# Metodi Matematici per la Fisica

## Prova scritta - 8 settembre 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

## Esercizio 1 (punteggio: 6/30)

Dopo aver stabilito per quali valori reali di $a$ converge, si calcoli l'integrale

$$S(a) = \int_0^\infty \frac{x}{x^a + 1} dx \,.$$

**Suggerimento**. Si usi la sostituzione $x = e^z$.

## Soluzione 1

La funzione integranda non ha singolarità all'interno dell'intervallo di integrazione, sull'estremo inferione si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^a + 1} = 0 \,, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R} \,.$$

Il comportamento per $x \to \infty$ è

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \begin{cases} x & a < 0 \\ x^{1-a} & a > 0 \end{cases} \,,$$

nel primo caso l'integrale diverge, mentre nel secondo si ha convergenza se $1 - a < -1$, quindi per $a > 2$.
Con la sostituzione $x = e^z$, ovvero

$$z = \ln(x) \,, \qquad dx = e^z dz \,,$$

l'integrale diventa

$$S(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2z}}{e^{az} + 1} dz \,.$$

L'integranda ha poli semplici nel piano complesso nei punti $z_k$, tali che

$$e^{az_k} + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z_k = \frac{(2k+1)i\pi}{a} \,, \qquad k \in \mathbb{Z} \,.$$

Consideriamo il percorso chiuso rettangolare

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup [R, R + 2i\pi/a] \cup [-R + 2i\pi/a, R + i\pi/(2a)] \cup [-R + 2i\pi/a, -R] \,,$$

l'integrale su tale percorso è

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2z}}{e^{az} + 1} dz = 2i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{2z}}{e^{az} + 1}, z = i\pi/a\right] \,,$$

infatti $\Gamma_R$ contiene la sola singolarità $z_0 = i\pi/a$. Separando i quattro contributi rettilinei si ha

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2z}}{e^{az} + 1} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{2x}}{e^{ax} + 1} dx + i \int_0^{2\pi/a} \frac{e^{2R+2iy}}{e^{a(R+iy)} + 1} dy + i \int_{2\pi/a}^{0} \frac{e^{-2R+2iy}}{e^{a(-R+iy)} + 1} dy + \int_R^{-R} \frac{e^{2x+4i\pi/a}}{e^{ax} + 1} dx \,.$$

Nel limite $R \to \infty$, i contributi sui tatti verticali sono infinitesimi, infatti

$$0 \le \left| \pm i \int_0^{2\pi/a} \frac{e^{\pm 2R + 2iy}}{e^{a(\pm R + iy)} + 1} dy \right| \le \frac{e^{\pm 2R}}{\left| e^{\pm aR} - 1 \right|} \frac{2\pi}{a} \underset{R\to\infty}{\sim} \frac{2\pi}{a} \begin{cases} e^{-R(a-2)} & \text{with sign "+"} \\ e^{-R} & \text{with sign "-"} \end{cases} .$$

I contributi rimanenti sono proporzionali all'integrale cercato e si ha

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2z}}{e^{az}+1} dz = \left(1 - e^{4i\pi/a}\right) S(a) = 2i\pi \operatorname{Res}\left[ \frac{e^{2z}}{e^{az}+1}, z = i\pi/a \right] ,$$

ovvero

$$S(a) = \frac{2i\pi \operatorname{Res}\left[ \frac{e^{2z}}{e^{az}+1}, z = i\pi/a \right]}{1 - e^{4i\pi/a}} .$$

Il residuo è

$$\operatorname{Res}\left[ \frac{e^{2z}}{e^{az}+1}, z = i\pi/a \right] = -\frac{e^{2i\pi/a}}{a} ,$$

quindi

$$S(a) = -\frac{2i\pi\, e^{2i\pi/a}/a}{1 - e^{4i\pi/a}} = \frac{\pi}{a \operatorname{sen}(2\pi/a)} .$$

## Esercizio 2 (punteggio 5/30)

La funzione meromorfa $f(z)$ ha al finito un'unica singolarità nell'origine e verifica la relazione di simmetria

$$f(z) = f(1/z) ,$$

si dimostri allora che per i coefficienti, $C_k$ ($k \in \mathbb{Z}$), dello sviluppo di Laurent in $z = 0$, si ha la relazione

$$C_k = C_{-k} , \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z} .$$

Si calcoli lo sviluppo di Laurent in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \left( z - \frac{1}{z} \right)^4 ,$$

verificando quanto dimostrato.

