Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 7 febbraio 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

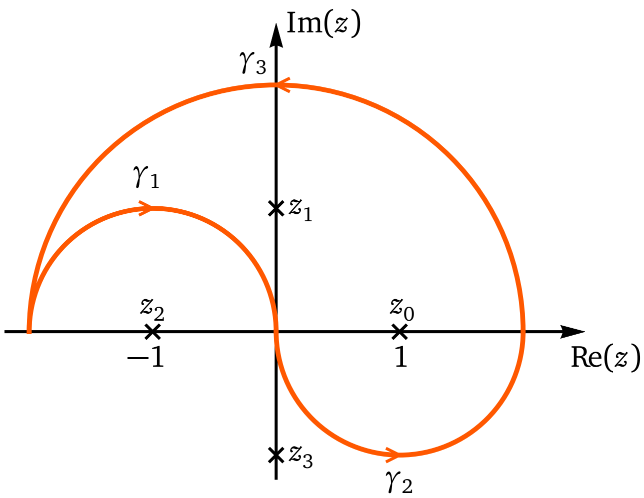
$$P = \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} \frac{\mathrm{sen}(z)}{(z^4-1)^2} dz \,,$$

con

$$\gamma_1 = \left\{ z : z = -1 + e^{i\theta},\, \theta \in [-\pi, -2\pi] \right\} \,,$$
$$\gamma_2 = \left\{ z : z = 1 + e^{i\theta},\, \theta \in [\pi, 2\pi] \right\} \,,$$
$$\gamma_3 = \left\{ z : z = 2e^{i\theta},\, \theta \in [0, \pi] \right\} \,.$$

Soluzione del primo problema

Il percorso di integrazione è



i punti $z_k = e^{ik\pi/2}$, con $k = 0, 1, 2, 3$, rappresentano i poli doppi dell'integranda, ovvero le quattro soluzioni dell'equazione $z^4 - 1 = 0$. All'interno del percorso di integrazione ci sono solo i due poli z_0 e z_1, quindi, usando il teorema dei residui l'integrale può essere calcolato come

$$P = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sen}(z)}{(z^4-1)^2}, z_0 = 1 \right] + \mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sen}(z)}{(z^4-1)^2}, z_1 = i \right] \right) .$$

Il residuo nel punto $z_0 = 1$ è

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^4-1)^2}, z_0 = 1\right] &= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}\bigg|_{z=1} \\
&= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z)}{[z^3 - z^2(z_1+z_2+z_3) + z(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) - z_1z_2z_3]^2}\bigg|_{z=1} \\
&= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z)}{[z^3 - z^2(i-1-i) + z(-i+i+1)+1]^2}\bigg|_{z=1} \\
&= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^3+z^2+z+1)^2}\bigg|_{z=1} \\
&= \frac{\cos(z)\left(z^3+z^2+z+1\right)^2 - 2\operatorname{sen}(x)\left(3z^2+2z+1\right)\left(z^3+z^2+z+1\right)}{(z^3+z^2+z+1)^4}\Bigg|_{z=1} \\
&= \frac{\cos(z)\left(z^3+z^2+z+1\right) - 2\operatorname{sen}(x)\left(3z^2+2z+1\right)}{(z^3+z^2+z+1)^3}\Bigg|_{z=1} \\
&= \frac{\cos(1) - 3\operatorname{sen}(1)}{16}\,.
\end{aligned}$$

Usando la stessa procedura $z_1 = i$ si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^4-1)^2}, z_1 = i\right] &= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z)}{(z-z_0)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}\bigg|_{z=i} \\
&= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z)}{[z^3 - z^2(z_0+z_2+z_3) + z(z_0z_2 + z_2z_3 + z_0z_3) - z_0z_2z_3]^2}\bigg|_{z=i} \\
&= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z)}{[z^3 - z^2(1-1-i) + z(-1+i-i) - i]^2}\bigg|_{z=1} \\
&= \frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^3+iz^2-z-i)^2}\bigg|_{z=i} \\
&= \frac{\cos(z)\left(z^3+iz^2-z-i\right) - 2\operatorname{sen}(x)\left(3z^2+2iz-1\right)}{(z^3+iz^2-z-i)^3}\Bigg|_{z=1} \\
&= \frac{\cos(i) + 3i\operatorname{sen}(i)}{(-4i)^2} \\
&= -\frac{\cosh(1) - 3\operatorname{senh}(1)}{16}\,.
\end{aligned}$$

