Metodi Matematici per la Fisica

Prova parziale del 7 marzo 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 3/30)

Si ottenga la somma della serie

$$\text{¤} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{(j^2+1)^2} \,.$$

Curiosità. Il simbolo ¤ è il carattere che indica una valuta monetaria il cui simbolo non è riproducibile dal sistema di caratteri usato.

Soluzione del primo problema

È una serie a segno fisso, definiamo la funzione di lavoro

$$f(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \,,$$

che ha due poli doppi nei punti $z = \pm i$ e poli semplici in corrispondenza dei numeri relativi ad eccezione dell'origine, che è invece uno zero semplice. Consideriamo la successione di integrali

$$\left\{ J_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} f(z)dz \right\}_{n\in\mathbb{N}} \,,$$

dove i percorsi d'integrazione sono le circonferenze centrate nell'origine di raggi semi-interi $n+1/2$, con $n \in \mathbb{N}$, percorsi in verso anti-orario. In particolare, l'n-esima circonferenza avvolge i due poli in $z = \pm i$ e quelli in corrispondenza dei numeri relativi compresi tra $-n$ e n ad eccezione dello zero, quindi il valore dell'n-esimo integrale si può ottenere con il teorema dei residui come

$$\begin{aligned}
J_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz &= \sum_{j=1}^{n} \left(\operatorname{Res}\left[\pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, j \right] + \operatorname{Res}\left[\pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, -j \right] \right) \\
&\quad + \operatorname{Res}\left[\pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, -i \right] + \operatorname{Res}\left[\pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, i \right] \\
&= 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{(j^2+1)^2} + \operatorname{Res}\left[\pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, -i \right] + \operatorname{Res}\left[\pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, i \right] \\
&= 2\,\text{¤} + \operatorname{Res}\left[\pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, -i \right] + \operatorname{Res}\left[\pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2}, i \right],
\end{aligned}$$

dove il primo termine rappresenta il doppio della somma della serie richiesta dal problema.
Calcoliamo i residui nei poli doppi $\pm i$,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\pi\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{z^2}{(z^2+1)^2},\pm i\right] &= \pi\frac{d}{dz}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{z^2}{(z\pm i)^2}\bigg|_{\pm i}\\
&= \pi\left(-\pi\frac{z^2}{(z\pm i)^2}-\pi\frac{\cos^2(\pi z)}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}\frac{z^2}{(z\pm i)^2}+\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{2z}{(z\pm i)^2}-2\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{z^2}{(z\pm i)^3}\right)_{\pm i}\\
&= \pi\left(-\pi\frac{-1}{(\pm 2i)^2}-\pi\frac{\cos^2(i\pi)}{\operatorname{sen}^2(i\pi)}\frac{-1}{(\pm 2i)^2}+\frac{\cos(i\pi)}{\pm\operatorname{sen}(i\pi)}\frac{\pm 2i}{(\pm 2i)^2}-2\frac{\cos(i\pi)}{\pm\operatorname{sen}(i\pi)}\frac{-1}{(\pm 2i)^3}\right)\\
&= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{\pi}{\operatorname{sen}^2(i\pi)}+\frac{\cosh(\pi)}{i\operatorname{sen}(i\pi)}\right)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{\operatorname{senh}^2(\pi)}-\coth(\pi)\right).
\end{aligned}
$$

Nel limite $n\to\infty$, l'integrale n-esimo tende a zero, come si può verificare facilmente dal comportamento della funzione integranda moltiplicata per la z che si annulla uniformemente sulla circonferenza centrata nell'origine di raggio $n+1/2$. Ne consegue che

$$0=\lim_{n\to\infty}J_n=2\,\text{¤}+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{\operatorname{senh}^2(\pi)}-\coth(\pi)\right),$$

da cui la somma della serie

$$\text{¤}=\frac{\pi}{4}\left(\coth(\pi)-\frac{\pi}{\operatorname{senh}^2(\pi)}\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 3,5/30)

Dopo averne definito il dominio di convergenza nel piano complesso u, si calcoli l'integrale

$$\text{֏}_u=\Pr\int_{|z|=z}\frac{z^u}{z^4-1}dz\,.$$

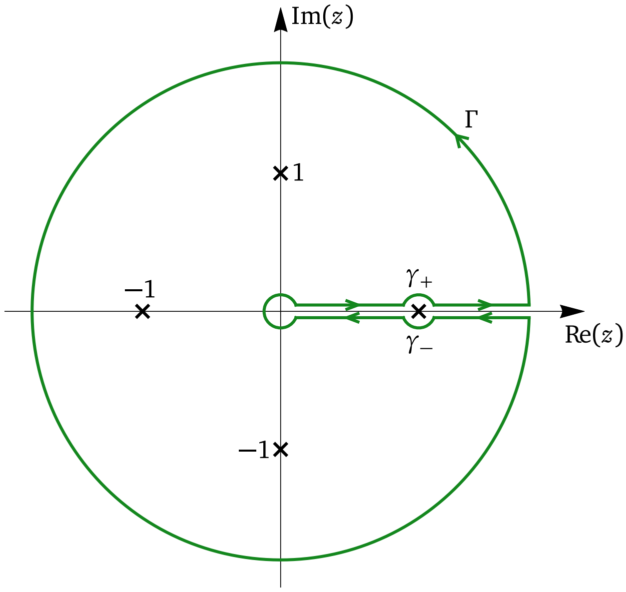
Curiosità. Il carattere ֏ è il simbolo della moneta dell'Armenia nota come *Dram*. In italiano il nome usato è anche *Dracma*. Qui accanto l'immagine di una banconota da 100000 *Dram* in corso dal 2009.

