Metodi Matematici per la Fisica

Seconda prova parziale - 8 giugno 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che soltanto due di essi, che il candidato sceglierà prima della chiusura della prova, saranno oggetto di valutazione. A ciascun problema è assegnato un punteggio che varia tra $0/30$ e $7,5/30$ ed è stabilito in base ai seguenti criteri:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si consideri l'operatore $\hat{B}_\alpha$ definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, dipendente dal parametro complesso $\alpha \in \mathbb{C}$, la cui azione su un generico vettore $|x\rangle \in E_3$ è definita dalla relazione

$$\hat{B}_\alpha |x\rangle = \alpha \hat{A}|x\rangle + |z\rangle \,,$$

dove l'operatore $\hat{A}$ e il vettore $|z\rangle \in E_3$ sono fissati. Sapendo che le rappresentazioni dell'operatore $\hat{A}$ e del vettore $|z\rangle$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$ sono

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 2 \\ i & 1 & i \\ 2 & -i & 0 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si determini l'insieme dei valori del parametro complesso α per i quali l'operatore è una contrazione e se ne ottenga il punto fisso, ovvero il vettore $|b\rangle$, tale che $\hat{B}_\alpha|b\rangle = |b\rangle$.

Soluzione del primo problema

L'operatore $\hat{B}_\alpha$ definito nello spazio di Hilbert, quindi chiuso, E_3 è una contrazione se

$$|\alpha| \left\|\hat{A}\right\| < 1 \,.$$

Calcoliamo la norma dell'operatore $\hat{A}$. Osserviamo che $\hat{A}$ è un operatore hermitiano, la matrice che rappresenta l'operatore aggiunto $\hat{A}^\dagger$ rispetto alla base ortonormale $\{|e\rangle_k\}_{k=1}^3$ è $A^\dagger = A^{T*}$, poiché si ha $A = A^\dagger$, che implica l'identità operatoriale $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, e quindi l'hermitianità dell'operatore. Essendo un operatore hermitiano, la norma è

$$\left\|\hat{A}\right\| = \max_{k=1,2,3} \{|\lambda_k|\} \,,$$

dove $\{\lambda_k\}_{k=1}^3$ è lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$. Otteniamo lo spettro dell'operatore, cioè l'insieme degli autovalori, risolvendo l'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \det(A - I\lambda) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i & 2 \\ i & 1-\lambda & i \\ 2 & -i & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ -\lambda\left[\lambda(\lambda-1) - 1\right] + i(-i\lambda - 2i) + 2\left[1 - 2(1-\lambda)\right] &= 0 \\ -\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 6\right) &= 0 \,, \end{aligned}$$

gli autovalori sono

$$\lambda_1 = -2 \,, \qquad \lambda_0 = 0 \,, \qquad \lambda_2 = 3 \,,$$

quindi la norma dell'operatore $\hat{A}$ è

$$\left\|\hat{A}\right\| = |\lambda_3| = 3\,.$$

Ne consegue che l'operatore $\hat{B}_\alpha$ è una contrazione se $|\alpha| < 1/\left\|\hat{A}\right\| = 1/3$, nel piano complesso α, l'insieme cercato è il cerchio centrato nell'origine, di raggio 1/3.
Il punto fisso, ovvero il vettore $|b\rangle$ tale che $\hat{B}|b\rangle = |b\rangle$, si ottiene usando la serie di Neumann

$$|b\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha\hat{A}\right)^j |z\rangle = \left(\hat{I} - \alpha\hat{A}\right)^{-1} |z\rangle\,,$$

ed è quindi il risultato dell'applicazione del risolvente $\hat{A}_\alpha \equiv \left(\hat{I} - \alpha\hat{A}\right)^{-1}$ dell'operatore $\hat{A}$ sul vettore $|z\rangle$.
Usiamo la seguente procedura.

- Consideriamo la rappresentazione matriciale rispetto alla base $\left\{|e\rangle_k\right\}_{k=1}^{3}$ della definizione del punto fisso

$$|b\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha\hat{A}\right)^j |z\rangle = \left(\hat{I} - \alpha\hat{A}\right)^{-1} |z\rangle \qquad \overset{e}{\hookleftarrow} \qquad b = (I - \alpha A)^{-1} z\,;$$

- trasformiamo la definizione precedente usando la matrice unitaria U, che diagonalizza la matrice A, ovvero moltiplichiamo da sinistra per $U^\dagger$, si ha

$$b' = U^\dagger b = U^\dagger (I - \alpha A)^{-1} U U^\dagger z = \left(I - \alpha A_d\right)^{-1} z'\,,$$

  dove

$$A_d = U^\dagger A U = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)\,, \qquad b' = U^\dagger b\,, \qquad z' = U^\dagger z\,,$$

  sono le rappresentazioni dell'operatore $\hat{A}$ e dei vettori $|b\rangle$ e $|z\rangle$ rispetto alla base degli autovettori dell'operatore stesso, mentre l'identità

$$U^\dagger (I - \alpha A)^{-1} U = \left(I - \alpha A_d\right)^{-1}\,,$$

  è conseguenza del teorema spettrale.

