Metodi Matematici per la Fisica

Secondo esonero - 8 giugno 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Si risolva l'equazione integrale

$$f(x) = e^{-ax}\theta(x) - 4a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|} f(y)dy\,,$$

con $a > 0$.

Soluzione del primo problema

Facciamo la trasformata di Fourier (TF) di ambo i membri, usando il teorema della convoluzione per l'ultimo termine,

$$\mathcal{F}_k\left[f\right] = \mathcal{F}_k\left[e^{-ax}\theta(x)\right] - 4a\sqrt{2\pi}\mathcal{F}_k\left[e^{-a|x|}\right]\mathcal{F}_k\left[f\right]\,,$$

e otteniamo la TF della soluzione

$$\mathcal{F}_k\left[f\right] = \frac{\mathcal{F}_k\left[e^{-ax}\theta(x)\right]}{1+4a\sqrt{2\pi}\mathcal{F}_k\left[e^{-a|x|}\right]}\,.$$

La soluzione non è altro che l'anti-TF

$$f(x) = \mathcal{F}_{-x}\left[\frac{\mathcal{F}_k\left[e^{-ax}\theta(x)\right]}{1+4a\sqrt{2\pi}\mathcal{F}_k\left[e^{-a|x|}\right]}\right]\,.$$

Calcoliamo le due TF che compaiono a secondo membro di questa espressione, si hanno

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k\left[e^{-ax}\theta(x)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x)e^{-a|x|}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\theta(x)e^{-x(ik+a)}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-x(ik+a)}}{-ik-a}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik+a}\,; \\
\mathcal{F}_k\left[e^{-a|x|}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{-x(ik-a)}dx + \int_0^{\infty}e^{-x(ik+a)}dx\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-ik+a}+\frac{1}{ik+a}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{k^2+a^2}\,.
\end{aligned}$$

Infine, si ha la soluzione

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{F}_{-x}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{ik+a}}{1+\frac{8a^2}{k^2+a^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_{-x}\left[\frac{-ik+a}{k^2+9a^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-ik+a}{k^2+9a^2}e^{ikx}dk \\
&= \left\{\begin{array}{ll} i\mathrm{Res}\left[\dfrac{-ik+a}{k^2+9a^2}, k=3ia\right] & x>0 \\ -i\mathrm{Res}\left[\dfrac{-ik+a}{k^2+9a^2}, k=-3ia\right] & x<0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{2}{3}e^{-3ax} & x>0 \\ -\dfrac{1}{3}e^{3ax} & x<0 \end{array}\right.\,,
\end{aligned}$$

che può essere posta nella forma più compatta

$$f(x)=\left(\frac{2}{3}-\theta(-x)\right)e^{-3a|x|}\,.$$

Secondo problema (punteggio 3/30)

Si determini la matrice

$$B=\oint_{|z|=1} z^2\,(I\,z+A)^{-2}\,dz\,,$$

dove I è la matrice identità 3×3 e

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Soluzione del secondo problema

La matrice A è hermitiana e quindi normale. Gli autovalori, $w_{1,2,3}\in\mathbb{R}$, sono gli zeri dell'equazione caratteristica

$$\det(A-Ix)=0$$
$$\det\begin{pmatrix}-1/2-w & 0 & 0\\ 0 & 1/4-w & 1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4-w\end{pmatrix}=0$$
$$\left(-\frac{1}{2}-w\right)\left[\left(\frac{1}{4}-w\right)^2-\frac{1}{16}\right]=0$$
$$\left(-\frac{1}{2}-w\right)w\left(w-\frac{1}{2}\right)=0\,,$$

ovvero

$$w_1=-\frac{1}{2}\,,\qquad w_2=0\,,\qquad w_3=\frac{1}{2}\,.$$

Gli autovettori corrispondenti, v_j di componenti (a_j,b_j,c_j) con $j=1,2,3$, si ottengono risolvendo i sistemi lineari

$$(A-Iw_j)v_j=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad j=1,2,3\,,$$
$$\begin{pmatrix}-1/2-w_j & 0 & 0\\ 0 & 1/4-w_j & 1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4-w_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_j\\b_j\\c_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Per il primo autovettore, con autovalore $w_1=-1/2$, si ha

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3/4 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 3/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}a_1=1\\ b_1=c_1=0\end{array}\quad\Rightarrow\quad v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Il secondo, con autovalore $w_2=0$, si ottiene con la stessa procedura

$$\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}a_2=0\\ b_2=-c_2=1\end{array}\quad\Rightarrow\quad v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Infine, il terzo autovettore, con autovalore $w_3=1/2$,

