Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 8 settembre 2011

Esercizio 1 (4 punti)
Si calcoli l'integrale

$$I = \int_1^\infty \ln^2(x-1)\frac{x+1}{(x^3+1)}dx\,.$$

. . . .

I poli del parte razionale sono

$$x_k = e^{i\pi(1+2k)/3}\,, \qquad k = 0,1,2\,,$$

da cui

$$x^3+1 = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (x+1)(x-e^{i\pi/3})(x-e^{5i\pi/3})\,.$$

L'integrale è quindi uguale a

$$I = \int_1^\infty \frac{\ln^2(x-1)}{(x^2-x+1)}dx\,,$$

e, con la sostituzione: $y = x-1$ si ha

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln^2(y)}{(y^2+y+1)}dx\,.$$

I poli nella variabile y saranno:

$$y_{0,2} = x_{0,2} - 1 = \left\{\begin{array}{l} e^{i\pi/3} - 1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2 - 1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = e^{2i\pi/3} \\ e^{5i\pi/3} - 1 = 1/2 - i\sqrt{3}/2 - 1 = -1/2 - i\sqrt{3}/2 = e^{4i\pi/3} \end{array}\right. .$$

A questo punto si usa la formula nota

$$\int_0^\infty R(y)\ln^2(y)dy = -\frac{1}{3}\sum_{\text{tot}} \text{Res}\Big\{R(y)\big[\pi^2\ln(y) + (\ln(y)-i\pi)^3\big]\Big\}\,,$$

dove la parte razionale è

$$R(y) = \frac{1}{y^2+y+1}\,.$$

La soluzione sarà

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{y_0-y_2}\big[\pi^2\ln(y_0) + (\ln(y_0)-i\pi)^3\big] + \frac{1}{y_2-y_0}\big[\pi^2\ln(y_2) + (\ln(y_2)-i\pi)^3\big]\right\} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{i\sqrt{3}}\left\{\left[\pi^2\frac{2i\pi}{3} + \left(\frac{2i\pi}{3} - i\pi\right)^3\right] - \left[\pi^2\frac{4i\pi}{3} + \left(\frac{4i\pi}{3} - i\pi\right)^3\right]\right\} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{\pi^3}{i\sqrt{3}}\left[-\frac{2i}{3} + \left(-\frac{i}{3}\right)^3 - \left(\frac{i}{3}\right)^3\right] = -\frac{1}{3}\frac{\pi^3}{i\sqrt{3}}\left[-\frac{2i}{3} + \frac{2i}{27}\right] = \frac{16\pi^3}{81\sqrt{3}} \end{aligned} \qquad (1)$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Sapendo che la parte immaginaria di una funzione $F(s)$, analitica nel piano complesso s con un taglio (s_0, ∞), soddisfa la relazione

$$\mathrm{Im}F(s) = \mathrm{Im}\left[\frac{\theta(s-s_0)}{M^2 - s - i\Gamma M}\right],$$

dove s_0, M e Γ sono costanti reali e postive con: $M^2 > s_0$, se ne calcoli la parte reale in un punto qualsiasi t del taglio, cioè: t reale e $t > s_0$.

. . . .

Si usano la relazione di dispersione per la parte reale, ovvero

$$\mathrm{Re}F(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Pr}\!\int_{s_0}^{\infty} \frac{\Gamma M}{[(M^2-s)^2 + \Gamma^2 M^2](s-t)} ds\,, \tag{2}$$

dove il polo è $s = t$. Manipoliamo l'integrale come

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}F(t) &= \frac{\Gamma M}{\pi}\left[\mathrm{Pr}\!\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds}{(M^2-s-i\Gamma M)(s-t)} - \mathrm{Pr}\!\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds}{(M^2-s+i\Gamma M)(s-t)}\right]\frac{1}{2i\Gamma M}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\left(\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds}{M^2-s-i\Gamma M} + \mathrm{Pr}\!\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds}{s-t}\right)\frac{1}{M^2-t-i\Gamma M}\right.\\
&\qquad\left. - \left(\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds}{M^2-s+i\Gamma M} + \mathrm{Pr}\!\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds}{s-t}\right)\frac{1}{M^2-t+i\Gamma M}\right]\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{M^2-t}{(M^2-t)^2+\Gamma^2M^2}\,\ln\left(\frac{M^2-s+i\Gamma M}{M^2-s-i\Gamma M}\right)\Big|_{s_0}^{\infty}\\
&\qquad + \frac{1}{2\pi i}\frac{i\Gamma M}{(M^2-t)^2+\Gamma^2M^2}\left\{\ln\left[\frac{(s-t)^2}{(M^2-s)^2+\Gamma^2M^2}\right]\Big|_{s_0}^{\infty} + 2\ln(s-t)\big|_{t+\epsilon}^{t-\epsilon}\right\}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{M^2-t}{(M^2-t)^2+\Gamma^2M^2}\left[-\ln\left(\frac{M^2-s_0+i\Gamma M}{M^2-s_0-i\Gamma M}\right)\right]\\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma M}{(M^2-t)^2+\Gamma^2M^2}\left\{-\ln\left[\frac{s_0-t}{\sqrt{(M^2-s_0)^2+\Gamma^2M^2}}\right] + \ln(-1)\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{M^2-t}{(M^2-t)^2+\Gamma^2M^2}\left[-\mathrm{atan}\left(\frac{\Gamma M}{M^2-s_0}\right)\right]\\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma M}{(M^2-t)^2+\Gamma^2M^2}\left\{-\ln\left[\frac{s_0-t}{\sqrt{(M^2-s_0)^2+\Gamma^2M^2}}\right] + \ln(-1)\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{(M^2-t)^2+\Gamma^2M^2}\left[(t-M^2)\,\mathrm{atan}\left(\frac{\Gamma M}{M^2-s_0}\right) - \Gamma M\ln\left(\frac{t-s_0}{\sqrt{(M^2-s_0)^2+\Gamma^2M^2}}\right)\right]
\end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (4 punti)