Gli elementi delle colonne della matrice unitaria diagonalizzante U sono le componenti degli autovettori normalizzati di A. Indicando con v_k il vettore colonna che rappresenta rispetto alla base data il k-esimo autovettore della matrice A avremo

$$A v_k = \lambda_k v_k \qquad k = 1, 2, 3\,,$$

in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} -\lambda_k & -i & 2 \\ i & 1-\lambda_k & i \\ 2 & -i & -\lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ v_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

dove abbiamo indicato con v_k^j la j-esima componente del k-esimo autovettore. Poste tutte le prime componenti uguali all'unità, cioè $v_k^1 = 1$, con $k = 1, 2, 3$, si ottengo, per le seconde e terze componenti i tre sistemi lineari

$$\begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1-\lambda_k & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k^2 \\ v_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k \\ -i \end{pmatrix}\,, \qquad i = 1, 2, 3\,,$$

da cui si hanno le soluzioni

$$v_k^2 = \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda_k & 2 \\ -i & i \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1-\lambda_k & i \end{pmatrix}} = \begin{cases} 0 & \lambda_1 = -2 \\ -2i & \lambda_2 = 0 \\ i & \lambda_3 = 3 \end{cases}\,, \qquad v_k^2 = \frac{\det\begin{pmatrix} -i & \lambda_k \\ 1-\lambda_k & -i \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1-\lambda_k & i \end{pmatrix}} = \begin{cases} -1 & \lambda_1 = -2 \\ 1 & \lambda_2 = 0 \\ 1 & \lambda_3 = 3 \end{cases}\,.$$

I tre autovettori normalizzati, che indichiamo con $u_k = v_k / \left\| v_k \right\|$, $k = 1, 2, 3$, sono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene la matrice unitari diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Il vettore b', che rappresenta il punto fisso rispetto alla base degli autovettori, è dato dalla relazione

$$b' = \left(I - \alpha A_d\right)^{-1} z' = A'_\alpha z' = A'_\alpha U^\dagger z\,,$$

dove la matrice A'_α e il vettore z' rappresentano, rispetto alla stessa base, l'operatore risolvente $\hat{A}_\alpha$ il vettore $|z\rangle$. In dettaglio si ha

$$\begin{aligned}
b' &= \begin{pmatrix} (1-\alpha\lambda_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha\lambda_2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha\lambda_3)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2i/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-\alpha\lambda_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (1-\alpha\lambda_2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha\lambda_3)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (2+2i)/\sqrt{6} \\ (2-i)/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ (1-\alpha\lambda_2)^{-1}(2+2i)/\sqrt{6} \\ (1-\alpha\lambda_3)^{-1}(2-i)/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ (2+2i)/\sqrt{2} \\ (2-i)/(1-3\alpha) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

da cui si ottiene il vettore b, che rappresenta il punto fisso rispetto alla base $\left\{|e\rangle_k\right\}_{k=1}^{3}$, come

$$b = U b' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2i/\sqrt{6} & i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (2+2i)/\sqrt{2} \\ (2-i)/(1-3\alpha) \end{pmatrix} = \frac{1}{1-3\alpha} \begin{pmatrix} 1-\alpha-i\alpha \\ 1-2\alpha+2i\alpha \\ 1-\alpha-i\alpha \end{pmatrix}.$$

Usando la base ortonormale $\left\{|e\rangle_k\right\}_{k=1}^{3}$ si ha la forma *ket*

$$|b\rangle = \frac{1-\alpha-i\alpha}{1-3\alpha}|e\rangle_1 + \frac{1-2\alpha+2i\alpha}{1-3\alpha}|e\rangle_2 + \frac{1-\alpha-i\alpha}{1-3\alpha}|e\rangle_3\,.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7,5/30)

