Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 7 febbraio 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 7/30)

Si calcoli l'integrale

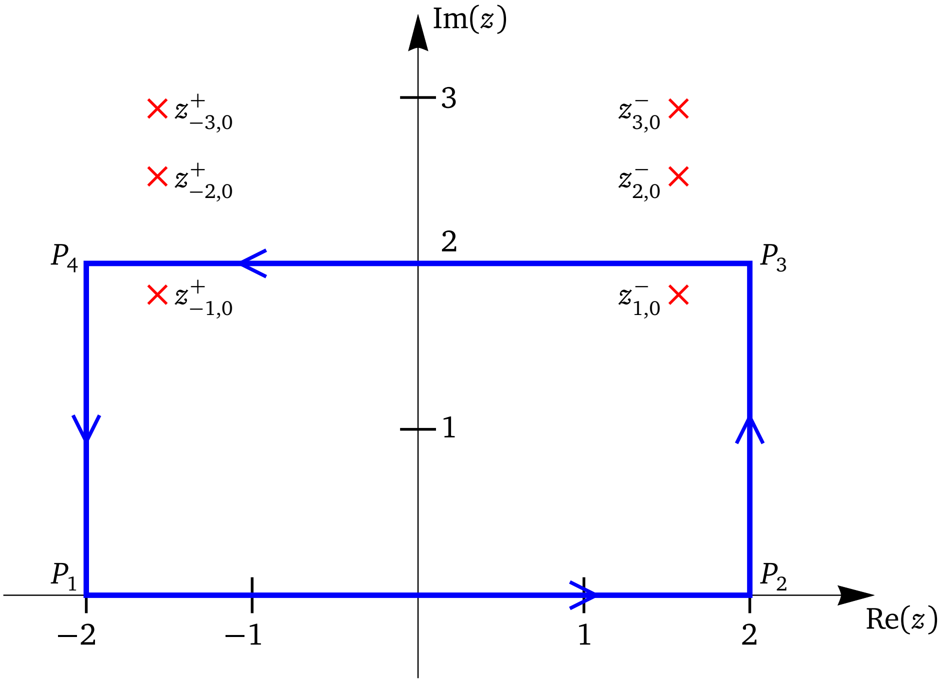
$$S = \oint_Q \frac{z}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(z))} dz ,$$

dove Q è il rettangolo, orientato in senso antiorario, di vertici

$$P_1 = -2 , \qquad P_2 = 2 , \qquad P_3 = 2 + 2i , \qquad P_4 = -2 + 2i .$$

Soluzione del primo problema

Il percorso di integrazione ed alcuni dei poli della funzione integranda sono mostrati in figura.



La funzione integranda ha singolarità nei punti in cui la funzione seno assume valori multipli relativi di π, ovvero in ogni z_k tale che $\operatorname{sen}(z_k) = k\pi$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Ovviamente, alla luce della periodicità della funzione seno, ogni z_k definisce un insieme più ampio di singolarità $\left\{z_{k,m} \equiv z_k + 2m\pi\right\}_{k,m\in\mathbb{Z}}$. L'espressione esplicita della singolarità z_k si ottiene risolvendo l'equazione $\operatorname{sen}(z_k) = k\pi$, ovvero

$$e^{iz_k} - e^{-iz_k} = 2ik\pi \qquad \Rightarrow \qquad e^{2iz_k} - 2ik\pi e^{iz_k} - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^{iz_k^\pm} = ik\pi \pm \sqrt{1 - k^2\pi^2} .$$

In un solo caso la soluzione $z_k^\pm$ è reale, quello con $k=0$, infatti

$$e^{iz_0^\pm} = \pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} z_{0,m}^+ = 2m\pi \\ z_{0,m}^- = (2m+1)\pi \end{cases} \qquad m \in \mathbb{Z}\,.$$

La singolarità $z_{0,0}^+ = 0$, che appartiene al percorso di integrazione, è eliminabile, si ha

$$\lim_{z\to z_{0,0}^+} \frac{z}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(z))} = \left.\frac{1}{\cos(z)\cos(\operatorname{sen}(z))}\right|_{z=0} = 1\,.$$

Distinguiamo le altre singolarità, ovvero quelle per $k \neq 0$, nei due sottoinsiemi caratterizzati da $k \equiv k^+ > 0$ e $k \equiv k^- < 0$, o meglio $k^+ = 1, 2, \ldots$ e $k^- = -1, -2, \ldots$, si hanno quindi

$$\begin{cases} e^{iz_{k^+}^\pm} = i\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) = \dfrac{i}{k\pi \mp \sqrt{k^2\pi^2-1}} & k>0 \\[2ex] e^{iz_{k^-}^\pm} = -i\left(-k\pi \mp \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) = \dfrac{-i}{-k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}} & k>0 \end{cases}.$$

Passando ai logaritmi

$$\begin{cases} z_{k^+}^\pm = -i\ln\left[i\left(k\pi\pm\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] = -i\left[\mathrm{Ln}(i) + \ln\left(k\pi\pm\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] = -i\mathrm{Ln}(i)\mp i\ln\left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \\[2ex] z_{k^-}^\pm = -i\ln\left[-i\left(-k\pi\mp\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] = -i\left[\mathrm{Ln}(-i) + \ln\left(-k\pi\mp\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\[2ex] \qquad = -i\mathrm{Ln}(-i)\pm i\ln\left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \end{cases},$$

la distinzione dei due casi con k interi positivi e negativi permette di avere argomenti per i logaritmi sempre positivi. Scriviamo esplicitamente i logaritmi dell'unità immaginaria e del suo opposto in determinazione principale $(-\pi, \pi)$ come

$$\mathrm{Ln}(\pm i) = \ln(\pm i) + 2in\pi = \pm i\frac{\pi}{2} + 2in\pi = i\frac{\pi}{2}(\pm 1 + 4n)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Per quanto visto, le singolarità in forma esplicita sono

$$\begin{cases} z_{k^+,n}^\pm = \dfrac{\pi}{2}(1+4n) \mp i\ln\left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,, \\[2ex] z_{k^-,n}^\pm = \dfrac{\pi}{2}(-1+4n) \pm i\ln\left(-k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Dobbiamo introdurre anche il termine additivo $2m\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$, per tener conto delle periodicità della funzione seno, otteniamo così la dipendenza da tre indici interi, ma due di essi, m e n, possono essere inglobati in un unico indice, ovvero

$$\begin{cases} z_{k^+,n,m}^\pm = \dfrac{\pi}{2}(1+4n) \mp i\ln\left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) + 2\pi m = \dfrac{\pi}{2}\left[1+4(n+m)\right] \mp i\ln\left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,, \\[2ex] z_{k^-,n,m}^\pm = \dfrac{\pi}{2}(-1+4n) \pm i\ln\left(-k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) + 2\pi m = \dfrac{\pi}{2}\left[-1+4(n+m)\right] \mp i\ln\left(-k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,, \end{cases}$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$, il che è equivalente a scrivere

$$\begin{cases} z_{k^+,j}^\pm = \dfrac{\pi}{2}(1+4j) \mp i\ln\left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,, \\[2ex] z_{k^-,j}^\pm = \dfrac{\pi}{2}(-1+4j) \pm i\ln\left(-k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,, \end{cases} \qquad j \in \mathbb{Z}\,. \tag{1}$$

