\mathrm{sen}^5(z^{-2})}{5!} + O(z^{-14}) \\ &= \left(z^{-2} - \frac{z^{-6}}{3!} + \frac{z^{-10}}{5!} + O(z^{-14})\right) - \frac{1}{3!}\left(z^{-2} - \frac{z^{-6}}{3!} + \frac{z^{-10}}{5!} + O(z^{-14})\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!}\left(z^{-2} - \frac{z^{-6}}{3!} + \frac{z^{-10}}{5!} + O(z^{-14})\right)^5 + O(z^{-14}) \\ &= z^{-2} + z^{-6}\left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + z^{-10}\left(\frac{1}{5!} + 3\frac{1}{3!}\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right) + O(z^{-14}) \\ &= z^{-2} - \frac{z^{-6}}{3} + \frac{z^{-10}}{10} + O(z^{-14}) = \sum_{k=-\infty}^{-2} C_k z^k\,, \end{aligned}$$

con

$$C_{-10} = \frac{1}{10}\,, \qquad C_{-6} = -\frac{1}{3}\,, \qquad C_{-2} = 1\,, \qquad C_{-9} = C_{-8} = C_{-7} = C_{-5} = C_{-4} = C_{-3} = C_{-1} = 0\,.$$

Il fatto che la parte principale dello sviluppo di Laurent in $z=0$ contenga infiniti termini conferma che l'origine rappresenta un singolrità essenziale per la funzione $f(z)$. Infine è facile osservare che l'integrale

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz\,,$$

è nullo in quanto proporzionale al residuo della funzione nell'origine e quindi al primo coefficiente della parte principale della serie di Laurent, che abbiamo dimostrato essere nullo.

Esercizio 4 (6 punti)

Si determini, usando il metodo della serie di Neumann, la soluzione dell'equazione matriciale

$$f - \frac{1}{2} B f + \phi = 0$$

dove l'incognita f e il termine noto ϕ sono vettori colonna 3×1 ad elementi complessi e B è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si consideri la norma euclidea.

Soluzione 4

La matrice è limitata in quanto l'operatore da essa rappresentato è limitato. In particolare, dalla definizione di norma di un operatore, si ha

$$||\hat{B}|| = \sup_{|||b\rangle||=1} \{||\hat{B}\,|b\rangle||\} = \sup_{|||b\rangle||=1} \left\{\sqrt{\langle b|\hat{B}^\dagger B\,|b\rangle}\right\} = \sqrt{\sup_{|||b\rangle||=1} \{\langle b|\hat{B}^\dagger B\,|b\rangle\}} = \sqrt{\sup_{||b||=1} \{b^\dagger B^\dagger B\, b\}} ,$$

nell'ultimo termine sia per i vettori che per gli operatori abbiamo usato le rappresentazioni matriciali. Scegliendo dei vettori normalizzati ad uno, ovvero

$$b = \frac{1}{\sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} ,$$

si ha

$$||\hat{B}|| = \sqrt{\sup_{||b||=1} \{b^\dagger B^\dagger B\, b\}} = \sup_{||b||=1} \frac{\sqrt{2|b_1|^2 + |b_2|^2 + 2|b_3|^2}}{\sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2}} = \sqrt{2} .$$

La soluzione dell'equazione si ottiene come serie di Neumann, ovvero, tenendo conto dei segni,

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} B\right)^k (-\phi) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} B^k \phi .$$