Nello spazio vettoriale a quattro dimensioni E_4 dei polinomi di terzo grado a variabile reale, sapendo che la rappresentazione matriciale rispetto alla base $\{q_0(x)=1, q_1(x)=x, q_2(x)=x^2, q_3(x)=x^3\} \subset E_4$ di un generico elemento $P(x) \in E_4$ è definita come

$$A(x)=\sum_{j=0}^{3} a_j x^j \quad \overset{q}{\hookleftarrow} \quad A=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

si ottenga la rappresentazione matriciale dell'operatore derivata prima $\hat{D}_x$, ovvero dell'operatore la cui azione è definita come

$$\hat{D}_x A(x)=A'(x)=\sum_{j=1}^{3} a_j j\, x^{j-1},$$

$\forall\, A(x) \in E_4$.
Si dimostri, infine, che l'operatore esponenziale $e^{y\hat{D}_x}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, si comporta come un operatore di traslazione, ovvero che, $\forall\, A(x) \in E_4$, si ha

$$e^{y\hat{D}_x} A(x)=A(x+y).$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Per ottenere la rappresentazione matriciale dell'operatore $\hat{D}_x$ rispetto alla base $\{q_j(x)\}_{j=0}^{3} \subset E_4$, usiamo la procedura nota, ovvero facciamo agire l'operatore su un generico vettore della base

$$\hat{D}_x q_j(x)=D_j^k q_k(x), \qquad j=0,1,2,3,$$

dove è sottintesa la somma sull'indice k e indichiamo D_j^k l'elemento della k-esima riga e j-esima colonna della matrice 4×4 D che rappresenta l'operatore, in simboli avremo $\hat{D}_x \overset{q}{\hookleftarrow} D$. L'azione dell'operatore non è altro che la derivata prima, per cui si ha

$$\hat{D}_x q_j(x)=j x^{j-1}=j q_{j-1}(x)=\delta_{j-1}^k q_k(x), \qquad j=0,1,2,3,$$

uguagliando gli ultimi membri delle due precedenti espressioni, che sono combinazioni dei vettori della stessa base, si ottiene

$$D_j^k=j\delta_{j-1}^k, \qquad k,j=0,1,2,3,$$

ovvero i coefficienti omologhi coincidono. La matrice D, che rappresenta l'operatore derivata prima r$\hat{D}-x$ rispetto alla base $\{q_j(x)\}_{j=0}^{3} \subset E_4$ è

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'operatore esponenziale può essere definito anche in termini della serie di Taylor

$$e^{y\hat{D}_x}=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \hat{D}_x^k,$$

dove la potenza k-esima dell'operatore derivata prima, con $k \in \mathbb{N}$, è l'operatore derivata k-esima, cioè

$$\hat{D}_x=\frac{d}{dx} \qquad \to \qquad \hat{D}_x^k=\frac{d^k}{dx^k}.$$

Poiché lo spazio vettoriale è quello dei polinomi di quarto grado si ha che, $\forall\, A(x) \in E_4$,

$$\hat{D}_x^k A(x)=0, \qquad \forall k \geq 4,$$

ovvero, tutte le derivate di ordine superiore o uguale a quattro sono nulle.
Alla luce di questo risultato, la serie che definisce l'operatore esponenziale, quanto agisce su un generico polinomio $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in E_4$, si riduce alla soma dei primi quattro termini, cioè

$$e^{y\hat{D}_x} A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \hat{D}_x^k A(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{y^k}{k!} \hat{D}_x^k A(x) = B(x)\,,$$

dove $B(x) \in E_4$ è il polinomio che si ottiene facendo agire l'operatore esponenziale sul polinomio $A(x)$.
In rappresentazione matriciale avremo

$$e^{yD} A = \left(I + y\,D + \frac{y^2}{2} D^2 + \frac{y^3}{6} D^3 \right) A = B\,,$$

dove I è la matrice identità 4×4, usando la matrice D e le sue potenze

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B\,,$$

si ha

$$e^{yD} A = \begin{pmatrix} 1 & y & y^2 & y^3 \\ 0 & 1 & 2y & 3y^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 \\ a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 \\ a_2 + 3a_3 y \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Il vettore così ottenuto rappresenta il polinomio

$$B(x) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \left(a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2\right) x + \left(a_2 + 3a_3 y\right) x^2 + a_3 x^3\,,$$

raccogliendo gli stessi coefficienti si ha

$$B(x) = a_0 + a_1 \left(y + x\right) + a_2 \left(y^2 + 2yx + x^2\right) + a_3 \left(y^3 + 3y^2 x + 3yx^2 + x^3\right).$$

I coefficienti dell'insieme $\left\{a_j\right\}_{j=0}^{2}$ sono quelli del polinomio $A(x)$, che era definito come

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\,,$$

ne consegue che si ha l'identità che si volava dimostrare, cioè

$$B(x) = a_0 + a_1 (x + y) + a_2 \left(x + y\right)^2 + a_3 \left(x + y\right)^3 = A(x + y)\,.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7,5/30)

Sia

$$A(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{senh}(t) & 1 \\ 1 & -\operatorname{senh}(t) \end{pmatrix},$$

la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}(t)$, dipendente dal parametro $t \in \mathbb{C}$, definito in uno spazio di Hilbert, rispetto a una sua base ortonormale.