Soluzione del secondo problema

Il percorso d'integrazione è dato dalla condizione: $|z|=z$, che difinisce il semiasse reale positivo. Infatti per il modulo si ha: $|z|\in[0,\infty)$, quindi $z\in[0,\infty)$, ciò implica che, posto $z=\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)\equiv x+iy$, si hanno: $y=0$ e $x\geq 0$. Possiamo riscrivere l'integrale come

$$\text{֏}_u=\Pr\int_0^\infty\frac{x^u}{x^4-1}dx\,.$$

La condizione di convergenza nell'estremo inferiore $x=0$ è $\operatorname{Re}(u)>-1$, mentre all'estremo superiore $x\to\infty$, l'integrabilità si ha per $\operatorname{Re}(u)-4<-1$, cioè $\operatorname{Re}(u)<3$. Consegue che il dominio di convergenza nel piano complesso u è il rettangolo infinito parallelo all'asse immaginario $D=\{u:-1<\operatorname{Re}(u)<3\}$.
La funzione integranda è polidroma, definiamo la determinazione principale $\arg(z)\in(0,2\pi)$, quindi il taglio è lungo il semiasse reale positivo. Questa funzione ha quattro poli semplici nelle quattro radici quarte dell'unità, che sono i punti dell'insieme $\left\{z_k=e^{ik\pi/2}\right\}_{k=0}^3$. Di questi, solo il punto $z_0=1$ appartiene al percorso d'integrazione ed è quindi rispetto a esso che calcoliamo il valore principale.
Consideriamo il percorso chiuso nel piano complesso z mostrato in figura. È costituito da quattro archi e quattro tratti rettilinei. Dalle condizione di convergenza segue che, indicando con ϵ e R i raggi dei due archi centrati nell'origine, i contributi degli integrali su di essi sono infinitesimi nei limiti: $\epsilon\to 0$ e $R\to\infty$.



Sui due tratti rettilinei di Γ appartenenti al semipiano delle parti immaginarie positive, nel limite di avvicinamento al semiasse stesso, si ha $z \to x$, mentre sui due tratti rettilinei appartenenti al semipiano delle parti immaginarie negative, nello stesso limite, si ha $z \to xe^{2i\pi}$.
Esprimiamo l'integrale sul percorso chiuso Γ, nei limiti $\epsilon \to 0$ e $R \to \infty$, con già $\epsilon < 1$ e $R > 1$, come somma dei contributi dei tratti rettilinei e degli archi centrati in $z = 1$, e come somma dei residui, cioè

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\oint_\Gamma \frac{z^u}{z^4-1}dz &= \Pr\int_0^\infty \frac{x^u}{x^4-1}dx + e^{2i\pi u}\Pr\int_0^\infty \frac{x^u}{x^4-1}dx + \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\gamma_-}\frac{z^u}{z^4-1}dz + \int_{-\gamma_+}\frac{z^u}{z^4-1}dz\right)\\
&= \left(1-e^{2i\pi u}\right)\Pr\int_0^\infty \frac{x^u}{x^4-1}dx + \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\gamma_-}\frac{z^u}{z^4-1}dz + \int_{-\gamma_+}\frac{z^u}{z^4-1}dz\right)\\
&= -2ie^{i\pi u}\mathrm{sen}(\pi u)\mathcal{I}_u + \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\gamma_-}\frac{z^u}{z^4-1}dz + \int_{-\gamma_+}\frac{z^u}{z^4-1}dz\right)\\
&= 2i\pi\sum_{k=1}^{3}\mathrm{Res}\left[\frac{z^u}{z^4-1}, z_k = e^{ik\pi/2}\right].
\end{aligned}$$

Calcoliamo il limite della somma degli integrali sugli archi γ_- e γ_+ centrati in $z = 1$ e con raggio ϵ, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\gamma_-}\frac{z^u}{z^4-1}dz + \int_{-\gamma_+}\frac{z^u}{z^4-1}dz\right) &= -i\pi\left(\lim_{\epsilon\to 0}\frac{z^u}{z^4-1}(z-1)\Big|_{\gamma_-} + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{z^u}{z^4-1}(z-1)\Big|_{\gamma_+}\right)\\
&= -i\pi\left(\frac{\left(1e^{2i\pi}\right)^u}{4} + \frac{(1)^u}{4}\right) = -i\pi e^{iu\pi}\frac{e^{i\pi u}+e^{-iu\pi}}{4}\\
&= -\frac{i\pi e^{i\pi u}\cos(\pi u)}{2}.
\end{aligned}$$