## Soluzione 2

I coefficienti della serie di Laurent centrata nell'origine sono

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz ,$$

dove $\gamma_0$ è una circonferenza centrata nell'origine di raggio arbitrario $0 < r < \infty$. Con la sostituzione $w = 1/z$ si ha

$$C_k = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{-\gamma_0'} \frac{f(1/w)}{w^{-k-1}} \frac{dw}{w^2} ,$$

dove ora $-\gamma_0'$ è una circonferenza centrata nell'origine di raggio $1/r$ e percorsa in senso orario, quindi, usando la relazione $f(1/w) = f(w)$, si ottiene l'indentità richiesta

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_0'} \frac{f(w)}{w^{-k+1}} dw = C_{-k} \,.$$

Lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \left( z - \frac{1}{z} \right)^4 ,$$

che verifica la condizione $f(1/z) = f(z)$, si ottiene semplicemente svolgendo l'elevamento a potenza, cioè

$$f(z) = \left( z - \frac{1}{z} \right)^4 = \frac{1}{z^4} - \frac{4}{z^2} + 6 - 4z^2 + z^4 ,$$

da cui i coefficienti

$$\begin{aligned}
C_k &= 0 , \qquad |k| > 4 ; \\
C_{\pm 4} &= 1 ; \\
C_{\pm 3} &= 0 ; \\
C_{\pm 2} &= -4 ; \\
C_{\pm 1} &= 0 ; \\
C_{\pm 0} &= 6 .
\end{aligned}$$

## Esercizio 3 (punteggio 5/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(e^{z\pi} + 1)\cos(z\pi)} .$$

## Soluzione 3

La funzione è meromorfa ed ha solo poli semplici nei punti

$$\begin{aligned}
z_k &= (2k+1)i , \qquad k \in \mathbb{Z} , \\
p_j &= (2j+1)/2 , \qquad j \in \mathbb{Z} ,
\end{aligned}$$

che rappresentano rispettivamente gli zeri del primo e del secondo fattore a denominatore, ovvero

$$\begin{aligned}
e^{z_k\pi} + 1 &= 0 , \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z} , \\
\cos(p_j\pi) &= 0 , \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z} .
\end{aligned}$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler ha quindi la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{Z_k}{z - z_k} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{P_j}{z - p_j} ,$$

dove $g(z)$ rappresenta la parte intera di $f(z)$. I valori $Z_k$, residui dei poli $z_k$, sono

$$Z_k = \frac{1}{\pi(-1)\cos(z_k\pi)} = -\frac{1}{\pi \cosh[(2k+1)\pi]} .$$

I valori $P_j$, residui dei poli $p_j$, sono invece

$$P_j = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_j} \frac{dz}{(e^{z\pi}+1)\cos(z\pi)}\,, \qquad j \in \mathbb{Z}\,,$$

$\gamma_j$ è una circonferenza centrata in $z = p_j$ e raggio $\epsilon < 1$. Si ha

$$P_j = \lim_{z\to p_j} \frac{z - p_j}{(e^{z\pi}+1)\cos(z\pi)} = \frac{1}{e^{p_j\pi}+1}\,\frac{(-1)^j}{-\pi} = \frac{(-1)^{j+1}}{\pi\,(e^{p_j\pi}+1)}$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler diventa

$$\begin{aligned}
f(z) &= g(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh[(2k+1)\pi][z-(2k+1)i]} - \frac{1}{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\left(e^{(2j+1)\pi/2}+1\right)[z-(2j+1)/2]}\\
&= g(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh[(2k+1)\pi][z-(2k+1)i]} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh[-(2k+1)\pi][z+(2k+1)i]}\\
&\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\left(e^{(2j+1)\pi/2}+1\right)[z-(2j+1)/2]}\\
&= g(z) - \frac{2z}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh[(2k+1)\pi]\,[z^2+(2k+1)^2]} - \frac{1}{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\left(e^{(2j+1)\pi/2}+1\right)[z-(2j+1)/2]}\,.
\end{aligned}$$