- Si definisca l'insieme D dei valori di t per cui l'operatore $\hat{A}(t)$ è hermitiano.
- Si ottengano lo spettro e gli autovettori della matrice $A(t)$.
- Dopo aver dimostrato che la relazione

$$\frac{d}{dt} \hat{H}^{-1}(t) = -\hat{H}^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt} \hat{H}(t) \right) \hat{H}^{-1}(t)\,,$$

  vale per ogni generico operatore invertibile $\hat{H}(t)$, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{C}$ e derivabile rispetto ad esso, la si verifichi esplicitamente nel caso dell'operatore $\hat{A}(t)$ rappresentato dalla matrice $A(t)$.

Soluzione del terzo problema

Affinché l'operatore rappresentato dalla matrice $A(t)$ sia hermitiano è necessario che la matrice coincida con la complessa coniugata della sua trasposta, ovvero che si abbia

$$A(t)^{T*} = A(t)\,.$$

Poiché la matrice $A(t)$ e simmetrica, l'identità precedente implica che gli elementi della diagonale debbano essere reali. Indicando con a e b, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria di $t \in \mathbb{C}$, ponendo cioè $t = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathrm{senh}(t) = \mathrm{senh}(a + ib) = \mathrm{senh}(a)\cos(b) + i\cosh(a)\mathrm{sen}(b)\,.$$

Ne consegue che la condizione di realtà degli elementi della diagonale della matrice $A(t)$ diventa

$$0 = \mathrm{Im}\left(\mathrm{senh}(t)\right) = \cosh(a)\mathrm{sen}(b) \qquad \Leftarrow \qquad b \in \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}\,.$$

L'insieme $D \subset \mathbb{C}$ in cui la funzione seno iperbolico assume valori reali è

$$D = \{t : \mathrm{Im}(t) = k\pi,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}\}\ .$$

Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det\left(A(t) - \alpha I\right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} \mathrm{senh}(t) - \alpha & 1 \\ 1 & -\mathrm{senh}(t) - \alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ -\mathrm{senh}^2(t) + \alpha^2 - 1 &= 0\,, \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\mathrm{senh}^2(t) + 1} = \pm\cosh(t)\,,$$

dove si usa la convenzione di associare al primo pedice il segno alto, al secondo il segno basso. Gli autovettori corrispondenti, che indichiamo con $v_{1,2}$, sono invece le soluzioni dei due sistemi omogenei

$$\begin{aligned} \left(A(t) - \alpha_{1,2}\right) v_{1,2} &= 0 \\ \begin{pmatrix} \mathrm{senh}(t) - \alpha_{1,2} & 1 \\ 1 & -\mathrm{senh}(t) - \alpha_{1,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1_{1,2} \\ v^2_{1,2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove v^k_j rappresenta la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, con $k, j = 1, 2$. Indichiamo con $v'_{1,2}$ gli autovettori non normalizzati e poniamo le prime componenti di entrambi uguali ad uno, allora le seconde componenti sono

$$v^2_{1,2} = \alpha_{1,2} - \mathrm{senh}(t) = \pm\cosh(t) - \mathrm{senh}(t) = \frac{\pm\left(e^t + e^{-t}\right) - e^t + e^{-t}}{2} = \pm e^{\mp t}\,.$$

I due autovettori normalizzati sono

$$v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\mp 2t}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{\mp t} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\cosh(t)}} \begin{pmatrix} e^{\pm t/2} \\ \pm e^{\mp t/2} \end{pmatrix}.$$

È immediato osservare che, $\forall\, t \in D$, la matrice $A(t)$ è hermitiana, ha infatti autovalori reali distinti e gli autovettori sono quindi ortogonali.
Consideriamo un generico operatore $\hat{H}(t)$ dipendente dal parametro $t \in \mathbb{C}$, rispetto al quale è derivabile, se l'operatore è invertibile si ha che esiste un altro operatore $\hat{H}^{-1}(t)$, tale che, per definizione,

$$\hat{H}^{-1}(t)\hat{H}(t) = \hat{H}(t)\hat{H}^{-1}(t) = \hat{I}\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità, ovviamente costante e quindi non dipendente dal parametro t, mentre $\hat{H}^{-1}(t)$ è l'inverso dell'operatore $\hat{H}(t)$. Facendo la derivata rispetto a t dell'ultima identità si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{H}(t)\hat{H}^{-1}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{I} \\ \left(\frac{d}{dt}\hat{H}(t)\right)\hat{H}^{-1}(t) + \hat{H}(t)\frac{d}{dt}\hat{H}^{-1}(t) &= 0\,, \end{aligned}$$