I tre residui nei poli semplici $z = -1$ e $z = \pm i$ sono

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{z^u}{z^4-1}, -1\right] &= \lim_{z\to -1}\frac{z^u}{z^4-1}(z+1) = \frac{(-1)^u}{-4} = -\frac{e^{i\pi u}}{4},\\
\mathrm{Res}\left[\frac{z^u}{z^4-1}, -i\right] &= \lim_{z\to -1}\frac{z^u}{z^4-1}(z+i) = \frac{(-i)^u}{4i} = \frac{e^{3i\pi u/2}}{4i},\\
\mathrm{Res}\left[\frac{z^u}{z^4-1}, i\right] &= \lim_{z\to -1}\frac{z^u}{z^4-1}(z+i) = \frac{i^u}{-4i} = -\frac{e^{i\pi u/2}}{4i}
\end{aligned}$$

e la loro somma è

$$\sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left[\frac{z^u}{z^4-1}, z_k = e^{ik\pi/2}\right] = \frac{e^{i\pi u}}{4}\left(-1+\frac{e^{i\pi u/2}-e^{-i\pi u/2}}{i}\right) = \frac{e^{i\pi u}}{4}\left(-1+2\operatorname{sen}(\pi u/2)\right).$$

Usando questi risultati, otteniamo l'integrale cercato

$$\begin{aligned}
\text{֏}_u &= \left(-\frac{i\pi e^{i\pi u}\cos(\pi u)}{2} - 2i\pi\frac{e^{i\pi u}}{4}\left(-1+2\operatorname{sen}(\pi u/2)\right)\right)\frac{1}{2ie^{i\pi u}\operatorname{sen}(\pi u)} \\
&= \left(-\cos(\pi u)+1-2\operatorname{sen}(\pi u/2)\right)\frac{\pi}{4\operatorname{sen}(\pi u)} \\
&= \left(2\operatorname{sen}^2(\pi u/2)-2\operatorname{sen}(\pi u/2)\right)\frac{\pi}{8\operatorname{sen}(\pi u/2)\cos(\pi u/2)} \\
&= \left(\operatorname{sen}(\pi u/2)-1\right)\frac{\pi}{4\cos(\pi u/2)},
\end{aligned}$$

riscriviamo il risultato finale come

$$\text{֏}_u = \frac{\pi}{4}\left(\tan(\pi u/2) - \frac{1}{\cos(\pi u/2)}\right).$$

È interessante osservare che il dominio di analiticità di questa funzione, interpretata come una funzione della variabile complessa u, è più ampio del dominio D in cui converge la sua rappresentazione integrale.

Terzo problema (punteggio massimo: 3/30)

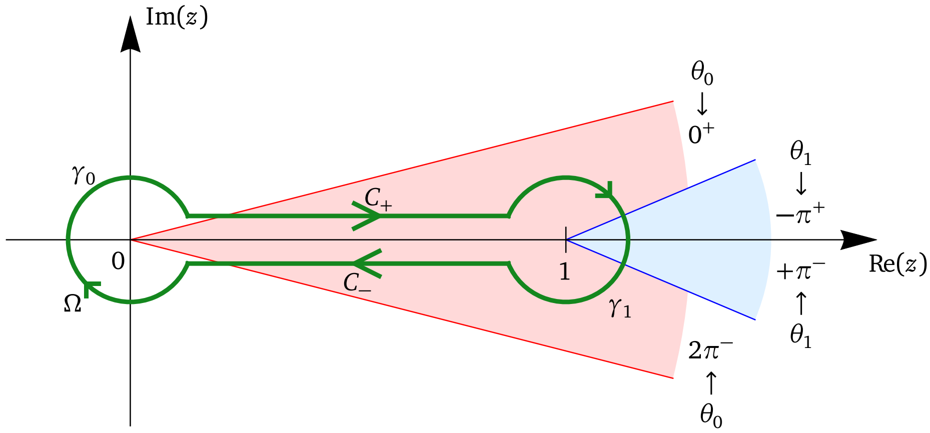
Si calcoli l'integrale

$$\text{₼} = \int_0^1 \left(x^4+1\right)\sqrt{x-x^2}\,dx\,.$$

Curiosità. Il carattere ₼ è il simbolo della moneta dell'Azerbaigian nota come *Manat*. Qui accanto l'immagine di una banconota da un *Manat* in corso dal 2009 al 2017.

Soluzione del terzo problema

La funzione integranda è polidroma, ha punti di diramazione in corrispondenza degli zeri del polinomio di secondo grado argomento della radice quadrata, ovvero: $d_0 = 0$ e $d_1 = 1$.