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1/4 & 1/4\\ 0 & 1/4 & -1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}a_3=0\\ b_3=c_3=1\end{array}\quad\Rightarrow\quad v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

La matrice integranda può essere diagonalizzata, così come la matrice A, dalla matrice unitaria

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

In particolare si hanno le rappresentazioni diagonali

$$A_d = \mathrm{diag}(w_1, w_2, w_3) = U^\dagger A U\,,$$
$$\left[z^2\,(Iz + A)^{-2}\right]_d = \mathrm{diag}\left(\frac{z^2}{(z+w_1)^2}, \frac{z^2}{(z+w_2)^2}, \frac{z^2}{(z+w_3)^2}\right) = U^\dagger \left[z^2\,(Iz+A)^{-2}\right] U\,,$$

dalle quali consegue la rappresentazione diagonale della matrice B

$$B_d = \mathrm{diag}\left(\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{(z+w_1)^2} dz, \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{(z+w_2)^2} dz, \oint_{|z|=1} \frac{z^2}{(z+w_3)^2} dz\right) = U^\dagger B U\,.$$

Gli integrali che rappresentano gli elementi diagonali di B_d, ovvero gli autovalori di B, possono essere calcolati con il teorema di residui. Poiché tutti i poli $z = w_j$, con $j = 1, 2, 3$, sono interni alla circonferenza unitaria, gli integrali valgono

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{(z+w_j)^2} dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{(z+w_j)^2}, w_j\right] = -4i\pi w_j\,.$$

In definitiva la rappresentazione diagonale di B è $B_d = \mathrm{diag}(2i\pi, 0, -2i\pi)$, mentre per quella rispetto alla base canonica si ha

$$B = U B_d U^\dagger = i\pi \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Terzo problema (punteggio 3/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione di variabile reale

$$f(x) = |\mathrm{sen}(x)|\theta\left(\pi^2 - x^2\right).$$

Soluzione del terzo problema

Calcoliamo direttamente la trasformata di Fourier

$$\tilde{f}(k) \equiv \mathscr{F}_k\left[f\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} |\mathrm{sen}(x)|\theta\left(\pi^2 - x^2\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} |\mathrm{sen}(x)| dx\,,$$

l'ultima identità segue dalla definizione della funzione θ di Heaviside, infatti

$$\theta\left(\pi^2 - x^2\right) = \begin{cases} 1 & \pi^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -\pi < x < \pi \\ 0 & \pi^2 - x^2 < 0 \Leftrightarrow \{x < -\pi\} \cup \{x < \pi\} \end{cases}.$$

La funzione seno assume valori non negativi in $[0,\pi]$ e non positivi in $[-\pi,0)$, quindi

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}|\mathrm{sen}(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{-\pi}^{0} e^{-ikx}\mathrm{sen}(x)dx + \int_{0}^{\pi} e^{-ikx}\mathrm{sen}(x)dx\right)\\
&= \{x' = -x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\pi} e^{ikx'}\mathrm{sen}(x')dx' + \int_{0}^{\pi} e^{-ikx}\mathrm{sen}(x)dx\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\pi}\cos(kx)\mathrm{sen}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\pi}\left[\mathrm{sen}\big(x(k+1)\big) - \mathrm{sen}\big(x(k-1)\big)\right]dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-\cos\big(x(k+1)\big)}{k+1} - \frac{-\cos\big(x(k-1)\big)}{k-1}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-\cos\big(\pi(k+1)\big)+1}{k+1} - \frac{-\cos\big(\pi(k-1)\big)+1}{k-1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\cos(\pi k)+1}{k+1} - \frac{\cos(\pi k)+1}{k-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos(\pi k)+1}{1-k^2},
\end{aligned}
$$

usando la formula di duplicazione della funzione coseno, si ha il risultato finale

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4\cos^2(\pi k/2)}{1-k^2}.$$

Quarto problema (punteggio 3/30)

Data la matrice

$$T = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1+i \\ 0 & -2+i & 0 \\ 1+i & 0 & -i \end{pmatrix},$$

si determinino autovettori e autovalori delle matrice A e delle matrici $T^\dagger$, $R = \left(T + T^\dagger\right)/2$ e $S = i\left(T^\dagger - T\right)/2$.