moltiplichiamo per $\hat{H}^{-1}(t)$ da sinistra

$$\hat{H}^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}\hat{H}(t)\right)\hat{H}^{-1}(t)+\underbrace{\hat{H}^{-1}(t)\hat{H}(t)}_{=\hat{I}}\frac{d}{dt}\hat{H}^{-1}(t)=0$$

$$\hat{H}^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}\hat{H}(t)\right)\hat{H}^{-1}(t)+\frac{d}{dt}\hat{H}^{-1}(t)=0\,,$$

da cui si ottiene la derivata dell'operatore inverso come

$$\frac{d}{dt}\hat{H}^{-1}(t)=-\hat{H}^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}\hat{H}(t)\right)\hat{H}^{-1}(t)\,,$$

che rappresenta la relazione cercata.
La matrice diagonalizzante di $A(t)$ ha per colonne i due autovettori v_1 e v_2, ovvero

$$U(t)=\frac{1}{\sqrt{2\cosh(t)}}\begin{pmatrix} e^{t/2} & e^{-t/2} \\ e^{-t/2} & -e^{t/2}\end{pmatrix}\,,$$

per valori reali del parametro t questa matrice è unitaria, simmetrica e reale. Essa diagonalizza anche la matrice inversa $A^{-1}(t)$ in quanto tale matrice commuta con $A(t)$. Si ha quindi

$$U(t)A^{-1}(t)\,U^{\dagger}(t)=U(t)A^{-1}(t)\,U(t)=\mathrm{diag}\left(1/\cosh(t),-1/\cosh(t)\right)\,,$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
A^{-1}(t) &= U(t)\mathrm{diag}\left(1/\cosh(t),-1/\cosh(t)\right)U(t)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\cosh(t)}}\begin{pmatrix} e^{t/2} & e^{-t/2} \\ e^{-t/2} & -e^{t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\cosh(t) & 0 \\ 0 & -1/\cosh(t)\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2\cosh(t)}}\begin{pmatrix} e^{t/2} & e^{-t/2} \\ e^{-t/2} & -e^{t/2}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2\cosh^2(t)}\begin{pmatrix} e^{t/2} & e^{-t/2} \\ e^{-t/2} & -e^{t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t/2} & e^{-t/2} \\ e^{-t/2} & -e^{t/2}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2\cosh^2(t)}\begin{pmatrix} e^{t/2} & -e^{-t/2} \\ e^{-t/2} & e^{t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t/2} & e^{-t/2} \\ e^{-t/2} & -e^{t/2}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2\cosh^2(t)}\begin{pmatrix} e^{t}-e^{-t} & 2 \\ 2 & e^{-t}-e^{t}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\cosh^2(t)}\begin{pmatrix} \mathrm{senh}(t) & 1 \\ 1 & -\mathrm{senh}(t)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

È immediato osservare che, anche se questa espressione è stata ottenuta con la condizione di realtà per il parametro t, essa rappresenta l'inversa della matrice $A(t)$ per ogni valore complesso del parametro, ovvero possiamo rilassare la condizione di realtà. Infatti le identità

$$\begin{aligned}
A^{-1}(t)A(t)=A(t)A^{-1}(t) &= \frac{1}{\cosh^2(t)}\begin{pmatrix} \mathrm{senh}(t) & 1 \\ 1 & -\mathrm{senh}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{senh}(t) & 1 \\ 1 & -\mathrm{senh}(t)\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\cosh^2(t)}\begin{pmatrix} \mathrm{senh}^2(t)+1 & 0 \\ 0 & \mathrm{senh}^2(t)+1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{\cosh^2(t)}\begin{pmatrix} \cosh^2(t) & 0 \\ 0 & \cosh^2(t)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\,,
\end{aligned}$$

si basano sulla relazione iperbolica

$$\cosh^2(t)-\mathrm{senh}^2(t)=1\,,$$

che è valida $\forall\, t \in \mathbb{C}$. La derivata prima della matrice inversa è

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = \frac{-2\,\mathrm{senh}(t)}{\cosh^3(t)}\begin{pmatrix} \mathrm{senh}(t) & 1 \\ 1 & -\mathrm{senh}(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\cosh^2(t)}\begin{pmatrix} \cosh(t) & 0 \\ 0- & -\cosh(t) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\cosh^3(t)}\begin{pmatrix} -2\,\mathrm{senh}^2(t)+\cosh^2(t) & -2\,\mathrm{senh}(t) \\ -2\,\mathrm{senh}(t) & 2\,\mathrm{senh}^2(t)-\cosh^2(t) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\cosh^3(t)}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{senh}^2(t) & -2\,\mathrm{senh}(t) \\ -2\,\mathrm{senh}(t) & -1+\mathrm{senh}^2(t) \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il prodotto $-A^{-1}(t)(dA(t)/dr)A^{-1}(t)$, usando i simboli $c = \cosh(t)$ e $s = \mathrm{senh}(t)$, si ha