Definiamo la fase di questo polinomio di secondo grado in modo tale che la discontinuità dovuta alla polidromia coincida con il percorso d'integrazione, che è il segmento reale $[0,1]$, che ha i punti di diramazione come estremi. Riscriviamo il polinomio come

$$x-x^2 \to z-z^2 = z(1-z) = |z|e^{i\theta_0}|1-z|e^{i\theta_1}, \qquad \begin{cases} \theta_0 \in (0,2\pi) \\ \theta_1 \in (-\pi,\pi) \end{cases} .$$

In questo modo il fattore z, responsabile del punto di diramazione d_0 nell'origine, ha la fase θ_0 che varia in $(0,2\pi)$ e quindi genera un taglio, ovvero una discontinuità lungo il semiasse reale positivo. La fase θ_0 tende zero sul bordo superiore del taglio e a 2π su quello inferiore, come mostrato in figura, in prossimità dello spicchio di cerchio centrato nell'origine di colore rosso chiaro.
Il fattore $(1-z)$, invece è responsabile della diramazione che si origina in $d_1 = 1$ e, con la scelta della determinazione $(-\pi,\pi)$ per la fase θ_1, genera anch'esso un taglio in avanti lungo la semiretta reale $(1,\infty)$, come conseguenza del segno meno della z. Inoltre, sempre a seguito di questo segno, la fase θ_1 tende a $-\pi$ sul bordo superiore del taglio e a π su quello inferiore, come mostrato nella figura a margine dello spicchio di circonferenza centrato in $z=1$ di colore blu chiaro.
Con questa definizione delle fasi, la discontinuità lungo la semiretta reale $(1,\infty)$ si cancella e rimane solo quella nel segmento $[0,1]$, dovuta al solo fattore z. Infatti, la radice quadrata sui bordi superiore e inferiore del segmento d'integrazione $[0,1]$ assume i valori

$$\sqrt{z-z^2} \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} \sqrt{|z||1-z|}e^{i(\theta_0+\theta_1)/2} = \sqrt{x(1-x)}e^{i(0^+ + 0^-)/2} = \sqrt{x-x^2} & \text{con: } z = x+i\epsilon\,,\ x\in[0,1] \\ \sqrt{|z||1-z|}e^{i(\theta_0+\theta_1)/2} = \sqrt{x(1-x)}e^{i(2\pi^- + 0^+)/2} = -\sqrt{x-x^2} & \text{con: } z = x-i\epsilon\,,\ x\in[0,1] \end{cases} .$$

È importante notare che la fase θ_1 lungo il segmento reale $[0,1]$ passa per zero, o meglio tende a zero per valori negativi sul bordo superiore e per valori positivi sul bordo inferiore.
Consideriamo il percorso chiuso Ω mostrato in verde nella figura, costituito dall'unione di due tratti rettilinei, C_+ e C_-, e due archi, γ_0 e γ_1, cioè

$$\begin{aligned} \Omega = & \underbrace{\left(-\left\{z : z = \epsilon e^{i\omega}, \omega\in(1,2\pi-1)\right\}\right)}_{-\gamma_0} \cup \underbrace{[\epsilon+i\epsilon, 1-\epsilon+i\epsilon]}_{C_+} \\ & \cup \underbrace{\left(-\left\{z : z = 1+\epsilon e^{i\omega}, \omega\in(-\pi+1,\pi-1)\right\}\right)}_{-\gamma_1} \cup \underbrace{[1-\epsilon-i\epsilon, \epsilon-i\epsilon]}_{C_-}, \end{aligned}$$

dove il segno meno per gli archi indica che il verso di percorrenza è negativo, cioè orario.
Nel limite $\epsilon \to 0^+$ i contributi sugli archi sono infinitesimi, infatti, su γ_0 si ha $z = \epsilon e^{i\omega}$, quindi

$$0 \le \left|\int_{\gamma_0} \sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right)dz\right| \le \int_{\gamma_0} \left|\sqrt{z-z^2}\right|\left|z^4+1\right||dz| \le \int_1^{2\pi-1} \sqrt{\epsilon+\epsilon^2}\left(\epsilon^4+1\right)\epsilon\, d\omega \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,.$$

Per il contributo su γ_1, con $z = 1+\epsilon e^{i\omega}$, si ha

$$\begin{aligned} 0 \le \left|\int_{\gamma_1} \sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right)dz\right| \ &\le\ \int_{-\pi+1}^{\pi-1} \epsilon^{1/2}\left|\sqrt{1+\epsilon e^{i\omega}}\right|\left|\left(1+\epsilon e^{i\omega}\right)^4+1\right|\epsilon\, d\omega \\ &\le\ \int_{-\pi+1}^{\pi-1} \sqrt{\epsilon+\epsilon^2}\left((1+\epsilon)^4+1\right)\epsilon\, d\omega \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