Soluzione del quarto problema

Gli autovalori della matrice T si ottengono come soluzione dell'equazione caratteristica

$$
\begin{aligned}
\det(T - xI) &= 0\\
\det\begin{pmatrix} -i-x & 0 & 1+i \\ 0 & -2+i-x & 0 \\ 1+i & 0 & -i-x \end{pmatrix} &= 0\\
\left[(x+i)^2 - (1+i)^2\right](-2+i-x) &= 0
\end{aligned}
$$

e sono

$$x_1 = -2+i \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = -1-2i.$$

Gli autovettori si ottengono risolvendo i corrispondenti sistemi lineari

$$\begin{pmatrix} -i-x_j & 0 & 1+i \\ 0 & -2+i-x_j & 0 \\ 1+i & 0 & -i-x_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1,2,3.$$

Per il primo con autovalore x_1, poniamo $b_1 = 1$, e dalla prima e terza si hanno due condizioni disgiunte

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_1 = c_1 = 0 \quad \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il secondo autovettore si ottiene come

$$\begin{pmatrix} -1-i & 0 & 1+i \\ 0 & -3-i & 0 \\ 1+i & 0 & -i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = c_2 = 1 \\ b_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infine il terzo

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1+i \\ 0 & -1+3i & 0 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = -c_2 = 1 \\ b_2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Riassumendo, in corrispondenza dei tre autovalori $x_1 = -2+i$, $x_2 = 1$ e $x_3 = -1-2i$, si hanno i tre autovettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

che formano un insieme ortonormale. Ne consegue che la matrice T è normale e quindi commuta con il sua aggiunto, infatti

$$\begin{aligned} \left[T, T^\dagger\right] &= \begin{pmatrix} -i & 0 & 1+i \\ 0 & -2+i & 0 \\ 1+i & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 & 1-i \\ 0 & -2-i & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} i & 0 & 1-i \\ 0 & -2-i & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 & 1+i \\ 0 & -2+i & 0 \\ 1+i & 0 & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Inoltre T e $T^\dagger$ hanno gli stessi autovettori e gli autovalori di $T^\dagger$ si ottengono come soluzioni di un'equazione caratteristica, che è la complessa coniugata di quella della matrice T, ovvero

$$\left[(y-i)^2 - (1-i)^2\right](-2-i-y) = 0,$$

da cui

$$y_1 = x_1^* = -2-i \qquad y_2 = x_2^* = 1, \qquad y_3 = x_3^* = -1+2i.$$

Infine, usando il teorema spettrale si evince che le matrici R ed S, combinazioni lineari di T e $T^\dagger$, avranno gli stessi autovettori, mentre gli autovalori si ottengono dalle combinazioni lineari omologhe degli autovalori di T e $T^\dagger$. Indicando con $\{r_j\}_{j=1}^3$ e $\{s_j\}_{j=1}^3$ gli spettri discreti di R e S, si hanno

$$r_j = \frac{x_j + y_j}{2} = \frac{x_j + x_j^*}{2} = \mathrm{Re}(x_j) = \begin{cases} -2 & j=1 \\ 1 & j=2 \\ -1 & j=3 \end{cases}, \qquad s_j = \frac{x_j - y_j}{2i} = \frac{x_j - x_j^*}{2i} = \mathrm{Im}(x_j) = \begin{cases} 1 & j=1 \\ 0 & j=2 \\ -2 & j=3 \end{cases}.$$

Quinto problema (punteggio 3/30)

Si consideri l'operatore trasformata di Fourier $\hat{F}$

$$\hat{F} f \equiv \mathscr{F}_{x'}\left[f\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixx'} f(x)\,dx,$$

definito $\forall\, f(x) \in L(\mathbb{R})$ e tale che

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\mathscr{F}_{x'}\left[f\right]\right] = f(x).$$

Si determini lo spettro discreto dell'operatore e si dimostri che le auto-funzioni sono

$$g_n(x) = \left(\frac{d}{dx} - x\right)^n e^{-x^2/2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione del quinto problema

Dalla condizione di esistenza della anti-trasformata e dalla sua coincidenza con la funzione di partenza segue che l'applicazione dell'operatore al quadrato dà la funzione di partenza con argomento cambiato di segno, ovvero

$$\hat{F}^2 f = \mathscr{F}_x\left[\mathscr{F}_{x'}\left[f\right]\right] = f(-x)\,.$$