Queste singolarità sono poli semplici come si evince dai limiti

$$\lim_{z\to z^{\pm}_{k^+,j}} \frac{z}{\text{sen}(\text{sen}(z))}\left(z - z^{\pm}_{k^+,j}\right) = \frac{z_{k^+,j}}{\cos\left(z_{k^+,j}\right)\cos\left(\text{sen}\left(z_{k^+,j}\right)\right)} = \frac{z_{k^+,j}}{\cos\left(z_{k^+,j}\right)\cos(k\pi)} = (-1)^k \frac{z_{k^+,j}}{\cos\left(z_{k^+,j}\right)}\,,$$

$$\lim_{z\to z^{\pm}_{k^-,j}} \frac{z}{\text{sen}(\text{sen}(z))}\left(z - z^{\pm}_{k^-,j}\right) = \frac{z_{k^-,j}}{\cos\left(z_{k^-,j}\right)\cos\left(\text{sen}\left(z_{k^-,j}\right)\right)} = \frac{z_{k^-,j}}{\cos\left(z_{k^-,j}\right)\cos(k\pi)} = (-1)^k \frac{z_{k^-,j}}{\cos\left(z_{k^-,j}\right)}\,,$$

dove si è usato: $\text{sen}\left(z^{\pm}_{k^{\pm},j}\right) = k\pi$. Il valore della funzione coseno nei punti $z^{\pm}_{k^{\pm},j}$ si ottiene con il calcolo esplicito, consideriamo separatamente i due casi $z^{\pm}_{k^+,j}$ e $z^{\pm}_{k^-,j}$,

$$\begin{aligned}
\cos\left(z^{\pm}_{k^+,j}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(1+4j)\right)\cos\left(i\ln\left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right) \pm \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(1+4j)\right)\text{sen}\left(i\ln\left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right)\\
&= \pm\text{sen}\left(i\ln\left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right)\\
&= \pm\frac{e^{-\ln\left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)} - e^{\ln\left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)}}{2i}\\
&= \pm\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}} - \left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right]\,,
\end{aligned}$$

sfruttando la relazione $\left(\pm k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)^{-1} = \pm k\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}$ si ha

$$\cos\left(z^{\pm}_{k^+,j}\right) = \pm\frac{1}{2i}\left(k\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1} - k\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) = \mp\frac{\sqrt{k^2\pi^2-1}}{i} = \pm i\sqrt{k^2\pi^2-1}\,.$$

Per i valori negativi di k, indicati con k^-, si ha

$$\begin{aligned}
\cos\left(z^{\pm}_{k^-,j}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(-1+4j)\right)\cos\left(i\ln\left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right) \mp \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}(-1+4j)\right)\text{sen}\left(i\ln\left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right)\\
&= \pm\text{sen}\left(i\ln\left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right)\\
&= \pm\frac{e^{-\ln\left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)} - e^{\ln\left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)}}{2i}\\
&= \pm\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}} - \left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right]\\
&= \pm\frac{1}{2i}\left(-k\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1} + k\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) = \mp\frac{\sqrt{k^2\pi^2-1}}{i} = \pm i\sqrt{k^2\pi^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Essendo queste quantità non nulle si evince quanto anticipato, ovvero che le singolarità sono dei poli semplici.
Dalla definizione dei poli data in Eq. (1), si ha che le parti reali sono multipli dispari positivi e negativi di $\pi/2$, quindi sono interni al rettangolo Q solo quelli con parti reali uguali a $\pm\pi/2$, che si hanno solo per $j = 0$, ovvero

$$\text{Re}\left(z^{\pm}_{k^+,0}\right) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \text{Re}\left(z^{\pm}_{k^-,0}\right) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Per ciò che riguarda le parti immaginarie, abbiamo

$$\text{Im}\left(z^{\pm}_{k^+,0}\right) = \mp\ln\left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,, \qquad \text{Im}\left(z^{\pm}_{k^-,0}\right) = \pm\ln\left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,.$$

Gli argomenti dei logaritmi sono sempre maggiori di uno, quindi dobbiamo considerare solo i valori con segno positivo, segno basso nel primo caso e alto nel secondo,

$$\text{Im}\left(z^{-}_{k^+,0}\right) = \ln\left(k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,, \qquad \text{Im}\left(z^{+}_{k^-,0}\right) = \ln\left(-k\pi+\sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\,.$$

Calcoliamo esplicitamente i sei valori, coincidenti due a due, con $k = 1, 2, 3$ nel primo caso e con $k = -1, -2, -3$ nel secondo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(z_{1,0}^{-}\right) = \mathrm{Im}\left(z_{-1,0}^{+}\right) &= \ln\left(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}\right) \simeq 1.812\,,\\
\mathrm{Im}\left(z_{2,0}^{-}\right) = \mathrm{Im}\left(z_{-2,0}^{+}\right) &= \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 - 1}\right) \simeq 2.525\,,\\
\mathrm{Im}\left(z_{3,0}^{-}\right) = \mathrm{Im}\left(z_{-3,0}^{+}\right) &= \ln\left(3\pi + \sqrt{9\pi^2 - 1}\right) \simeq 2.934\,,
\end{aligned}$$

poiché soltanto $z_{1,0}^{-}$ e $z_{-1,0}^{+}$ hanno parti immaginarie comprese tra zero e 2, sono solo questi due poli ad essere interni al percorso di integrazione rettangolare Q. Per il teorema dei residui

$$S = \oint_Q \frac{z}{\mathrm{sen}(\mathrm{sen}(z))} dz = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\mathrm{sen}(\mathrm{sen}(z))}, z_{1,0}^{-}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{z}{\mathrm{sen}(\mathrm{sen}(z))}, z_{-1,0}^{+}\right]\right)\,.$$

Per calcolare i residui sfruttiamo i risultati ottenuti nel verificare l'ordine del polo. In particolare si hanno

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{z}{\mathrm{sen}(\mathrm{sen}(z))}, z_{\pm1,0}^{\mp}\right] &= \lim_{z\to z_{\pm1,0}^{\mp}} \frac{z}{\mathrm{sen}(\mathrm{sen}(z))}\left(z - z_{\pm1,0}^{\mp}\right) = \frac{z_{\pm1,0}^{\mp}}{\underbrace{\cos\left(z_{\pm1,0}^{\mp}\right)}_{\mp i\sqrt{\pi^2-1}}\underbrace{\cos\left(\mathrm{sen}\left(z_{\pm1,0}^{\mp}\right)\right)}_{\cos(\pm\pi)=-1}}\\
&= \frac{\pm\pi/2 + i\ln\left(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}\right)}{\pm i\sqrt{\pi^2 - 1}} = \frac{\pi/2 \pm i\ln\left(\pi + \sqrt{\pi^2 - 1}\right)}{i\sqrt{\pi^2 - 1}}\,.
\end{aligned}$$

Il risultato finale è

$$S = 2i\pi\frac{\pi}{i\sqrt{\pi^2 - 1}} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\pi^2 - 1}}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Dopo averne definito il dominio di convergenza, indicando un insieme di valori per il parametro $z \in \mathbb{C}$, si calcoli l'integrale

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{zx}}{e^{4x} + e^{2x} + 1} dx\,.$$

Soluzione del secondo problema

Illustriamo due procedure risolutive.