I contributi sui tratti rettilinei C_+ e C_-, nel limite $\epsilon \to 0^+$ valgono

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{C_\pm} \sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right)dz = \pm\int_0^1 \left(\pm\sqrt{x-x^2}\right)\left(x^4+1\right)dx\,,$$

dove il doppio segno prima dell'integrale tiene conto dei versi opposti di percorrenza di C_+ e C_-, mentre il doppio segno prima della radice quadrata consegue alla discontinuità lungo il segmento d'integrazione discussa nella pagina precedente. I due doppi segni si compensano cosicché il limite della somma dei due contributi coincide con il doppio dall'integrale cercato $\pitchfork$, quindi

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\Omega} \sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right)dz = 2\pitchfork.$$

Lo stesso integrale può essere calcolato usando il teorema dei residui, poiché la funzione integranda non ha singolarità al finito, si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{\Omega}\sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right)dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right),\infty\right],$$

ne consegue che l'integrale cercato vale

$$\pitchfork = i\pi\,\mathrm{Res}\left[\sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right),\infty\right].$$

Calcoliamo il residuo all'infinito con la sostituzione $z = 1/w$ nell'integranda, ovvero

$$\mathrm{Res}\left[\sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right),\infty\right] = -\mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{1}{w}-\frac{1}{w^2}}\left(\frac{1}{w^4}+1\right)\frac{1}{w^2},0\right].$$

La funzione di cui dobbiamo calcolare il residuo nell'origine è

$$\sqrt{\frac{1}{w}-\frac{1}{w^2}}\left(\frac{1}{w^4}+1\right)\frac{1}{w^2} = \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{1-w}\left(1+w^4\right)}{w^7},$$

dove lasciamo inespressa la radice di meno uno, rimandando la discussione sulla determinazione. Per il calcolo del residuo usiamo la serie di Laurent centrata nell'origine della funzione integranda. Partiamo dalla serie di Taylor della radice quadrata

$$\sqrt{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dw^k}\sqrt{1-w}\bigg|_0 w^k.$$

Le derivate sono

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw}\sqrt{1-w}\bigg|_0 &= -\frac{1}{2}\,(1-w)^{-1/2}\big|_0 = -\frac{1}{2},\\
\frac{d^2}{dw^2}\sqrt{1-w}\bigg|_0 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1-w)^{-3/2}\big|_0 = -\frac{1}{2^2},\\
\frac{d^3}{dw^3}\sqrt{1-w}\bigg|_0 &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1-w)^{-5/2}\big|_0 = -\frac{3}{2^3},\\
\frac{d^4}{dw^4}\sqrt{1-w}\bigg|_0 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(1-w)^{-7/2}\big|_0 = -\frac{5\cdot 3}{2^4},\\
\cdots &= \cdots\\
\frac{d^k}{dw^k}\sqrt{1-w}\bigg|_0 &= -\frac{(2k-3)!!}{2^k},
\end{aligned}$$

quindi

$$\sqrt{1-w} = 1-\frac{w}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{k!2^k}w^k.$$

Usando questo risultato, la serie di Laurent della funzione completa è

$$\sqrt{\frac{1}{w}-\frac{1}{w^2}}\left(\frac{1}{w^4}+1\right)\frac{1}{w^2} = \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{1-w}\left(1+w^4\right)}{w^7} = \sqrt{-1}\left(\frac{1}{w^7}+\frac{1}{w^3}\right)\left(1-\frac{w}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2k-3)!!}{k!2^k}w^k\right) = \sum_{j=-7}^{\infty}C_j w^j,$$

il coefficiente della potenza $1/w$, C_{-1}, che coincide con il residuo della funzione, è

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{1}{w}-\frac{1}{w^2}}\left(\frac{1}{w^4}+1\right)\frac{1}{w^2},0\right] = C_{-1} &= \sqrt{-1}\left(-\frac{(2k-3)!!}{k!2^k}\bigg|_{k=6}-\frac{(2k-3)!!}{k!2^k}\bigg|_{k=2}\right)\\
&= \sqrt{-1}\left(-\frac{9!!}{6!2^6}-\frac{1}{2!2^2}\right)\\
&= -\sqrt{-1}\,\frac{149}{1024},
\end{aligned}$$

da cui

$$\operatorname{Res}\left[\sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right),\infty\right]=-\operatorname{Res}\left[\sqrt{\frac{1}{w}-\frac{1}{w^2}}\left(\frac{1}{w^4}+1\right)\frac{1}{w^2},0\right]=\sqrt{-1}\,\frac{149}{1024}\,.$$

L'integrale cercato è

$$\pitchfork=i\pi\operatorname{Res}\left[\sqrt{z-z^2}\left(z^4+1\right),\infty\right]=i\pi\sqrt{-1}\,\frac{149}{1024}\,.$$

A questo punto possiamo risolvere l'ambiguità nella scelta del segno della radice quadrata di meno uno, cioè $\sqrt{-1}=\pm i$, scelta che dovremmo fare coerentemente con le determinazioni delle fasi θ_0 e θ_1, semplicemente studiando la positività o negatività dell'integrale. Infatti, poiché nell'intervallo d'integrazione la funzione integranda è positiva, tale deve essere il valore dell'integrale, quindi scegliamo $\sqrt{-1}=-i$. In questo modo, si ha il valore positivo

$$\pitchfork=\frac{149\pi}{1024}\,,$$

che rappresenta il risultato finale.