Segue che l'operatore $\hat{F}^4$ si comporta come l'identità,

$$\hat{F}^4 f = \mathscr{F}_x\left[\mathscr{F}_{x'}\left[\mathscr{F}_{x''}\left[\mathscr{F}_{x'''}\left[f\right]\right]\right]\right] = \mathscr{F}_x\left[\mathscr{F}_{x'}\left[f(-x'')\right]\right] = f(x)\,.$$

Considerando l'equazione agli autovalori

$$\hat{F}u = \lambda u\,,$$

si ha che l'azione di $\hat{F}^4$, che coincide con l'identità, può essere sviluppata come

$$u = \hat{F}^4 u = \lambda \hat{F}^3 u = \lambda^4 u\,,$$

ne consegue che $\lambda^4 = 1$. Ci sono solo quattro autovalori distinti, le quattro radici quarte dell'unità,

$$\lambda_k = e^{ik\pi/2}\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Per verificare che la auto-funzioni abbiano la forma data, calcoliamo l'azione dell'operatore sulla generica $g_n(x)$

$$\hat{F}g_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixx'}\left(\frac{d}{dx} - x\right)^n e^{-x^2/2}dx\,.$$

Integriamo per parti, fattorizzando la potenza n-esima dell'operatore differenziale nell'integrale,

$$\begin{aligned}
\hat{F}g_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixx'}\left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)^{n-1} e^{-x^2/2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixx'}\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} - x\right)^{n-1} e^{-x^2/2}dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ixx'}\left(\frac{d}{dx} - x\right)^{n-1} e^{-x^2/2}dx \\
&= e^{-ixx'}\left(\frac{d}{dx} - x\right)^{n-1} e^{-x^2/2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}e^{-ixx'}\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)^{n-1} e^{-x^2/2}dx \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ixx'}\left(\frac{d}{dx} - x\right)^{n-1} e^{-x^2/2}dx\,.
\end{aligned}$$

Il primo termine si annulla poiché contiene sempre la funzione gaussiana che è nulla nei limiti $x \to \pm\infty$. Dopo la prima integrazione per parti si ha

$$\hat{F}g_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(-\frac{d}{dx} - x\right)e^{-ixx'}\right]\left(\frac{d}{dx} - x\right)^{n-1} e^{-x^2/2}dx\,,$$

le parentesi quadre sono necessarie per indicare che l'operatore $(-d/dx - x)$ agisce solo sull'esponenziale $e^{-ixx'}$, all'n-esima iterazione si ottiene

$$\hat{F}g_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\left(-\frac{d}{dx} - x\right)^n e^{-ixx'}dx\,.$$

Si osserva che l'azione dell'operatore $(-d/dx - x)$ sulla funzione $e^{-ixx'}$ è anche scrivibile come

$$\left(-\frac{d}{dx} - x\right)e^{-ixx'} = \left(ix' - i\frac{d}{dx'}\right)e^{-ixx'} = -i\left(\frac{d}{dx'} - x'\right)e^{-ixx'}\,,$$

vale, ovviamente, anche per la potenza intera n-esima

$$\left(-\frac{d}{dx} - x\right)^n e^{-ixx'} = (-i)^n\left(\frac{d}{dx'} - x'\right)^n e^{-ixx'}\,.$$

In definitiva, per l'azione $\hat{F}g_n$ si ha

$$\begin{aligned}\hat{F}g_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\left(-\frac{d}{dx}-x\right)^n e^{-ixx'}dx = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\left(\frac{d}{dx'}-x'\right)^n e^{-ixx'}dx \\ &= (-i)^n\left(\frac{d}{dx'}-x'\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-ixx'}dx\,.\end{aligned}$$

L'ultimo integrale rappresenta la trasformata di Fourier della gaussiana e si ha

$$\mathscr{F}_{x'}\left(e^{-x^2/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-ixx'}dx = e^{-x'^2/2}\,,$$

quindi

$$\hat{F}g_n = (-i)^n\left(\frac{d}{dx'}-x'\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-ixx'}dx = (-i)^n\left(\frac{d}{dx'}-x'\right)^n e^{-x'^2/2} = (-i)^n g_n\,.$$

Le potenze intere di $(-i)$ possono assumere solo i quattro valori distinti: $\pm i$ e ± 1, che coincidono con i quattro autovalori già identificati.