Prima procedura

Con la sostituzione $w = e^x$ si ha

$$P(z) = \int_0^{\infty} \frac{w^{z-1}}{w^4 + w^2 + 1} dw\,,$$

ovvero l'integrale ha la forma

$$P(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} w^{\alpha} R(w) dw\,,$$

dove si è posto $z - 1 = \alpha$ e $R(w) = 1/\left(w^4 + w^2 + 1\right)$. Come è noto, sotto le condizioni di convergenza per α e nel caso in cui la funzione razionale $R(w)$ non abbia poli sul semiasse reale positivo, si ha la formula risolutiva

$$P(\alpha + 1) = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)} \sum_{\mathrm{tot}} \mathrm{Res}\left[w^{\alpha} R(w), w_k\right]\,, \tag{2}$$

dove la somma è fatta su tutti i poli della funzione integranda. La condizione di convergenza è

$$-1-l<\mathrm{Re}(\alpha)<-1-h\,,$$

dove l e h sono le potenze che descrivono il comportamento, rispettivamente, nei limiti $w\to 0^+$ e $w\to\infty$, della funzione razionale $R(w)$, ovvero

$$\begin{array}{lclcl} R(w) & \underset{w\to 0^+}{\propto} & w^l=1 & \Rightarrow & l=0\,,\\ R(w) & \underset{w\to\infty}{\propto} & w^h=w^{-4} & \Rightarrow & h=-4\,. \end{array}$$

Ne consegue che la condizione di convergenza su α e quindi quella su z sono

$$-1<\mathrm{Re}(\alpha)<3 \qquad \overset{z=\alpha+1}{\Longrightarrow} \qquad 0<\mathrm{Re}(z)<4\,,$$

ovvero, il dominio cercato è il rettangolo infinito $D=\{z:0<\mathrm{Re}(z)<4\}$.
I poli dell'integranda, $\left\{w_j\right\}_{j=1}^4$, sono i quattro zeri del polinomio di quarto grado a denominatore, cioè, sono tali che $w_j^4+w_j^2+1=0$, con $j=1,2,3,4$. Il polinomio contiene solo potenze pari, possiamo risolverlo rispetto a w^2 e si hanno le soluzioni

$$w_\pm^2=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}=\left\{\begin{array}{ll} e^{2i\pi/3} & (+)\\ e^{4i\pi/3} & (-)\end{array}\right. .$$

La forma polare dei numeri complessi $w_\pm^2$ deve essere fatta considerando come determinazione principale quella per cui $\arg(w)\in[0,2\pi)$. Questa definizione segue, per coerenza, dalla procedura usata per ottenere la formula risolutiva di Eq. (2) che useremo. Estraendo le radice quadrate di $w_\pm^2$, si hanno i quattro poli semplici

$$w_1=e^{i\pi/3}\,,\qquad w_2=e^{2i\pi/3}\,,\qquad w_3=e^{4i\pi/3}\,,\qquad w_4=e^{5i\pi/3}\,.$$

Calcoliamo i residui

$$R_j\equiv\mathrm{Res}\left[w^{z-1}R(w),w_j\right]=\lim_{w\to w_j}w^{z-1}R(w)\left(w-w_j\right)=\lim_{w\to w_j}\frac{w^{z-1}\left(w-w_j\right)}{w^4+w^2+1}=\frac{w_j^{z-1}}{2w_j\left(2w_j^2+1\right)}=\frac{w_j^z}{2w_j^2\left(2w_j^2+1\right)}\,.$$

Poiché $w_1^2=w_3^2=e^{2i\pi/3}=-1/2+i\sqrt{3}/2$ e $w_2^2=w_3^4=e^{4i\pi/3}=-1/2-i\sqrt{3}/2$, si hanno

$$R_1=\frac{e^{iz\pi/3}}{2i\sqrt{3}}e^{-2i\pi/3}\,,\qquad R_2=\frac{e^{2zi\pi/3}}{-2i\sqrt{3}}e^{-4i\pi/3}\,,\qquad R_3=\frac{e^{4zi\pi/3}}{2i\sqrt{3}}e^{-2i\pi/3}\,,\qquad R_4=\frac{e^{5zi\pi/3}}{-2i\sqrt{3}}e^{-4i\pi/3}\,.$$

La somma dei residui è

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^4 R_j&=\frac{1}{2i\sqrt{3}}\left[\left(e^{iz\pi/3}+e^{4iz\pi/3}\right)e^{-2i\pi/3}-\left(e^{2iz\pi/3}+e^{5iz\pi/3}\right)e^{-4i\pi/3}\right]\\ &=\frac{1}{2i\sqrt{3}}\left[e^{5iz\pi/6}\left(e^{-iz\pi/2}+e^{iz\pi/2}\right)e^{-2i\pi/3}-e^{7iz\pi/6}\left(e^{-iz\pi/2}+e^{iz\pi/2}\right)e^{-4i\pi/3}\right]\\ &=\frac{\cos(z\pi/2)}{i\sqrt{3}}\left(e^{5iz\pi/6-2i\pi/3}-e^{7iz\pi/6-4i\pi/3}\right)=\frac{\cos(z\pi/2)}{i\sqrt{3}}\left(e^{i\pi(5z-4)/6}-e^{i\pi(7z-8)/6}\right)\\ &=\frac{e^{i\pi(z-1)}\cos(z\pi/2)}{i\sqrt{3}}\left(e^{-i\pi(z-2)/6}-e^{i\pi(z-2)/6}\right)\\ &=-\frac{2e^{i\pi(z-1)}\cos(z\pi/2)\mathrm{sen}(\pi(z-2)/6)}{\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

Sostituiamo questo risultato nella formula risolutiva di Eq. (2), che riscriviamo per z e otteniamo il valore dell'integrale cercato

$$\begin{aligned}
P(z) &= -\frac{\pi e^{-i\pi(z-1)}}{\mathrm{sen}(\pi(z-1))}\sum_{\mathrm{tot}}\mathrm{Res}\left[w^{z-1}R(w), w_k\right] \\
&= \frac{\pi e^{-i\pi(z-1)}}{\mathrm{sen}(\pi(z-1))}\,\frac{2e^{i\pi(z-1)}\cos(z\pi/2)\mathrm{sen}(\pi(z-2)/6)}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2\pi\cos(z\pi/2)\mathrm{sen}(\pi(z-2)/6)}{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\pi(z-1))} \qquad \left[\mathrm{sen}(\pi(z-1)) = -\mathrm{sen}(\pi z)\right] \\
&= \frac{2\pi\cos(z\pi/2)\mathrm{sen}(\pi(z-2)/6)}{-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\pi z)} \qquad \left[\mathrm{sen}(\pi z) = 2\,\mathrm{sen}(\pi z/2)\cos)\pi z/2)\right] \\
P(z) &= \frac{\pi\,\mathrm{sen}(\pi(2-z)/6)}{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\pi z/2)}\,.
\end{aligned}$$