Quarto problema (punteggio massimo: 3/30)

Si ottenga la serie di Laurent centrata nell'origine e convergente in $z=i/2$ della funzione

$$\text{₪}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{z^4-k^2}\,.$$

Curiosità. Il carattere ₪ è il simbolo della moneta di Israele nota come *Shekel*. In italiano il nome usato è anche *Siclo*. Qui accanto l'immagine di una banconota da 100 *Shekel* in corso dal 2017.

Soluzione del quarto problema

La rappresentazione della funzione $\text{₪}(z)$ è il suo sviluppo di Mittag-Leffler, infatti si può riscrivere come

$$\begin{aligned}\text{₪}(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{z^4-k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{1}{z^2-k}-\frac{1}{z^2+k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{k}}\left[\frac{1}{2\sqrt{k}}\left(\frac{1}{z-\sqrt{k}}-\frac{1}{z+\sqrt{k}}\right)-\frac{1}{2i\sqrt{k}}\left(\frac{1}{z-i\sqrt{k}}+\frac{1}{z+i\sqrt{k}}\right)\right]\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k}\frac{1}{z-\sqrt{k}}-\frac{1}{4k}\frac{1}{z+\sqrt{k}}-\frac{1}{4ik}\frac{1}{z-i\sqrt{k}}+\frac{1}{4ik}\frac{1}{z+i\sqrt{k}},\right)\end{aligned}$$

da cui si evince che la funzione ha poli semplici nei punti degli insiemi:

$$\left\{\sqrt{k}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad\left\{-\sqrt{k}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad\left\{i\sqrt{k}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad\left\{-i\sqrt{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

e i residui sono rispettivamente gli elementi degli insiemi:

$$\left\{\frac{1}{4\pi}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad\left\{-\frac{1}{4\pi}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad\left\{-\frac{1}{4i\pi}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad\left\{\frac{1}{4i\pi}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

L'origine non è una singolarità, i poli più vicini, equidistanti dall'origine sono $z=\pm1$ e $z=\pm i$, ne consegue che la serie di Laurent richiesta è quella convergente nel cerchio unitario $\{z:|z|<1\}$ e si riduce, quindi, alla serie di Taylor. Per ottenerne i coefficienti, sfruttiamo la serie geometrica, considerando ciascun termine della serie che rappresenta

la funzione $\text{₪}(z)$.
Infatti, mettendo in evidenza $-k^2$ a denominatore di ciascun termine si ha

$$\text{₪}(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \frac{1}{1 - z^4/k^2} \,,$$

poiché $|z| < 1$, $\left|z^4/k^2\right| = |z^4|/k^2 < 1$, per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi ogni termine $1/\left(1 - z^4/k^2\right)$ della serie può essere espresso come somma della serie geometrica di ragione z^4/k^2, allora

$$\text{₪}(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \frac{1}{1 - z^4/k^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{4j}}{k^{2j}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{4j}}{k^{2j+3/2}} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n \,,$$

nell'ultimo membro abbiamo l'espressione formale della serie di Laurent. La legge multipla che definisce i coefficienti di Laurent $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ è

$$C_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ -\sum_{k=1}^{\infty} k^{-n/2-3/2} & n = 4j \,, \forall\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases} .$$

Quinto problema (punteggio massimo: 3/30)

Si determinino i valori dei parametri dell'insieme $\{a_m\}_{m=1}^{5}$, affinché la funzione

$$\text{৳}(z) = \frac{1}{z \arctan^4(z)} + \frac{1}{z \,\mathrm{senh}^4(z)} + \sum_{m=1}^{5} a_m z^{-m}$$

abbia una singolarità eliminabile nell'origine.

Curiosità. Il carattere ৳ è il simbolo della moneta del Bangladesh nota come *Taka*. Qui accanto l'immagine di una banconota da 200 *Taka* in corso dal 2020.