$$-A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dr}A(t)\right)A^{-1}(t) = -\frac{1}{c^4}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{c^4}\begin{pmatrix} cs & -c \\ c & cs \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & -s \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{1}{c^4}\begin{pmatrix} cs^2-c & 2cs \\ 2cs & -cs^2+c \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{c^3}\begin{pmatrix} 1-s^2 & -2s \\ -2s & -1+s^2 \end{pmatrix},$$

ovvero vale l'identità richiesta

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t).$$

Dimostriamo che questa relazione è equivalente a quella che avremmo se considerassimo la rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{A}(t)$, ovvero quella cha avremmo rispetto alla base dei suoi autovettori. Le relazioni tra la matrice diagonale $A_d(t)$ e quella generica $A(t)$, rappresentanti lo stesso operatore $\hat{A}(t)$ sono

$$A_d(t) = U^{-1}(t)A(t)U(t), \qquad A(t) = U(t)A_d(t)U^{-1}(t),$$

dove tutte le matrici sono dipendenti dal parametro t. Inoltre, come già asserito, la stessa matrice $U(t)$ diagonalizza anche la matrice inversa $A^{-1}(t)$, per cui si avranno le relazioni

$$A_d^{-1}(t) = U^{-1}(t)A^{-1}(t)U(t), \qquad A^{-1}(t) = U(t)A_d^{-1}(t)U^{-1}(t).$$

Per dimostrare che l'espressione della derivata di $A^{-1}(t)$ è equivalente all'analoga per la derivata matrice diagonale $A_d^{-1}(t)$, calcoliamo il membro sinistro e il membro destro di quella per la matrice non diagonale in termini delle matrici diagonali, usando le seconde identità delle due precedenti espressioni e verifichiamo che dal risultato si deduce l'espressione per la matrice diagonale. Omettendo di indicare la dipendenza dal parametro t per economia di scrittura, per il membro sinistro si ha

$$[\text{membro sinistro}] = \frac{d}{dt}A^{-1} = \frac{d}{dt}\left(UA_d^{-1}U^{-1}\right) = \frac{dU}{dt}A_d^{-1}U^{-1} + U\frac{dA_d^{-1}}{dt}U^{-1} + UA_d^{-1}\frac{dU^{-1}}{dt}.$$

Mentre per il membro destro

$$[\text{membro destro}] = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} = -UA_d^{-1}U^{-1}\frac{d}{dt}\left(UA_dU^{-1}\right)UA_d^{-1}U^{-1}$$
$$= -UA_d^{-1}U^{-1}\left(\frac{dU}{dt}A_dU^{-1} + U\frac{dA_d}{dt}U^{-1} + UA_d\frac{dU^{-1}}{dt}\right)UA_d^{-1}U^{-1}$$
$$= -UA_d^{-1}U^{-1}\frac{dU}{dt}\underbrace{A_dU^{-1}UA_d^{-1}}_{=I}U^{-1} - UA_d^{-1}\underbrace{U^{-1}U}_{=I}\frac{dA_d}{dt}\underbrace{U^{-1}U}_{=I}A_d^{-1}U^{-1} - U\underbrace{A_d^{-1}U^{-1}UA_d}_{=I}\frac{dU^{-1}}{dt}UA_d^{-1}U^{-1}$$
$$= -UA_d^{-1}U^{-1}\frac{dU}{dt}U^{-1} - UA_d^{-1}\frac{dA_d}{dt}A_d^{-1}U^{-1} - U\frac{dU^{-1}}{dt}UA_d^{-1}U^{-1},$$

inoltre, poiché i prodotti UU^{-1} e $U^{-1}U$ non dipendono dal parametro t, sono infatti uguali alla matrice identità, $UU^{-1} = U^{-1}U = I$, si hanno

$$\frac{d}{dt}UU^{-1} = \frac{dU}{dt}U^{-1} + U\frac{dU^{-1}}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dU}{dt}U^{-1} = -U\frac{dU^{-1}}{dt},$$

ne consegue che

$$[\text{membro destro}] = -UA_d^{-1}\underbrace{U^{-1}\frac{dU}{dt}U^{-1}}_{=-U^{-1}U\frac{dU^{-1}}{dt}=-\frac{dU^{-1}}{dt}} - UA_d^{-1}\frac{dA_d}{dt}A_d^{-1}U^{-1} - \underbrace{U\frac{dU^{-1}}{dt}U}_{=-\frac{dU}{dt}U^{-1}U=-\frac{dU}{dt}}A_d^{-1}U^{-1}$$
$$= UA_d^{-1}\frac{dU^{-1}}{dt} - UA_d^{-1}\frac{dA_d}{dt}A_d^{-1}U^{-1} + \frac{dU}{dt}A_d^{-1}U^{-1}.$$