Seconda procedura

Studiamo le condizioni di convergenza. La funzione integranda non ha singolarità reali, infatti il denominatore si annulla solo per quei valori della variabile di integrazione w tali che

$$e^{2w_k} = e^{\pm 2i\pi/3+2ik\pi} \qquad \Rightarrow \qquad w_k = i\pi\left(\pm\frac{1}{3}+k\right), \qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$

Queste singolarità sono immaginari puri non nulli, quindi $w_k \notin \mathbb{R}$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$. Ne consegue che gli unici punti critici sono $x\to\pm\infty$ e affinché sia integrabile in questi limiti è necessario che la funzione integranda si comporti come

$$\frac{e^{zx}}{e^{4x}+e^{2x}+1} = o(1/x)\,, \qquad x\to\pm\infty\,.$$

Consideriamo il limite $x\to\infty$, si ha

$$\frac{e^{zx}}{e^{4x}+e^{2x}+1} \underset{x\to\infty}{\sim} e^{x(z-4)}\,,$$

è infinitesima e rappresenta $o(1/z^n)$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, solo se $\mathrm{Re}(z-4)<0$, cioè $\mathrm{Re}(z)<4$. Nel limite $x\to-\infty$, invece, il denominatore è costante ed uguale all'unità, per cui

$$\frac{e^{zx}}{e^{4x}+e^{2x}+1} \underset{x\to\infty}{\sim} e^{zx}\,,$$

è infinitesima ed anche in questo caso è un $o(1/z^n)$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, solo se $\mathrm{Re}(z)>0$. L'intersezione delle due condizioni dà il dominio di convergenza in z

$$D = \{z : 0<\mathrm{Re}(z)<4\}\,,$$

coincidente con quello ottenuto nella prima procedura.
Consideriamo il percorso rettangolare T, mostrato in figura, di vertici

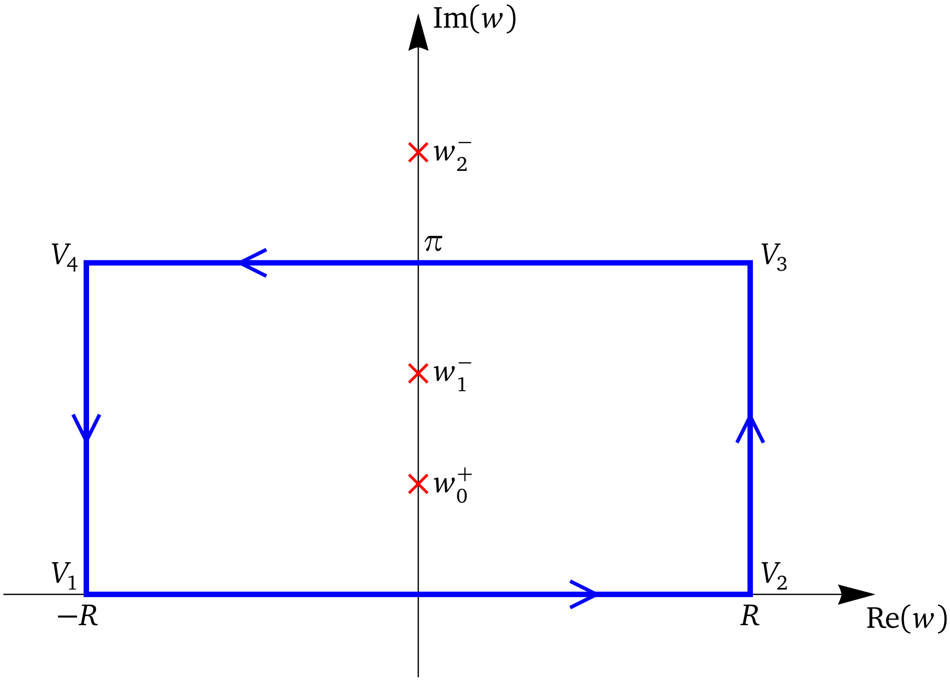
$$V_1 = -R\,, \qquad V_2 = R\,, \qquad V_3 = R+i\pi\,, \qquad V_4 = -R+i\pi\,,$$

e integriamo su questo percorso chiuso la funzione integranda data, si ha

$$J_R(z) = \oint_T \frac{e^{zw}}{e^{4w}+e^{2w}+1}dw\,.$$

Questo integrale può essere calcolato con il teorema dei residui. Le singolarità della funzione integranda sono, come già anticipato, quei valori di w che verificano l'equazione

$$e^{4w}+e^{2w}+1=0\,.$$



Risolviamo rispetto a e^{2w} e, considerando la determinazione principale $(-\pi,\pi)$, si ha

$$e^{2w_k^\pm} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2i\pi/3+2ik\pi} \qquad \Rightarrow \qquad w_k^\pm = i\pi\left(\pm\frac{1}{3}+k\right), \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Le prime tre singolarità con parte immaginaria positiva, w_0^+, non w_1^- e w_2^-, sono mostrate in figura.
Sono interni al percorso di integrazione T solo quelle singolarità con parte reale appartenente all'intervallo $(-R,R)$ e parte immaginaria compresa tra zero e π, poiché

$$\mathrm{Re}\left(w_k^\pm\right) = 0, \qquad \mathrm{Im}\left(w_k^\pm\right) = \pi\left(\pm\frac{1}{3}+k\right),$$

solo le due singolarità

$$w_0^+ = \frac{i\pi}{3}, \qquad w_1^- = \frac{2i\pi}{3},$$

verificano le condizioni e lo fanno per ogni valore positivo di R. Ne consegue che, $\forall R\in(0,\infty)$,

$$J_R(z) = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{e^{zw}}{e^{4w}+e^{2w}+1}, w_0^+\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{e^{zw}}{e^{4w}+e^{2w}+1}, w_1^-\right]\right).$$

Calcoliamo i residui, assumendo che le singolarità siano dei poli semplici,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{e^{zw}}{e^{4w}+e^{2w}+1}, w_0^+\right] &= \lim_{w\to w_0^+}\frac{e^{zw}}{e^{4w}+e^{2w}+1}\left(w-w_0^+\right) = \frac{e^{zw_0^+}}{4e^{4w_0^+}+2e^{2w_0^+}} \\
&= \frac{e^{zw_0^+}}{\underbrace{2e^{4w_0^+}}_{-1-i\sqrt{3}}+2\underbrace{\left(e^{4w_0^+}+e^{2w_0^+}\right)}_{-1}} = \frac{e^{zi\pi/3}}{-3-i\sqrt{3}}, \\
\mathrm{Res}\left[\frac{e^{zw}}{e^{4w}+e^{2w}+1}, w_1^-\right] &= \lim_{w\to w_1^-}\frac{e^{zw}}{e^{4w}+e^{2w}+1}\left(w-w_1^-\right) = \frac{e^{zw_1^-}}{4e^{4w_1^-}+2e^{2w_1^-}} \\
&= \frac{e^{zw_1^-}}{\underbrace{2e^{4w_1^-}}_{-1+i\sqrt{3}}+2\underbrace{\left(e^{4w_1^-}+e^{2w_1^-}\right)}_{-1}} = \frac{e^{2zi\pi/3}}{-3+i\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Il fatto che i limiti diano valori finiti conferma l'ipotesi, ovvero le singolarità sono poli semplici. L'integrale $J_R(z)$ vale