Soluzione del quinto problema

Richiedere che la funzione $\text{৳}(z)$ abbia una singolarità eliminabile nell'origine equivale alla richiesta che la serie di Laurent della stessa funzione centrata nell'origine abbia i coefficienti della parte principale nulli, ovvero che la serie di Laurent si riduca alla sola parte regolare e quindi alla serie di Taylor. Ciò implica l'analiticità della funzione in un disco di raggio finito centrato nell'origine.
Per ottenere la serie di Laurent centrata nell'origine della funzione data, usiamo le serie di Taylor note delle funzioni arcotangente e seno iperbolico con lo stesso centro, unitamente alle proprietà della serie geometrica e delle sue derivate.
La derivata prima della funzione arcotangente, nel limite $z \to 0$, può essere espressa in forma di serie geometrica, infatti

$$\frac{d \arctan(z)}{dz} = \frac{1}{1 + z^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j z^{2j} \,,$$

integrando in dz' tra 0 e z si ha la serie di Taylor, cioè

$$\arctan(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{2j+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \mathcal{O}\left(z^7\right) .$$

La serie di Taylor centrata nell'origine della funzione seno iperbolico è

$$\mathrm{senh}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \,.$$

Infine consideriamo la serie geometrica di ragione α, con $|\alpha| < 1$, si ha

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l \,,$$

la derivata n-esima, con $n \in \mathbb{N}$, è

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \frac{1}{1-\alpha} = \frac{n!}{(1-\alpha)^{n+1}} = \sum_{l=n}^{\infty} l(l-1)\cdots(l-n+1)\alpha^{l-n} \,.$$

Per la derivata terza, cui siamo interessati, abbiamo

$$\frac{1}{(1-\alpha)^4} = \frac{1}{3!} \sum_{l=4}^{\infty} l(l-1)(l-2)\alpha^{l-3} = 1 + 4\alpha + 10\alpha^2 + 20\alpha^3 + \mathcal{O}\left(\alpha^4\right) .$$

Usando questi risultati, gli sviluppi in serie di potenze delle quarte potenze degli inversi delle funzioni arcotangente e seno iperbolico sono

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\arctan^4(z)} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{2j+1} \right)^{-4} = \frac{1}{z^4} \left(1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \mathcal{O}\left(z^6\right) \right)^{-4} \\
&= \frac{1}{z^4} \left[1 + 4 \left(\frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{5} + \mathcal{O}\left(z^6\right) \right) + 10 \left(\frac{z^2}{3} - \frac{z^4}{5} + \mathcal{O}\left(z^6\right) \right)^2 + \cdots \right] ; \\
\frac{1}{\operatorname{sen}^4(z)} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \right)^{-4} = \frac{1}{z^4} \left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}\left(z^6\right) \right)^{-4} \\
&= \frac{1}{z^4} \left[1 - 4 \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}\left(z^6\right) \right) + 10 \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \mathcal{O}\left(z^6\right) \right)^2 + \cdots \right] .
\end{aligned}$$

La serie di potenze, quindi la serie di Laurent della somma divisa per z, cioè della funzione data meno il termine dipendente dai cinque parametri da determinare è

$$\begin{aligned}
f(z) - \sum_{m=1}^{5} a_m z^{-m} &= \frac{1}{z \arctan^4(z)} + \frac{1}{z \operatorname{sen}^4(z)} \\
&= \frac{1}{z^5} \left(2 + z^2 \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3!} \right) + z^4 \left(-\frac{4}{5} - \frac{4}{5!} + \frac{10}{3^2} + \frac{10}{(3!)^2} \right) + \mathcal{O}\left(z^6\right) \right) \\
&= \frac{2}{z^5} + \frac{2}{3}\frac{1}{z^3} + \frac{5}{9}\frac{1}{z} + \mathcal{O}(z) \,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\mathfrak{h}(z) = (2 + a_5) \frac{1}{z^5} + a_4 \frac{1}{z^4} + \left(\frac{2}{3} + a_3 \right) \frac{1}{z^3} + a_2 \frac{1}{z^2} + \left(\frac{5}{9} + a_1 \right) \frac{1}{z} + \mathcal{O}(z) \equiv \sum_{t=-\infty}^{\infty} C_t z^t \,.$$

I coefficienti della parte principale della serie di Laurent, elementi dell'insieme $\{C_t\}_{t=-\infty}^{-1}$, sono

$$C_t = \begin{cases} 0 & t < -5 \\ 2 + a_5 & t = -5 \\ a_4 & t = -4 \\ 2/3 + a_3 & t = -3 \\ a_2 & t = -2 \\ 5/3 + a_1 & t = -1 \end{cases} .$$

Al fine di annullare tutti i coefficienti, poniamo

$$a_5 = -2 \,, \qquad a_4 = 0 \,, \qquad a_3 = -\frac{2}{3} \,, \qquad a_2 = 0 \,, \qquad a_1 = -\frac{5}{3} \,,$$

sono questi i valori dei parametri richiesti dal problema.

Sesto problema (punteggio massimo: 3/30)

Dopo aver dimostrato la convergenza del prodotto infinito

$$\text{₫}_k = \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{k^2}{j^2}\right)\prod_{j'=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{j'^2}\right), \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

se ne verifichi il valore numerico

$$\text{₫}_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\,.$$

Utilità. Potrebbe essere utile usare un'espansione di Weierstrass.

Curiosità. Il carattere ₫ è il simbolo della moneta del Vietnam nota come *Dong*. Qui accanto l'immagine di una banconota da 500000 *Dong* in corso dal 2017.