L'identità richiesta, ovvero: [membro sinistro]=[membro destro], è quindi

$$\frac{dU}{dt}A_d^{-1}U^{-1} + U\frac{dA_d^{-1}}{dt}U^{-1} + UA_d^{-1}\frac{dU^{-1}}{dt} = UA_d^{-1}\frac{dU^{-1}}{dt} - UA_d^{-1}\frac{dA_d}{dt}A_d^{-1}U^{-1} + \frac{dU}{dt}A_d^{-1}U^{-1}$$
$$U\frac{dA_d^{-1}}{dt}U^{-1} = -UA_d^{-1}\frac{dA_d}{dt}A_d^{-1}U^{-1},$$

moltiplicando da sinistra per U^{-1} e destra per U si ottiene

$$\frac{dA_d^{-1}}{dt} = -A_d^{-1}\frac{dA_d}{dt}A_d^{-1},$$

che rappresenta l'espressione per la derivata dell'inversa della matrice diagonale $A_d(t)$ analoga a quella per la matrice generica $A(t)$. Questo risultato implica l'equivalenza delle due espressioni.

Quarto problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si dimostri che la funzione

$$u(x) = u_1\theta(x) + u_2\ln(x)$$

$\forall\,(u_1,u_2)\in\mathbb{C}^2$, rappresenta un'autofunzione dell'operatore differenziale

$$\hat{D}_x x\hat{D}_x, \qquad \text{con: } \hat{D}_x = \frac{d}{dx}.$$

Soluzione del quarto problema

Consideriamo l'azione dell'operatore differenziale

$$\hat{D}_x x\hat{D}_x u(x) = xu''(x) + u'(x),$$

dove sono $u'(x)$ e $u''(x)$ sono le derivate prima e seconda della funzione $u(x)$. Per calcolare queste derivate ricordiamo che la derivata prima della funzione gradino di Heaviside è la delta di Dirac, per cui

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x), \qquad \frac{d^2}{dx^2}\theta(x) = \frac{d}{dx}\delta(x) = \delta'(x).$$

La funzione logaritmo con variabile reale $x\in\mathbb{R}$ ha una discontinuità nell'origine, che in generale rappresenta un punto di diramazione, di tipo gradino di Heaviside, infatti, considerando la determinazione principale $\arg(z)\in(-\pi,\pi]$, si ha: $\ln(x) = \ln|x| + i\pi\theta(-x)$, quindi

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x), \qquad \frac{d^2}{dx^2}\ln(x) = -\frac{1}{x^2} - i\pi\delta'(x).$$

Sostituendo queste espressioni delle derivate delle funzioni gradino e logaritmo nell'identità che descrive l'azione dell'operatore differenziale si ottiene

$$\begin{aligned}
\hat{D}_x x\hat{D}_x u(x) &= xu''(x) + u'(x)\\
&= x\left[u_1\delta'(x) + u_2\left(-\frac{1}{x^2} - i\pi\delta'(x)\right)\right] + u_1\delta(x) + u_2\left(\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)\right)\\
&= u_1\left(x\delta'(x) + \delta(x)\right) + u_2\left(-\frac{1}{x} - i\pi x\delta'(x) + \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)\right)\\
&= u_1\left(x\delta'(x) + \delta(x)\right) - i\pi u_2\left(x\delta'(x) + \delta(x)\right)\\
&= \left(u_1 - i\pi u_2\right)\left(x\delta'(x) + \delta(x)\right).
\end{aligned}$$

Dall'espressione generale

$$x^n \frac{d^n}{dx^n}\delta(x) = (-1)^n n!\delta(x)\,,$$

che lega la derivata n-esima, $n \in \mathbb{N}$, della delta di Dirac alla delta stessa, si ha, per $n = 1$,

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \qquad \Rightarrow \qquad x\delta'(x) + \delta(x) = 0\,.$$

Ne consegue che

$$\hat{D}_x x \hat{D}_x u(x) = \left(u_1 - i\pi u_2\right)\left(x\delta'(x) + \delta(x)\right) = 0\,.$$

ovvero la funzione $u(x)$ è un'autofunzione, in particolare è quella con autovalore nullo.

Quinto problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si ottenga la soluzione dell'equazione integrale

$$f(x) = e^{-\alpha x}\theta(x) + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x-x'|} f(x')dx'\,,$$

con $\alpha > 0$.
Suggerimento. Potrebbe essere di aiuto l'utilizzo delle trasformate di Fourier.