$$
\begin{aligned}
J_R(z) &= 2i\pi\left(\frac{e^{zi\pi/3}}{-3-i\sqrt{3}}+\frac{e^{2zi\pi/3}}{-3+i\sqrt{3}}\right)=\frac{i\pi}{6}\left[e^{zi\pi/3}\left(-3+i\sqrt{3}\right)+e^{2zi\pi/3}\left(-3-i\sqrt{3}\right)\right] \\
&= \frac{i\pi}{6}\left[-3e^{zi\pi/2}\left(e^{zi\pi/6}+e^{-zi\pi/6}\right)-i\sqrt{3}\,e^{zi\pi/2}\left(e^{zi\pi/6}-e^{-zi\pi/6}\right)\right] \\
&= \frac{i\pi e^{zi\pi/2}}{3}\left[-3\cos\left(\frac{z\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{z\pi}{6}\right)\right]=\frac{2i\pi e^{zi\pi/2}}{\sqrt{3}}\left[-\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\mathrm{sen}(\pi/3)}\cos\left(\frac{z\pi}{6}\right)+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos(\pi/3)}\mathrm{sen}\left(\frac{z\pi}{6}\right)\right] \\
&= \frac{2i\pi e^{zi\pi/2}}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{z\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{z\pi}{6}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{2i\pi e^{zi\pi/2}}{\sqrt{3}}\mathrm{sen}\left(\frac{z\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{2i\pi e^{zi\pi/2}}{\sqrt{3}}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}(z-2)\right).
\end{aligned}
$$

L'integrale sul percorso T può essere scritto come la somma dei quattro contributi sui tratti rettilinei. Dimostriamo che nel limite $R\to\infty$ e sotto condizioni che andremo a definire, i contributi sui tratti verticali, paralleli all'asse immaginario, sono nulli. Su tali tratti, che indichiamo con $L_\pm$, dove le parti reali dei punti appartenenti a $L_\pm$ sono rispettivamente $\pm R$, la variabile di integrazione ha la forma $w=\pm R+iy$, con $y\in[0,\pi]$, quindi gli integrali di una generica funzione $f(z)$ sono

$$
\int_{L_\pm} f(w)dw=\pm i\int_0^\pi f\left(\pm R+iy\right)dy\,.
$$

Nel caso in esame

$$
\begin{aligned}
0\le\left|\int_{L_\pm}\frac{e^{zw}dw}{e^{4w}+e^{2w}+1}\right| &= \left|\int_{L_\pm}\frac{e^{zw}dw}{\left(e^{2w}-e^{2w_k^+}\right)\left(e^{2w}-e^{2w_k^-}\right)}\right|=\left|\pm i\int_0^\pi\frac{e^{z(\pm R+iy)}dy}{\left(e^{2(\pm R+iy)}-e^{2w_k^+}\right)\left(e^{2(\pm R+iy)}-e^{2w_k^-}\right)}\right| \\
&\le \int_0^\pi\frac{e^{\pm zR}dy}{\left|e^{\pm 2R}-\left|e^{2w_k^+}\right|\right|\left|e^{\pm 2R}-\left|e^{2w_k^-}\right|\right|},
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza triangolare: $|a+b|\ge\big||a|-|b|\big|$, $\forall\, a,b\in\mathbb{C}$. Inoltre, poiché i moduli degli esponenziali dei poli sono unitari, infatti

$$
\left|e^{2w_k^\pm}\right|=\left|e^{2i\pi(\pm 1/3+k)}\right|=1\,,
$$

abbiamo

$$
0\le\left|\int_{L_\pm}\frac{e^{zw}dw}{e^{4w}+e^{2w}+1}\right|\ \le\ \int_0^\pi\frac{e^{\pm zR}dy}{\left(e^{\pm 2R}-1\right)^2}=\pi\frac{e^{\pm zR}}{\left(e^{\pm 2R}-1\right)^2}\,.
$$

Nel limite $R\to\infty$ si ha

$$
\pi\frac{e^{zR}}{\left(e^{2R}-1\right)^2}=\pi\frac{e^{zR}}{e^{4R}-2e^{2R}+1}\underset{R\to\infty}{\sim}\pi e^{R(z-4)}\,,
$$

è infinitesimo se $\mathrm{Re}(z-4)<0$, quindi per $\mathrm{Re}(z)<4$.
Nel secondo caso, segno basso, si ha

$$
\pi\frac{e^{-zR}}{\left(e^{-2R}-1\right)^2}=\pi\frac{e^{-zR}}{e^{-4R}-2e^{-2R}+1}\underset{R\to\infty}{\sim}\pi e^{-zR}\,,
$$

è infinitesimo se $\mathrm{Re}(z) > 0$. Ne consegue che $\forall\, z \in D$ entrambi le condizioni sono verificate e entrambi i limiti sono nulli. Facendo il limite $R \to \infty$ dell'integrale $J_R(z)$, con $z \in D$, e considerandone le due espressioni, in termini dei residui e della somma dei singoli contributi, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} J_R(z) &= \frac{2i\pi e^{zi\pi/2}}{\sqrt{3}} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}(z-2)\right) \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} \frac{e^{zx}dx}{e^{4x}+2e^{2x}+1} + \int_{R}^{-R} \frac{e^{z(x+i\pi)}dx}{e^{4(x+i\pi)}+2e^{2(x+i\pi)}+1} + \int_{L_+\cup L_-} \frac{e^{zw}dw}{e^{4w}+2e^{2w}+1}\right) \\
&= \left(1-e^{zi\pi}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{zx}dx}{e^{4x}+2e^{2x}+1} = -2ie^{zi\pi/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{z\pi}{2}\right)P(z)\,.
\end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a $P(z)$ l'indentità tra i secondi membri della prima e terza riga, otteniamo

$$P(z) = \frac{2i\pi e^{zi\pi/2}}{\sqrt{3}} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}(z-2)\right)\frac{1}{-2ie^{zi\pi/2}\,\mathrm{sen}(z\pi/2)} = \frac{\pi\,\mathrm{sen}(\pi(2-z)/6)}{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(z\pi/2)}\,,$$

che è (ovviamente) lo stesso risultato della prima procedura

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{\mathrm{sen}^2(z)}\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione $f(z)$ è l'opposto della derivata prima dell'inverso della funzione seno, grazie alla possibilità di derivare termine a termine, lo sviluppo di Mittag-Leffler si ottiene da quello dell'inverso della funzione seno, derivando termine a termine. Infatti si ha

$$-\frac{d}{dz}\frac{1}{\mathrm{sen}(z)} = \frac{\cos(z)}{\mathrm{sen}^2(z)} = f(z)\,.$$