Diagonalizziamo la matrice B al fine di calcolarne le potenze. Gli autovalori, β, si ottengono dall'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \det(B - I\beta) \ &= \ \det \begin{pmatrix} 1-\beta & 0 & 1 \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ -1 & 0 & 1-\beta \end{pmatrix} = (1-\beta)^3 + (1-\beta) \\ &= \ (1-\beta)\left[(1-\beta)^2 + 1\right] = 0 \end{aligned}$$

e sono

$$\beta_1 = 1 \qquad \beta_{2,3} = 1 \pm i .$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_{2,3} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ \pm i/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione diagonale di B è

$$B_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che la forma diagonale della somma della serie di Neumann è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} B_d^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2^k & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+i}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1-i}{2}\right)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1/2-i/2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1/2+i/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Le tre serie geometriche sulla diagonale possono essere sommate in quanto hanno ragioni con moduli minori dell'unità. Infine, per ricavare la rappresentazione canonica si usa la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k B^k &= U \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k B_d^k \right) U^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La soluzione si ottiene applicando la matrice così ottenuta al vettore termine noto ϕ, che assumiamo di componenti ϕ_j, con $j = 1, 2, 3$, quindi

$$f = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k B^k \phi = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi_1 - \phi_3 \\ -2\phi_2 \\ \phi_1 - \phi_3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5 (6 punti)

Sia $\hat{G}$ l'operatore integrale definito sulle funzioni della classe $L^2(\mathbb{R})$ come

$$\hat{G} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{1 - i(x - x')} \, dx'.$$

Si stabilisca se $\hat{G}$ è limitato e si trovino autofunzioni e autovalori.

$\left[\text{Qualora fosse necessaria, la trasformata di Fourier della teta di Heaviside è: } \mathscr{F}_k\left[\theta(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(x)\,.\right]$

Soluzione 5

La norma di $\hat{G}$ si ottiene come

$$||\hat{G}|| = \sup_{||f||=1}\left\{||\hat{G}f||\right\}.$$

La funzione $\hat{G}f(x)$ può essere interpretata come il prodotto di convoluzione di $f(x)$ e $g(x) = 1/(1-ix)$ e quindi la trasformata di Fourier è

$$\mathscr{F}_k\left[\hat{G}f(x)\right] = \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(k),$$

dove $\tilde{f}(k)$ e $\tilde{g}(k)$ sono le trasformate di Fourier delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$. In particolare

$$\tilde{g}(k) = \mathscr{F}_k\left[\frac{1}{1-ix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{1-ix}dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{i+x}dx = \sqrt{2\pi}\,\theta(k)\,e^{-k}.$$

Per dimostrare la limitatezza dell'operatore $\hat{G}$ si può sfruttare l'equazione di Parseval che permette di calcolarne norma di $\hat{G}f$ in termini di quella della trasformata di Fourier. In dettaglio si ha

$$\begin{aligned}
||\hat{G}f||^2 = \left|\left|\mathscr{F}_k\left[\hat{G}f\right]\right|\right|^2 &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)\right|^2 dk \\
&= (2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(k)\right|^2\,\theta(k)e^{-2k}dk \\
&\leq (2\pi)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{f}(k)\right|^2 dk = (2\pi)^2\left|\left|\tilde{f}\right|\right|^2 = (2\pi)^2\left|\left|f\right|\right|^2,
\end{aligned}$$

da cui

$$||\hat{G}|| = \sup_{||f||=1}\left\{||\hat{G}f||\right\} \leq 2\pi$$

e quindi l'operatore è limitato.
Consideriamo l'equazione agli autovalori

$$\hat{G}f(x) = \lambda f(x),$$

ne facciamo la trasformata di Fourier

$$\sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(k) = \lambda\,\tilde{f}(k),$$

e, usando

$$\tilde{g}(k) = \sqrt{2\pi}\,\theta(k)\,e^{-k},$$

si l'equazione agli autovalori nello "spazio k"

$$\tilde{f}(k)\left[2\pi\,\theta(k)\,e^{-k} - \lambda\right] = 0.$$

È facile vedere che per $\lambda \neq 0$ non ci sono autofunzioni, ovvero l'unica soluzione è $\tilde{f}(k)$ identicamente nulla, se invece $\lambda = 0$, allora ci sono infinite soluzioni, ovvero tulle le funzioni