Si considerino le funzioni complesse

$$\phi_n(z) = N_n \, z^n \qquad n = 0, 1, 2, \dots \, ,$$

dove N_n è una costante di normalizzazione.

- Provare che il sistema $\{\phi_n\}$ è ortogonale nello spazio delle funzioni continue definite in $c = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (circhio unitario) rispetto al prodotto

$$(f, g) = \oint_c f^*(z) \, g(z) \, \frac{dz}{i \, z} \, .$$

- Calcolare il valore di N_n affinché si abbia un sistema ortonormale e determinare i coefficienti di Fourier della funzione $F(z) = \ln(z)$.

. . . .

Per dimostrare l'ortononalità si calcola

$$(\phi_m, \phi_n) = N_m^* N_n \oint_c (z^m)^* z^n \frac{dz}{i \, z} = N_m^* N_n \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} \frac{i e^{i\theta} d\theta}{i e^{i\theta}} = N_m^* N_n \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta$$
$$= \begin{cases} 2\pi \, |N_n|^2 & \text{se } n = m \\ \\ N_m^* N_n \dfrac{e^{i\theta(n-m)} - 1}{i(n-m)} = 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} .$$

Sono ortogonali, per normalizzare basta porre

$$2\pi \, |N_n|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad N_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, .$$

Infine, i coefficienti di Fourier della $F(z)$ saranno

$$f_n = (\phi_n, F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_c (z^n)^* \ln(z) \frac{dz}{i \, z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} i\theta d\theta \, , \tag{3}$$

nel caso $n = 0$ si ha semplicememte

$$f_0 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{4\pi^2}{2} = \frac{(2\pi)^{3/2} i}{2} \, .$$

Se invece $n \geq 1$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{e^{-in\theta}\theta}{n} \bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta \right] = -\frac{\sqrt{2\pi}}{n} \, .$$

. . . .

Esercizio 4 (4 punti)
Calcolare i primi tre coefficienti della serie di Laurent intorno a $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 \sinh z}\,.$$

. . . .

In generale il coefficiente k-esimo è data da:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\,, \tag{4}$$

poiché il seno iperbolico nell'intorno di $z = 0$ si comporta come z il polo sarà di ordine 4 e il primo coefficiente è

$$\begin{aligned} c_{-4} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{-3}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^{-3}z^3\sinh z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\sinh z}dz \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sinh z} = 1\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Il successivo:

$$\begin{aligned} c_{-3} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{-2}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^{-2}z^3\sinh z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z\sinh z}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z\sinh z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,\frac{z}{\sinh z}dz\,, \end{aligned} \tag{6}$$

essendo ora $z/\sinh z$ regolare in $z = 0$ e avendo

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z')dz'}{(z'-z)^{n+1}}\,,$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} c_{-3} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,\frac{z}{\sinh z}dz = \frac{d}{dz}\frac{z}{\sinh z}\bigg|_{z=0} \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\sinh z - z\cosh z}{\sinh^2 z} = \lim_{z\to 0}\frac{\cosh z - \cosh z - z\sinh z}{2\sinh z\cosh z} \\ &= -\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\cosh z} = 0\,. \end{aligned}$$

Infine, il terzo

$$\begin{aligned} c_{-2} = &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{-1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^2\sinh z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^3}\,\frac{z}{\sinh z}dz \\ &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\frac{z}{\sinh z}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2z\cosh^2 z - 2\sinh z\cosh z - z\sinh^2 z}{\sinh^3 z} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2\cosh^2 z + 4z\sinh z\cosh z - 2\cosh^2 z - 2\sinh^2 z - \sinh^2 z - 2z\sinh z\cosh z}{3\sinh^2 z\cosh z} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2z\sinh z\cosh z - 3\sinh^2 z}{3\sinh^2 z\cosh z} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2z\cosh z - 3\sinh z}{3\sinh z\cosh z} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2\cosh z + 2z\sinh z - 3\cosh z}{3\sinh^2 z + 3\cosh^2 z} = -\frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

determinare

- autovalori e autovettori corrispondenti;
- la matrice D che diagonalizza A.