Otteniamo lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione $1/\mathrm{sen}(z)$, tale funzione ha solo poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$, indicando con R_k il residuo nel polo z_k, avremo

$$\frac{1}{\mathrm{sen}(z)} = \phi(z) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{R_k}{z-k\pi}\,,$$

dove la funzione $\phi(z)$ è intera ed ha lo stesso comportamento asintotico della funzione $1/\mathrm{sen}(z)$. I residui si ottengono come

$$R_k = \lim_{z\to k\pi} \frac{z-k\pi}{\mathrm{sen}(z)} = \lim_{z\to k\pi} \frac{1}{\cos(z)} = (-1)^k\,.$$

Studiamo il comportamento asintotico sui punti della successione $\left\{a_k = (2k+1)\pi e^{i\alpha_k}/2\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, dove le fasi $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sono arbitrarie. Questa successione è costruita in modo tale che i moduli dei termini siano i valori medi di due poli successivi. Per determinare il comportamento della funzione $1/\mathrm{sen}(z)$ sui punti della successione, consideriamo le funzioni $|\mathrm{sen}\,(a_k)\,|^2$, che chiamiamo $m(\alpha_k)$, dipendono solo della fase $\alpha_k \in [0, 2\pi]$, indichiamo per semplicità il raggio con $r = (2k+1)\pi/2$ e la fase con $\alpha = \alpha_k$, si ha

$$m(\alpha) \equiv |\mathrm{sen}\,(a_k)\,|^2 = \mathrm{sen}\,(a_k)\ \mathrm{sen}\,(a_k)^* = \mathrm{sen}\,(a_k)\ \mathrm{sen}\left(a_k^*\right) = \mathrm{sen}\left(re^{i\alpha}\right)\mathrm{sen}\left(re^{-i\alpha}\right)\,.$$

Le derivate prima e seconda sono

$$\begin{aligned}
\frac{dm}{d\alpha} &= \frac{d\mathrm{sen}\left(re^{i\alpha}\right)}{d\alpha}\mathrm{sen}\left(re^{-i\alpha}\right) + \mathrm{sen}\left(re^{i\alpha}\right)\frac{d\mathrm{sen}\left(re^{-i\alpha}\right)}{d\alpha}\,, \\
\frac{d^2m}{d\alpha^2} &= \frac{d^2\mathrm{sen}\left(re^{i\alpha}\right)}{d\alpha^2}\mathrm{sen}\left(re^{-i\alpha}\right) + \mathrm{sen}\left(re^{i\alpha}\right)\frac{d^2\mathrm{sen}\left(re^{-i\alpha}\right)}{d^2\alpha} + 2\frac{d\mathrm{sen}\left(re^{i\alpha}\right)}{d\alpha}\frac{d\mathrm{sen}\left(re^{-i\alpha}\right)}{d\alpha}\,,
\end{aligned}$$

dove

$$
\begin{aligned}
\frac{d\operatorname{sen}\left(re^{\pm i\alpha}\right)}{d\alpha} &= \pm i r e^{\pm i\alpha}\cos\left(re^{\pm i\alpha}\right)\,, \\
\frac{d^2\operatorname{sen}\left(re^{\pm i\alpha}\right)}{d\alpha^2} &= \pm i r\left[\pm i\cos\left(re^{\pm i\alpha}\right) - (\pm i)\, r e^{\pm i\alpha}\operatorname{sen}\left(re^{\pm i\alpha}\right)\right] e^{\pm i\alpha} \\
&= -r\left[\cos\left(re^{\pm i\alpha}\right) - r e^{\pm i\alpha}\operatorname{sen}\left(re^{\pm i\alpha}\right)\right] e^{\pm i\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

Le derivate diventano

$$
\begin{aligned}
\frac{dm}{d\alpha} &= i r\left[\cos\left(re^{i\alpha}\right)\operatorname{sen}\left(re^{-i\alpha}\right)e^{i\alpha} - \operatorname{sen}\left(re^{i\alpha}\right)\cos\left(re^{-i\alpha}\right)e^{-i\alpha}\right]\,, \\
\frac{d^2m}{d\alpha^2} &= -r\left[\cos\left(re^{i\alpha}\right) - re^{i\alpha}\operatorname{sen}\left(re^{i\alpha}\right)\right]e^{i\alpha}\operatorname{sen}\left(re^{-i\alpha}\right) - r\left[\cos\left(re^{-i\alpha}\right) - re^{-i\alpha}\operatorname{sen}\left(re^{-i\alpha}\right)\right]e^{-i\alpha}\operatorname{sen}\left(re^{i\alpha}\right) \\
&\quad +2r^2\cos\left(re^{i\alpha}\right)\cos\left(re^{-i\alpha}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Poiché i valori del raggio r sono multipli dispari di $\pi/2$, ovvero $r = (2k+1)\pi/2$, e quindi si hanno

$$
\cos(\pm r) = 0\,, \qquad \operatorname{sen}(\pm r) = \pm(-1)^k\,,
$$

la derivata prima di $m(\alpha)$ si annulla per $\alpha = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, mentre, per gli stessi valori di α, la derivata seconda è strettamente positiva, infatti

$$
\begin{aligned}
\frac{dm}{d\alpha}(n\pi) &= i r\left[\cos\left(r(-1)^n\right)\operatorname{sen}\left(r(-1)^n\right)(-1)^n - \operatorname{sen}\left(r(-1)^n\right)\cos\left(r(-1)^n\right)(-1)^n\right] = 0 \\
\frac{d^2m}{d\alpha^2}(n\pi) &= 2r^2(-1)^{2n}\operatorname{sen}^2\left(r(-1)^n\right) = 2r^2 > 0\,.
\end{aligned}
$$

Ne consegue che la funzione $m(\alpha)$ assume valori minimi per $\alpha = n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$ e in questi punti vale

$$
m(n\pi) = \left|\operatorname{sen}\left((-1)^n r\right)\right|^2 = 1\,.
$$

Poiché la funzione $m(\alpha)$ è limitata, continua e derivabile questi minimi sono assoluti. Il fatto che sia limitata, continua e derivabile si evince ponendola nella forma esplicita

$$
\begin{aligned}
m(\alpha) &= \left|\operatorname{sen}\left[r\cos(\alpha) + i r\operatorname{sen}(\alpha)\right]\right|^2 \\
&= \left|\operatorname{sen}\left[r\cos(\alpha)\right]\cos\left[i r\operatorname{sen}(\alpha)\right] + \cos\left[r\cos(\alpha)\right]\operatorname{sen}\left[i r\operatorname{sen}(\alpha)\right]\right|^2 \\
&= \left|\operatorname{sen}\left[r\cos(\alpha)\right]\cosh\left[r\operatorname{sen}(\alpha)\right] + i\cos\left[r\cos(\alpha)\right]\operatorname{senh}\left[r\operatorname{sen}(\alpha)\right]\right|^2 \\
&= \operatorname{sen}^2\left[r\cos(\alpha)\right]\cosh^2\left[r\operatorname{sen}(\alpha)\right] + \cos^2\left[r\cos(\alpha)\right]\operatorname{senh}^2\left[r\operatorname{sen}(\alpha)\right]\,,
\end{aligned}
$$