$$\tilde{f}_0(k) = \theta(-k)\tilde{h}(k),$$

con $\tilde{h}(k)$ funzione arbitraria di $L^2(\mathbb{R})$. Infine, avendo che

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\theta(-k)\right] = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\delta(x),$$

la funzione $f_0(x)$, autofunzione nello spazio x, può essere ottenuta come la convoluzione delle antitrasformate della $\theta(-k)$ e della $h(x)$, antitrasformata della $\tilde{h}(k)$, cioè

$$\begin{aligned} f_0(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{f}_0(k)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_{-x}\left[\theta(-k)\right] * \mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{h}(k)\right] = -\frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + i\pi\,\delta(x)\right) * h(x) \\ &= -\frac{i}{2\pi}\left(\mathrm{PV}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(x')}{x-x'}dx' + i\pi\,h(x)\right) = -\frac{i}{2\pi}\left(-\mathrm{PV}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(x')}{x'-x}dx' + i\pi\,h(x)\right) \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(x')}{x'-x+i\epsilon}dx', \end{aligned}$$

dove si è utilizzata la formula di Sokhotski-Plemelj, assumendo che la funzione $h(x)$ sia continua sull'asse reale.

Esercizio 6 (6 punti)

Si risolva l'equazione integrale

$$f(x) = \alpha\int_{-1}^{1}\frac{x/|x| + y/|y|}{(1+|x|)(1+|y|)}f(y)\,dy.$$

Soluzione 6

L'equazione è omogenea ed ha il nucleo separabile, infatti possiamo scrivere

$$\frac{x/|x| + y/|y|}{(1+|x|)(1+|y|)} = \sum_{j=1}^{2} M_j(x)N_j(y),$$

con

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \frac{x/|x|}{1+|x|}, & N_1(x) &= \frac{1}{1+|x|}, \\ M_2(x) &= \frac{1}{1+|x|}, & N_2(x) &= \frac{x/|x|}{1+|x|}. \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione integrale per $N_m(x)$ e integrando in dx sull'intervallo $(-1,1)$ si ha

$$\sum_{j=1}^{2}\underbrace{\int_{-1}^{1}dx\,N_m(x)M_j(x)}_{A_{mj}}\underbrace{\int_{-1}^{1}dy\,N_j(y)f(y)}_{a_j} = \frac{1}{\alpha}\underbrace{\int_{-1}^{1}dx\,N_m(x)f(x)}_{a_m}.$$

Si ottiene quindi l'equazione matriciale

$$Aa = \frac{1}{\alpha}a,$$

dove A è una matrice (nota) 2×2 ed a un vettore colonna (incognito) 1×2. Si tratta di un'equazione agli autovalori per la matrice A, che ha elementi

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \int_{-1}^{1} N_1(x)M_1(x)\,dx = 0 & \qquad A_{12} &= \int_{-1}^{1} N_1(x)M_2(x)\,dx = 1 \\
A_{21} &= \int_{-1}^{1} N_2(x)M_1(x)\,dx = 1 & \qquad A_{22} &= \int_{-1}^{1} N_2(x)M_2(x)\,dx = 0
\end{aligned}
.
$$

Gli autovalori si determinano risolvendo l'equazione caratteristica

$$
\begin{aligned}
\det(A - I/\alpha) &= 0 \\
\alpha^{-2} - 1 &= 0\,,
\end{aligned}
$$

da cui: $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -1$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$
a_{(1)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad a_{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}
$$

e le autofunzioni hanno al forma

$$
f_j(x) \;=\; \alpha_j \sum_{m=1}^{2} M_m(x) a_{(j)m}\,, \qquad j = 1, 2\,,
$$

in particolare

$$
f_1(x) = \frac{x/|x| + 1}{\sqrt{2}(1 + |x|)}\,, \qquad f_2(x) = \frac{x/|x| - 1}{\sqrt{2}(1 + |x|)}\,.
$$