La funzione $g(z)$ è una costante in quanto asitoticamente, $z\to\infty$, la $f(z)$ non diverge, quindi $G(z) = g_0$. Possiamo trovarne $g_0$ considerando il valore $f(0) = 1/2$. In particolare si ha

$$g_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\left(e^{(2j+1)\pi/2}+1\right)(2j+1)/2}\,.$$

In definitiva

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{2z}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh[(2k+1)\pi]\,[z^2+(2k+1)^2]} - \frac{1}{\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{e^{(2j+1)\pi/2}+1}\left(\frac{1}{z-(2j+1)/2}+\frac{1}{(2j+1)/2}\right)\,.$$

## Esercizio 4 (punteggio 5/30)

Si dimostri che le quattro matrici

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

rappresentano una base dello spazio di Hilbert delle matrici $2\times 2$ ad elementi reali, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, in cui è definito il prodotto scalare

$$(A,B) = \mathrm{Tr}\left(A^T B\right)\,, \qquad \forall\, A,B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\,.$$

Con il metodo Gram-Schmidt si ottenga la corrispondente base ortonormale.

## Soluzione 4

Per dimostrare che $\{X_k\}_{k=1}^4$ è una base dimostriamo che le matrici sono linearmente indipendenti, ad esempio mostrando che l'unica combinazione lineare che dà il vettore nullo è quella banale. Infatti

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{4} x_k X_k = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & 2(x_2 + x_3 + x_4) \\ 3(x_3 + x_4) & 4x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0\,.$$

Il metodo di Gram-Schmidt si ottiene in primo luogo la base ortogonale $\{Y_k\}_{k=1}^4$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
Y_2 &= X_2 - \frac{(Y_1, X_2)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
Y_3 &= X_3 - \frac{(Y_1, X_3)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 - \frac{(Y_2, X_3)}{(Y_2, Y_2)} Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \\
Y_4 &= X_4 - \frac{(Y_1, X_4)}{(Y_1, Y_1)} Y_1 - \frac{(Y_2, X_4)}{(Y_2, Y_2)} Y_2 - \frac{(Y_3, X_4)}{(Y_3, Y_3)} Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La base ortonormale $\{Z_k\}_{k=1}^4$ si ottiene normalizzando come $Z_k = Y_k / \sqrt{(Y_k, Y_k)}$, quindi

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Z_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Esercizio 5 (punteggio 6/30)

Dopo aver classificato la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -3 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

si determinino autovalori e autovettori e ne si calcoli la norma, considerandola come un operatore agente nello spazio di Hilbert $\mathbb{C}^3$. Infine, si determini anche la norma "vettoriale" di $A$, considerandola, questa volta, come un vettore dello spazio di Hilbert delle matrici $3 \times 3$ ad elementi complessi in cui, per ogni coppia di matrici $W_1$ e $W_2$, è definito il prodotto scalare $(W_1, W_1) = \mathrm{Tr}\left(W_1^\dagger W_2\right)$.
Che relazione c'è tra le due norme di $A$?

## Soluzione 5

La matrice $A$ è hermitiana, gli autovalori si ottengono come

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & i \\ 0 & -3-\alpha & 0 \\ -i & 0 & 3-\alpha \end{pmatrix} = -(1-\alpha)(3+\alpha)(3-\alpha) + 3 + \alpha = (3+\alpha)(-\alpha^2 + 4\alpha - 2)$$

e sono

$$\alpha_1 = -3\,, \qquad \alpha_2 = 2 - \sqrt{2}\,, \qquad \alpha_3 = 2 + \sqrt{2}\,.$$

Gli autovettori corrispondenti

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

La norma di $A$ è il massimo modulo degli autovalori, cioè

$$||A|| = \max_{k=1,2,3} \{|\alpha_k|\} = |\alpha_3| = 2+\sqrt{2}.$$

Considerando $A$ come elemento dello spazio di Hilbert delle matrici $3 \times 3$ ad elementi complessi

$$||A|| = \sqrt{(A,A)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^\dagger A)} = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^2)} = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2} = \sqrt{21}.$$

## Esercizio 6 (punteggio 6/30)

Si trasformi l'equazione differenziale

$$u''(x) - \alpha^2 u(x) - \beta \frac{e^{-|x|}}{x} u(x) = 0,$$

con $\alpha, \beta > 0$ e $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$, nell'equazione integrale

$$u(x) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') \frac{e^{-|x'|}}{x'} u(x') dx'$$

e si determini $G(x-x')$ usando il metodo della funzione di Green.
**Suggerimento.** Si usi l'operatore differenziale $\hat{O}_x = \frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2$.