inoltre, usando la relazione iperbolica: $\cosh^2(\theta) - \operatorname{senh}^2(\theta) = 1$, per riscrivere la funzione coseno iperbolico, si ha

$$
\begin{aligned}
m(\alpha) &= \operatorname{sen}^2\left[r\cos(\alpha)\right]\left(1 + \operatorname{senh}^2\left[r\operatorname{sen}(\alpha)\right]\right) + \cos^2\left[r\cos(\alpha)\right]\operatorname{senh}^2\left[r\operatorname{sen}(\alpha)\right] \\
&= \operatorname{sen}^2\left[r\cos(\alpha)\right] + \operatorname{senh}^2\left[r\operatorname{sen}(\alpha)\right]\left(\operatorname{sen}^2\left[r\cos(\alpha)\right] + \cos^2\left[r\cos(\alpha)\right]\right) \\
&= \operatorname{sen}^2\left[r\cos(\alpha)\right] + \operatorname{senh}^2\left[r\operatorname{sen}(\alpha)\right]\,,
\end{aligned}
$$

che, come funzione di α, è evidentemente limitata, continua e derivabile.
Da ciò segue che

$$
0 \le \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{\operatorname{sen}(a_k)}\right| \le 1\,,
$$

e di conseguenza la funzione $\phi(z)$ è costante, indichiamo con ϕ_0 il suo valore. In definitiva lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$
\frac{1}{\operatorname{sen}(z)} = \phi_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^k}{z - k\pi}\,.
$$

Per ottenere il valore della costante ϕ_0 riscriviamo la somma sfruttando la parità dei poli, ovvero

$$\frac{1}{\text{sen}(z)} = \phi_0 + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z-k\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k\pi} = \phi_0 + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi} \right) ,$$

portiamo a primo membro il termine $1/z$ e facciamo il limite $z \to 0$ di ambo i membri

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{\text{sen}(z)} - \frac{1}{z} \right) = \phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{-k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) = \phi_0 .$$

Il limite del primo membro è nullo, infatti usando la serie di Taylor della funzione seno si ha

$$\phi_0 = \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{\text{sen}(z)} - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z\to 0} \frac{z - \text{sen}(z)}{z\,\text{sen}(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{z^3/3! + O(z^5)}{z^2 - z^4/3! + O(z^6)} = \lim_{z\to 0} \frac{z/3! + O(z^3)}{1 - z^2/3! + O(z^4)} = 0 .$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler dell'inverso della funzione seno è

$$\frac{1}{\text{sen}(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{z-k\pi} ,$$

di conseguenza otteniamo quello della funzione $f(z)$ come

$$f(z) = -\frac{d}{dz} \frac{1}{\text{sen}(z)} = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dz} \frac{(-1)^k}{z-k\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{(z-k\pi)^2} .$$

È facile osservare come, dovendo fare una derivata, il valore esplicito della costante ϕ_0 non fosse necessario al fine di ottenere lo sviluppo di Mittag-Leffler cercato.

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si dimostri che l'operatore

$$\hat{H} = \hat{A}^\dagger \hat{A}^2 \hat{A}^\dagger ,$$

definito in uno spazio di Hilbert a dimensione finita, è hermitiano se l'operatore $\hat{A}$ è normale.
L'operatore $\hat{H}$ sarebbe ancora hermitiano se $\hat{A}$ non fosse normale e si avesse $\left[\hat{A}, \hat{A}^\dagger\right] = \hat{I}$?
In questo caso, che relazione ci sarebbe tra gli autovalori degli operatori $\hat{P} = \hat{A}\hat{A}^\dagger$ e $\hat{Q} = \hat{A}^\dagger\hat{A}$?

Soluzione del quarto problema

Vogliamo dimostrare che, avendo per ipotesi che l'operatore $\hat{A}$ è normale, l'operatore $\hat{H}$ è hermitiano, ovvero:

$$\left[\hat{A}, \hat{A}^\dagger\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{H} = \hat{H}^\dagger .$$

Calcoliamo l'aggiunto $\hat{H}^\dagger$,

$$\hat{H}^\dagger = \left(\hat{A}^\dagger \hat{A}^2 \hat{A}^\dagger\right)^\dagger = \hat{A} \left(\hat{A}^\dagger\right)^2 \hat{A} = \hat{A}\hat{A}^\dagger\hat{A}^\dagger\hat{A} .$$

Sfruttando due volte la regola di commutazione tra $\hat{A}$ e $\hat{A}^\dagger$, possiamo spostare il secondo operatore dell'ultimo membro in prima posizione e il terzo in quarta posizione, queste due operazione permettono di ottenere l'operatore $\hat{H}$, infatti

$$\hat{H}^\dagger = \hat{A}\hat{A}^\dagger\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{H} .$$

Ne consegue che $\hat{H}$ è un operatore hermitiano.
Nel caso in cui $\hat{A}$ non sia normale e si abbia $\left[\hat{A}, \hat{A}^\dagger\right] = \hat{I}$, avremmo

$$\hat{H}^\dagger = \hat{A}\hat{A}^\dagger\hat{A}^\dagger\hat{A} = \left(\hat{A}^\dagger\hat{A} + \hat{I}\right)\left(\hat{A}\hat{A}^\dagger - \hat{I}\right) = \hat{H} + \left[\hat{A}, \hat{A}^\dagger\right] - \hat{I} = \hat{H} .$$

Ovvero l'operatore $\hat{H}$ sarebbe ancora hermitiano.
In questo caso, l'hemitianità di $\hat{H}$ implica che gli operatori $\hat{P} = \hat{A}\hat{A}^\dagger$ e $\hat{Q} = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ abbiano commutatore nullo, infatti

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger \quad \Rightarrow \quad \hat{A}\hat{A}^\dagger\hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{A}\hat{A}^\dagger \quad \Rightarrow \quad \hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} \quad \Rightarrow \quad \left[\hat{P},\hat{Q}\right] = 0 .$$

Inoltre, la loro differenza è pari all'identità,

$$\hat{I} = \left[\hat{A},\hat{A}^\dagger\right] = \hat{A}\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{A} = \hat{P} - \hat{Q} .$$

Questi operatori, in quanto hermitiani sono normali e, avendo commutatore nullo, hanno lo spesso insieme di autovettori ortonormali $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$, si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{P}\,|u_k\rangle = p_k|u_k\rangle \,, \qquad \hat{Q}\,|u_k\rangle = q_k|u_k\rangle \,,$$

dove $\{p_k\}_{k=1}^N$ e $\{q_k\}_{k=1}^N$ sono gli insiemi di autovalori di $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ rispettivamente. Dal teorema spettrale si evince che la relazione che c'è tra gli operatori, ovvero $\hat{P} - \hat{Q} = \hat{I}$, si ha anche per gli autovalori, cioè

$$p_k - q_k = 1 \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N .$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

I vettori dell'insieme $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^3$ sono ortonormali e, rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$, hanno rappresentazioni