Sesto problema (punteggio 3/30)

Data l'equazione integrale

$$f(x) = x + \alpha\int_{-1}^{1}\frac{x^n-y^n}{x-y}f(y)dy\,,$$

si definisca la procedura risolutiva nel caso generale $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, si discuta l'esistenza della soluzione e la si ottenga esplicitamente con $n=3$ e $\alpha=1$.

Soluzione del sesto Problema

Il nucleo dell'equazione è separabile, infatti

$$\frac{x^n-y^n}{x-y} = x^{n-1}\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^n}{1-\frac{y}{x}} = x^{n-1}\frac{(1-\frac{y}{x})\left[1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\ldots+\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{y}{x}} = x^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1}y^j x^{n-1-j}\,,$$

per ottenere la terza identità si è usata la procedura di somma della serie geometrica. Si definiscono gli insiemi di funzioni $\{M_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ e $\{N_k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ come

$$M_j(x) = x^{n-1-j}\,,\qquad N_k(x) = x^k\,,\qquad j,k = 0,1,\ldots,n-1\,.$$

L'equazione può essere riscritta fattorizzando il nucleo

$$f(x) = x + \alpha\sum_{j=0}^{n-1}M_j(x)\int_{-1}^{1}N_j(y)f(y)dy\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per $N_k(x)$ e integrando si ha

$$\underbrace{\int_{-1}^{1}N_k(x)f(x)dx}_{=C_k} = \underbrace{\int_{-1}^{1}N_k(x)x\,dx}_{=B_k} + \alpha\sum_{j=0}^{n}\underbrace{\int_{-1}^{1}N_k(x)M_j(x)dx}_{=A_{kj}}\underbrace{\int_{-1}^{1}N_j(x)f(x)dx}_{=C_j}\,,\qquad k,j = 0,1,\ldots,n-1\,,$$

ovvero, in forma matriciale

$$(I-\alpha A)C = B\,.$$

La matrice A, 3×3, e il vettore B, 1×3, hanno elementi

$$\begin{array}{l} A_{kj} = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^{k+n-1-j} dx = \begin{cases} 2/(k+n-j) & \text{per } k+n-j \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } k+n-j \text{ pari} \end{cases} \\ B_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^{k+1} dx = \begin{cases} 2/(k+2) & \text{per } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{per } k \text{ pari o nullo} \end{cases} \end{array} \quad , \qquad k, j = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Il sistema ammette un'unica soluzione solo se $\det(I - \alpha A) \neq 0$, ovvero in corrispondenza dei valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ per i quali si ha un determinante non nullo.
Nel caso $n = 3$ si hanno

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e il sistema diventa

$$(I - \alpha B) = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\alpha/3 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 1 - 2\alpha/3 & 0 \\ -2\alpha/5 & 0 & 1 - 2\alpha/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ammette un'unica soluzione se

$$\det \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha/3 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 1 - 2\alpha/3 & 0 \\ -2\alpha/5 & 0 & 1 - 2\alpha/3 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Il determinate vale

$$\det \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha/3 & 0 & -2\alpha \\ 0 & 1 - 2\alpha/3 & 0 \\ -2\alpha/5 & 0 & 1 - 2\alpha/3 \end{pmatrix} = \frac{32}{135} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \left(\alpha^2 + \frac{15}{4} a - \frac{45}{16}\right),$$

per cui si ha una soluzione unica se

$$\alpha \notin \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{8} \left(-5 - 3\sqrt{5}\right), \frac{3}{8} \left(-5 + 3\sqrt{5}\right) \right\}.$$

Con $\alpha = 1$ il sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -2/5 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ed ha soluzione

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La funzione $f(x)$ che verifica l'equazione iniziale con $n = 3$ ed $\alpha = 1$, ovvero

$$f(x) = x + \int_{-1}^{1} \frac{x^3 - y^3}{x - y} f(y) dy\,,$$

si ottiene come

$$f(x) = x + \sum_{j=0}^{3} M_j(x) C_j = x + 2M_1(x) = 3x\,.$$

Verifichiamo la soluzione calcolando, con la funzione trovata e nella condizione $(\alpha, n) = (1, 3)$, il secondo membro dell'equazione

$$x + \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - y^3}{x - y} 3y dy = x + 3 \int_{-1}^{1} \left(x^2 + xy + y^2\right) y dy = x + 3x \int_{-1}^{1} y^2 dy = x + 3x \frac{2}{3} = 3x = f(x),$$

coincide con il primo membro, ne consegue che la funzione $f(x) = 3x$ è la soluzione dell'equazione integrale.