. . . .

L'equazione secolare è

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 4) = 0\,,$$

da cui

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 3 - \sqrt{5} \\ \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = 3 + \sqrt{5} \end{array}.$$

Il primo autovettore è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (3-\sqrt{5}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a + c = (3-\sqrt{5})a \\ 5b = (3-\sqrt{5})b \\ a + 5c = (3-\sqrt{5})c \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Il secondo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a + c = 5a \\ 5b = 5b \\ a + 5c = 5c \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il terzo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (3+\sqrt{5}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a + c = (3+\sqrt{5})a \\ 5b = (3+\sqrt{5})b \\ a + 5c = (3+\sqrt{5})c \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_3 = N_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

La matrice D che diagonalizza avrà come colonne i tre autovettori

$$D = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} & 0 & \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \end{pmatrix} .$$

Il suo determinate è

$$\det D = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} & 0 & \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \end{pmatrix} = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10^2-4^2\,5}} - \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{10^2-4^2\,5}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = 1 .$$

Infine, l'unitarietà:

$$\begin{aligned} D^\dagger D &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} & 0 & \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} & 0 & \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{10-4\sqrt{5}}} & 0 & \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+(2-\sqrt{5})^2}{10-4\sqrt{5}} & 0 & \frac{1+2^2-5}{10^2-4^2 5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1+2^2-5}{10^2-4^2 5} & 0 & \frac{1+(2+\sqrt{5})^2}{10+4\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Si consideri un circuito con una resistenza R e una capacità C. L'equazione di tale circuito in termini della corrente, funzione del tempo, $I(t)$, è

$$R\,I(t) + \frac{Q(t)}{C} = f(t) ,$$

dove $f(t) = f_0\, e^{-|t|}$ rappresenta la forza elettromotrice e $Q(t)$ è la carica del condensatore

$$Q(t) = Q_0 + \int_0^t I(t')dt' .$$

Si risolva il problema, ovvero si trovi l'espressione analitica $I = I(t)$, usando il metodo della trasformata di Fourier.

. . . .

La trasformata di Fourier della forza elettromotrice è

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0\, e^{-|t|} e^{-ikt} dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{f_0}{1+k^2} . \end{aligned}$$

L'equazione in $Q(t)$, avendo: $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$, diventa

$$R\,\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{Q(t)}{C} = f(t)\,,$$

e la trasformata

$$\left[i\,R\,k + \frac{1}{C}\right]\hat{Q}(k) = \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{f_0}{1+k^2}\,.$$

La soluzione, per $t > 0$, sarà

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikt}dk}{(i\,R\,k+1/C)(1+k^2)} \\
&= \frac{f_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikt}dk}{(i\,R\,k+1/C)(k+1)(k-i)} \\
&= \frac{f_0}{\pi}\sum_{\mathrm{Im}>0} 2i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{e^{ikt}}{(i\,R\,k+1/C)(k+i)(k-i)}\right] \\
&= \frac{2f_0}{R}\sum_{\mathrm{Im}>0}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{ikt}}{(k-i/CR)(k+i)(k-i)}\right] \\
&= \frac{2f_0}{R}\left[\underbrace{\frac{e^{-t}}{i(1-1/CR)2i}}_{\text{in } k=i} + \underbrace{\frac{e^{-t/RC}}{-1/(RC)^2+1}}_{\text{in } k=i/RC}\right] \\
&= \frac{f_0}{R}\left[\frac{e^{-t}}{1/CR-1} + \frac{2\,e^{-t/RC}}{-1/(RC)^2+1}\right] \\
&= f_0\left[\frac{e^{-t}}{1/C-R} - \frac{2\,R\,e^{-t/RC}}{1/C^2-R^2}\right]\,.
\end{aligned}$$

Se $t < 0$

$$\begin{aligned}
Q(t) &= -\frac{2f_0}{R}\sum_{\mathrm{Im}<0}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{ikt}}{(k-i/CR)(k+i)(k-i)}\right] \\
&= -\frac{2f_0}{R}\left[\frac{e^{t}}{(-i)(1+1/CR)(-2i)}\right] \\
&= \frac{f_0}{R}\left[\frac{e^{t}}{1+1/CR}\right] = f_0\left[\frac{e^{t}}{1/C+R}\right]\,.
\end{aligned}$$

La corrente si ottiene derivando rispetto al tempo

$$I(t) = \begin{cases} f_0\left[-\dfrac{e^{-t}}{1/C-R} + \dfrac{2\,e^{-t/RC}}{1/C-C\,R^2}\right] & t > 0 \\[2ex] f_0\left[\dfrac{e^{t}}{1/C+R}\right] & t < 0 \end{cases}\,. \tag{7}$$