Soluzione del quinto problema

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri, usando, per il secondo termine a secondo membro il teorema della convoluzione

$$\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k\left[e^{-\alpha x}\theta(x)\right] + \mathscr{F}_k\left[\alpha\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x-x'|} f(x')dx'\right] = \mathscr{F}_k\left[e^{-\alpha x}\theta(x)\right] + \alpha\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[e^{-\alpha|x|}\right]\tilde{f}(k)\,,$$

dove abbiamo indicato $\tilde{f}(k)$ la trasformata di Fourier della funzione incognita $f(x)$.
Le due trasformate sono

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[e^{-\alpha x}\theta(x)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x}\theta(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x(\alpha+ik)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha+ik}\,;\\
\mathscr{F}_k\left[e^{-\alpha|x|}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x(\alpha-ik)}dx + \int_0^{\infty} e^{x(-\alpha-ik)}dx\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}\,.
\end{aligned}$$

Usando questi risultati, l'equazione diventa

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha+ik} + \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^2}{k^2+\alpha^2}\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha+ik} + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+k^2}\tilde{f}(k)\,,$$

da cui si ottiene l'espressione per $\tilde{f}(k)$

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+k^2}\right)\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\alpha+ik}\\
\frac{k^2-\alpha^2}{\alpha-ik}\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\\
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\alpha-ik}{k^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-i}{k-\alpha} - \frac{1+i}{k+\alpha}\right)
\end{aligned}$$

La soluzione si ottiene come anti-trasformata di Fourier

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{f}(k)\right] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left((1-i)\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k-\alpha}\right] - (1+i)\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k+\alpha}\right]\right)\,.$$

Le due anti-trasformate sono

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k\pm\alpha}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k\pm\alpha}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k\pm\alpha+i\epsilon}dk + i\pi e^{\mp ix\alpha} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2i\pi\theta(-x)e^{\mp ix\alpha}+i\pi e^{\mp ix\alpha}\right) \\
&= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{segno}(x)\,e^{\mp ix\alpha}\,.
\end{aligned}$$

Usando questi risultati si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{i\,\mathrm{segno}(x)}{4}\left(e^{ix\alpha}-ie^{ix\alpha}-e^{-ix\alpha}-ie^{-ix\alpha}\right) \\
&= \frac{\mathrm{segno}(x)}{2}\left(\cos(x\alpha)-\mathrm{sen}(x\alpha)\right)\,,
\end{aligned}$$

infine, sfruttando le formule di somma,

$$f(x)=\frac{\mathrm{segno}(x)}{\sqrt{2}}\cos(x\alpha+\pi/4)\,.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 7,5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$g(x)=\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-|x-x'|}\cos(x-x')}{x'}dx'\,.$$

Soluzione del sesto Problema

La funzione $g(x)$ è la convoluzione delle funzioni

$$g_1(x)=\frac{1}{x}\,,\qquad g_2(x)=e^{-|x|}\cos(x)\,,$$

possiamo applicare il teorema della convoluzione, ovvero

$$\tilde{g}(k)=\mathscr{F}_k\left[g\right]=\mathscr{F}_k\left[(g_1*g_2)(x)\right]=\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[g_1\right]\mathscr{F}_k\left[g_2\right]=\sqrt{2\pi}\,\tilde{g}_1(k)\,\tilde{g}_2(k)\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione $g_1(x)$ è

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x+i\epsilon}+i\pi\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-2i\pi\theta(-k)+i\pi\right)=-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{cases}(-2+1)=-1 & k<0\\ (0+1)=1 & k>0\end{cases}
\end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{g}_1(k)=-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{segno}(k)\,.$$

La funzione $g_2(x)$ è il prodotto di due funzioni, la funzione coseno e l'esponenziale dell'opposto del modulo, applicando anche in questo caso il teorema della convoluzione, si ha

$$\tilde{g}_2(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]*\mathscr{F}_k\left[\cos(x)\right]\right)(k)\,.$$

Le due trasformate di Fourier sono

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1}\,;\\ \mathscr{F}_k\left[\cos(x)\right] &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\delta(k+1)+\delta(k-1)\Big)\,.\end{aligned}$$

La loro convoluzione

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]*\mathscr{F}_k\left[\cos(x)\right]\right)(k) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_{k-k'}\left[e^{-|x|}\right]\mathscr{F}_k\left[\cos(x)\right]dk'\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(k'+1)+\delta(k'-1)}{(k-k')^2+1}dk'\\ &= \frac{1}{(k+1)^2+1}+\frac{1}{(k-1)^2+1}\\ &= 2\frac{k^2+2}{\left(k^2+2\right)^2-4k^2}\,.\end{aligned}$$

In definitiva la trasformata di Fourier cercata vale

$$\tilde{g}(k) = -i\sqrt{2\pi}\,\frac{k^2+2}{\left(k^2+2\right)^2-4k^2}\,\mathrm{segno}(k)\,.$$