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

si ottengano gli autovalori e la rappresentazione rispetto alla base canonica dell'operatore $\hat{T}$, sapendo che

$$\hat{T}|u_1\rangle = |u_2\rangle \,, \qquad \hat{T}|u_2\rangle = |u_3\rangle \,, \qquad \hat{T}|u_3\rangle = |u_1\rangle .$$

Soluzione del quinto problema

La rappresentazione, T', dell'operatore $\hat{T}$ rispetto alla base $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^3$ si ottiene facilmente sfruttando le azioni date, infatti, facendo agire l'operatore su un generico vettore $|u_j\rangle$, $j = 1, 2, 3$, si ha

$$\hat{T}|u_j\rangle = T'^k_j|u_k\rangle \,,$$

dove T'^k_j è l'elemento della k-esima riga e j-esima colonna della matrice T', che rappresenta l'operatore $\hat{T}$ rispetto alla base $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^3$. Considerando colonna per colonna si ha

$$\begin{aligned}
\hat{T}|u_1\rangle = T'^k_1|u_k\rangle = |u_2\rangle \qquad &\Rightarrow \qquad T'^k_1 = \delta^k_2 \,,\\
\hat{T}|u_2\rangle = T'^k_2|u_k\rangle = |u_3\rangle \qquad &\Rightarrow \qquad T'^k_2 = \delta^k_3 \,,\\
\hat{T}|u_3\rangle = T'^k_3|u_k\rangle = |u_1\rangle \qquad &\Rightarrow \qquad T'^k_3 = \delta^k_1 \,,
\end{aligned}$$

in definitiva

$$T' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Per ottenere la matrice che rappresenta lo stesso operatore rispetto alla base canonica procediamo come segue, facciamo agire l'operatore sul generico vettore $|u_k\rangle$, sfruttiamo la decomposizione del vettore "u" rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ e definiamo la matrice U come segue

$$\hat{T}|u_k\rangle = T'^j_k|u_j\rangle = \sum_{m=1}^3 T'^j_k \underbrace{\langle e_m|u_j\rangle}_{U^m_j} |e_m\rangle = T'^j_k U^m_j |e_m\rangle = \left(UT'\right)^m_k |e_m\rangle .$$

Partendo dalla stessa azione usiamo la relazione di completezza dei vettori della base canonica

$$\hat{T}|u_k\rangle = \sum_{l=1}^{3} \hat{T}|e_l\rangle\langle e_l|u_k\rangle = \sum_{l=1}^{3} T_l^m \langle e_l|u_k\rangle|e_m\rangle = T_l^m U_k^l |e_m\rangle = (TU)_k^m\,|e_m\rangle\,.$$

Uguagliando le precedenti espressioni si ottiene l'identità tra due prodotti di matrici

$$TU = UT'\,,$$

ma la matrice U è unitaria in quanto trasforma una base ortonormale in un'altra base ortonormale. Si ottiene allineando nelle colonne le componenti dei vettori "u", ovvero

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo T come

$$\begin{aligned} T = UT'U^{-1} = UT'U^{\dagger} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Infine, gli autovalori li calcoliamo a partire dalla rappresentazione T', risolvendo l'equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} = 0$$

$$-x^3 + 1 = 0\,,$$

si hanno i tre autovalori che sono le tre radici cubiche dell'unità,

$$x_1 = 1\,, \qquad x_2 = e^{2i\pi/3}\,, \qquad x_3 = e^{4i\pi/3}\,.$$

Sesto problema (punteggio 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$t(x) = x^4 e^{-x^2}\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Illustriamo due procedure risolutive.

Prima procedura

La trasformata di Fourier può essere calcolata usando il teorema della convoluzione nella forma

$$\mathscr{F}_k\left[f(x)g(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}_k\left[f\right] * \mathscr{F}_k\left[g\right]\,,$$

la trasformata di Fourier del prodotto si ottiene come convoluzione delle trasformate di Fourier divisa per $\sqrt{2\pi}$. Le due funzioni sono

$$f(x) = x^4\,, \qquad g(x) = e^{-x^2}\,.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ sfruttando la possibilità di riscrivere l'integranda sotto forma di derivata quarta del solo esponenziale, ovvero

$$\tilde{f}(k) \equiv \mathscr{F}_k\left[f\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ikx} dx = \frac{d^4}{dk^4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi}\frac{d^4}{dk^4}\delta(k) = \sqrt{2\pi}\,\delta^{(4)}(k),$$

dove si è usata la rappresentazione integrale della delta di Dirac.
La trasformata di Fourier della gaussiana $g(x)$ è nota ed è ancora una gaussiana, si ha infatti

$$\tilde{g}(k) \equiv \mathscr{F}_k\left[g\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4}.$$

La convoluzione, quindi la trasformata di Fourier, si calcola integrando per parti quattro volte la delta di Dirac,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[t\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}(k) * \tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(4)}(k-k')e^{-k'^2/4} dk' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underbrace{-\,\delta^{(3)}(k-k')e^{-k'^2/4}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(3)}(k-k')\left(-\frac{k'}{2}\right) e^{-k'^2/4} dk'\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\underbrace{-\,\delta^{(2)}(k-k')(-k')e^{-k'^2/4}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(2)}(k-k')\left(-1+\frac{k'^2}{2}\right) e^{-k'^2/4} dk'\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\underbrace{-\,\delta'(k-k')\left(-2+k'^2\right) e^{-k'^2/4}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(k-k')\left(3k'-\frac{k'^3}{2}\right) e^{-k'^2/4} dk'\right] \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\underbrace{-\,\delta(k-k')\left(6k'-k'^3\right) e^{-k'^2/4}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-k')\left(6-6k'^2-\frac{k'^4}{2}\right) e^{-k'^2/4} dk'\right] \\
\mathscr{F}_k\left[t\right] &= \frac{12-12k^2-k^4}{16\sqrt{2}} e^{-k^2/4}.
\end{aligned}$$

Seconda procedura

La trasformata di Fourier della gaussiana è nota e vale

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4}.$$

Ne consegue che si ha l'anti-trasformata

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4}\right] = e^{-x^2}.$$

Usando la regola della derivata, si ottiene che la trasformata di Fourier della derivata quarta non è altro che la funzione $t(x)$, infatti

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^4}{dk^4} e^{-k^2/4}\right] = (-ix)^4 \mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4}\right] = x^4 e^{-x^2} = t(x).$$

A questo punto è sufficiente fare la trasformata di Fourier di ambo i membri, osservando che la trasformata di Fourier del primo membro è semplicemente la funzione di cui si sta facendo l'anti-trasformata di Fourier,

$$\begin{aligned}
\tilde{t}(k) &= \mathscr{F}_k\left[x^4 e^{-x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^4}{dk^4} e^{-k^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^3}{dk^3}\left(-\frac{k}{2}\right) e^{-k^2/4} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{d^2}{dk^2}\left(-1+\frac{k^2}{2}\right) e^{-k^2/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{d}{dk}\left(3k-\frac{k^3}{2}\right) e^{-k^2/4} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(6-6k^2-\frac{k^4}{2}\right) e^{-k^2/4} \\
\tilde{t}(k) &= \frac{12-12k^2-k^4}{16\sqrt{2}} e^{-k^2/4}.
\end{aligned}$$