Soluzione del sesto Problema

La convergenza del prodotto infinito si ottiene come conseguenza dei teoremi di concatenazione prodotto infinito-serie e dell'assoluta convergenza. La tesi del primo sancisce che: data una successione di numeri reali positivi $\{a_l\}_{l=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$ il prodotto infinito e la serie

$$\prod_{l=1}^{\infty}(1+a_l)\,, \qquad \sum_{l=1}^{\infty} a_l\,,$$

hanno le stesse proprietà di convergenza, ovvero la convergenza dell'uno equivale alla convergenza dell'altra, così come la divergenza dell'uno equivale alla divergenza dell'altra. Il secondo che la convergenza assoluta del prodotto infinito implica quella normale, ovvero

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1+|b_m|) \qquad \Rightarrow \qquad \prod_{m=1}^{\infty}(1+b_m)\,,$$

dove $\{b_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$.
Nel caso in esame, il prodotto infinito è quello relativo alla successione $\left\{a_l = k^2/l^2\right\}_{l\in\mathbb{N}\setminus k}$, con un generico $k \in \mathbb{N}$. La serie corrispondente converge, si ha infatti

$$\sum_{l\in\mathbb{N}\setminus k}\frac{k^2}{l^2} = k^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2} - 1 = \frac{\pi^2 k^2}{6} - 1\,,$$

segue la convergenza del prodotto infinito,

$$\prod_{l\in\mathbb{N}\setminus k}\left(1+\frac{k^2}{l^2}\right),$$

che può essere interpretata come la convergenza assoluta

$$\prod_{l\in\mathbb{N}\setminus k}\left(1+\left|-\frac{k^2}{l^2}\right|\right),$$

che implica, a sua volta, quella normale, cioè quella del prodotto infinito in esame,

$$\prod_{l\in\mathbb{N}\setminus k}\left(1-\frac{k^2}{l^2}\right).$$

Consideriamo l'espansione di Weierstrass della funzione

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}\,,$$

che ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$. In generale, per una funzione intera che non si annulla nell'origine, avente zeri nei punti dell'insieme $\{p_j\}_j$, con molteplicità $\{m_j\}_j \subset \mathbb{N}$, si ha l'espansione di Weierstrass

$$f(z) = f(0)e^{zf'(0)/f(0)}\prod_j \left(1-\frac{z}{p_j}\right)^{m_j} e^{zm_j/p_j}\,.$$

Nel caso in esame: $p_j = z_j = j\pi$ e $m_j = 1$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, inoltre, i valori della funzione e della sua derivata prima nell'origine sono

$$f(0) = 1\,, \qquad f'(0) = \left.\frac{z\cos(z) - \operatorname{sen}(z)}{z^2}\right|_{z=0} = 0\,,$$

quindi l'espansione di Weierstrass è

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(j\pi)^2}\right).$$

La derivata prima è

$$\frac{df}{dz}(z) = \frac{z\cos(z)-\operatorname{sen}(z)}{z^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2z}{(m\pi)^2}\prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{z^2}{(j\pi)^2}\right)\prod_{j'=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(j'\pi)^2}\right).$$

Il valore nel k-esimo zero, per ogni $k \in \mathbb{N}$, ovvero in $z = z_k = k\pi$ ottenuto dal membro di sinistra è

$$\frac{df}{dz}(z_k) = \frac{z_k\cos(z_k)-\operatorname{sen}(z_k)}{z_k^2} = \frac{(-1)^k}{k\pi}\,.$$

Per il membro destro si ha

$$\begin{aligned}
-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2z_k}{(m\pi)^2}\prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{z_k^2}{(j\pi)^2}\right)\prod_{j'=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{z_k^2}{(j'\pi)^2}\right) &= -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k}{m^2\pi}\quad\underbrace{\prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{k^2}{j^2}\right)\prod_{j'=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{j'^2}\right)}\\
&= \delta_{mk}\prod_{j=1}^{m-1}\left(1-\frac{k^2}{j^2}\right)\prod_{j'=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{j'^2}\right)\\
&= -\frac{2}{k\pi}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{k^2}{j^2}\right)\prod_{j'=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{j'^2}\right),
\end{aligned}$$

dove il risultato in termini della delta di Kronecker si ottiene poiché il solo prodotto infinito non nullo è quello che esclude il fattore con il k-esimo zero, che si ha per $m = k$. Uguagliando i valori per il membro sinistro e destro, si ha

$$\frac{(-1)^k}{k\pi} = -\frac{2}{k\pi}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{k^2}{j^2}\right)\prod_{j'=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{j'^2}\right),$$

da cui si arriva all'identità richiesta

$$\underline{\mathfrak{d}}_k = \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{k^2}{j^2}\right)\prod_{j'=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{k^2}{j'^2}\right) = \frac{(-1)^{k+1}}{2}\,.$$