## Soluzione 6

L'equazione differenziale può essere posta nella forma

$$\hat{O}_x u(x) = \beta \frac{e^{-|x|}}{x} u(x).$$

dove $\hat{O}_x$ è l'operatore differenziale

$$\hat{O}_x = \frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2.$$

La funzione $G$ è definita dalla relazione

$$\hat{O}_x G(x-x') = \delta(x-x'),$$

infatti, facendo agire l'operatore $\hat{O}_x$ su

$$\beta \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') \frac{e^{-|x'|}}{x'} u(x') dx',$$

si ha

$$\begin{aligned} \hat{O}_x \beta \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') \frac{e^{-|x'|}}{x'} u(x') dx' &= \beta \int_{-\infty}^{\infty} \hat{O}_x G(x-x') \frac{e^{-|x'|}}{x'} u(x') dx' \\ &= \beta \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') \frac{e^{-|x'|}}{x'} u(x') dx' \\ &= \beta \frac{e^{-|x|}}{x} u(x), \end{aligned}$$

che, confrontato con l'equazione differenziale scritta in forma operatoriale, equivale all'identità

$$u(x) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} G(x-x') \frac{e^{-|x'|}}{x'} u(x') dx' .$$

La forma esplicita della funzione $G$ può essere ottenuta risolvendo l'equazione

$$\hat{O}_x G(x-x') = \delta(x-x')$$

con il metodo della trasformata di Fourier, ovvero facendo la trasformata di Fourier di ambo i membri si ha

$$\left(-k^2 - \alpha^2\right) \tilde{G}(k) = \frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{G}(k) = \frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-k^2-\alpha^2} ,$$

dove $\tilde{G}(k)$ indica la trasformata di Fourier della funzione $G$. Ne consegue che, facendo l'antitrasformata, si ha l'espressione completa

$$G(x-x') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2+\alpha^2} dk = -\frac{1}{2\alpha} \left[ \theta(x-x') e^{-\alpha(x-x')} + \theta(x'-x) e^{\alpha(x-x')} \right] .$$

Possiamo verificare che la funzione $G$ così ottenuta soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x) - \alpha^2 G(x) = \delta(x) .$$

La derivata prima è

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} G(x) &= -\frac{1}{2\alpha} \frac{d}{dx} \left[ \theta(x) e^{-\alpha x} + \theta(-x) e^{\alpha x} \right] \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \left[ \delta(x) e^{-\alpha x} - \alpha\theta(x) e^{-\alpha x} - \delta(x) e^{\alpha x} + \alpha\theta(-x) e^{\alpha x} \right] , \end{aligned}$$

dove si è usata la relazione $\theta'(x) = \delta(x)$. Sfruttando la simmetria della funzione delta, $\delta(x) = \delta(-x)$, e l'identità formale $\delta(x) f(x) = \delta(x) f(0)$, si ottiene

$$\frac{d}{dx} G(x) = \frac{1}{2} \left[ \theta(x) e^{-\alpha x} - \theta(-x) e^{\alpha x} \right] .$$

La deriva seconda

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} G(x) &= \frac{1}{2} \left[ \delta(x) e^{-\alpha x} - \alpha\theta(x) e^{-\alpha x} + \delta(x) e^{\alpha x} - \alpha\theta(-x) e^{\alpha x} \right] \\ &= \delta(x) \cosh(\alpha x) - \frac{\alpha}{2} \left[ \theta(x) e^{-\alpha x} + \theta(-x) e^{\alpha x} \right] \\ &= \delta(x) + \alpha^2 G(x) . \end{aligned}$$

Quindi, l'equazione differenziale è verificata, infatti

$$\hat{O}_x G(x) = \frac{d^2}{dx^2} G(x) - \alpha^2 G(x) = \delta(x) + \alpha^2 G(x) - \alpha^2 G(x) = \delta(x) .$$