Infine si ottiene

$$P = \frac{i\pi}{8}\Big[\cos(1) - \cosh(1) + 3\big(\operatorname{senh}(1) - \operatorname{sen}(1)\big)\Big].$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga il valore l'integrale

$$M = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)(x-1-i\epsilon)}dx\,.$$

Soluzione del secondo problema

Usando la formula di Sokhotsky-Plemelj si ha

$$M = \Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)(x-1)}dx + i\pi\frac{\operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)}\bigg|_{x=1} = \Pr\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)(x-1)}dx + i\pi\frac{\operatorname{sen}(1)}{2}\,,$$

dove l'integrale è in valore principale rispetto alla singolarità $x = 1$ appartenente al percorso di integrazione. Il valore principale è

$$\Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2i}\left(\Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x-1)}dx - \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{(x^2+1)(x-1)}dx\right).$$

Si hanno i due valori principali

$$\begin{aligned}
\Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x-1)}dx &= 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)}, z=i\right] - \int_{-\gamma_\epsilon^+} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)}dz \\
&= 2i\pi \frac{e^{-1}}{2i(i-1)} + i\pi \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{iz}}{z^2+1} \\
&= \pi \frac{e^{-1}}{i-1} + i\pi \frac{e^{i}}{2}, \\
\Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{(x^2+1)(x-1)}dx &= -2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{e^{-iz}}{(z^2+1)(z-1)}, z=-i\right] - \int_{\gamma_\epsilon^-} \frac{e^{-iz}}{(z^2+1)(z-1)}dz \\
&= -2i\pi \frac{e^{-1}}{-2i(-i-1)} - i\pi \lim_{\epsilon\to 0} \frac{e^{-iz}}{z^2+1} \\
&= -\pi \frac{e^{-1}}{i+1} - i\pi \frac{e^{-i}}{2}.
\end{aligned}$$

Il risultato completo dell'integrale in valore principale è

$$\Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2i}\left(\pi\frac{e^{-1}}{i-1} + i\pi\frac{e^{i}}{2} + \pi\frac{e^{-1}}{i+1} + i\pi\frac{e^{-i}}{2}\right) = -\frac{\pi e^{-1}}{2} + \pi\frac{\cos(1)}{2},$$

quindi, per l'integrale M si ha

$$\begin{aligned}
M &= -\frac{\pi e^{-1}}{2} + \pi\frac{\cos(1)}{2} + i\pi\frac{\operatorname{sen}(1)}{2} = -\frac{\pi e^{-1}}{2} + \frac{\pi}{4}\left(e^{i} + e^{-i} + e^{i} - e^{-i}\right) = -\frac{\pi e^{-1}}{2} + \frac{\pi e^{i}}{2} \\
M &= \pi\frac{e^{i} - e^{-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene senza l'utilizzo della formula di Sokhotsky-Plemelj. Infatti, facendo la sostituzione $z = x - i\epsilon$ si ha

$$M = \int_{\rho} \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^2+1)(z-1)}dz,$$

dove $\rho = \lim_{\epsilon\to 0^+}\{z : \operatorname{Im}(z) = -\epsilon\}$ è la retta parallela all'asse reale ed immersa nel semipiano delle parti immaginarie negative. Anche in questo caso applichiamo il lemma di Jordan, per poi sfruttare il teorema dei residui. A tal fine è necessario scrivere la funzione seno in termini degli esponenziali, per cui si hanno i due integrali

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{2i}\int_{\rho} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)}dz - \frac{1}{2i}\int_{\rho} \frac{e^{-iz}}{(z^2+1)(z-1)}dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)}dz - \frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-iz}}{(z^2+1)(z-1)}dz\right],
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\Gamma_R^+ &= \rho \cup \{z : z = Re^{i\theta},\ \theta \in [-\epsilon/R, \pi + \epsilon/R]\}, \\
\Gamma_R^- &= \rho \cup \left(-\{z : z = Re^{i\theta},\ \theta \in [\pi + \epsilon/R, 2\pi - \epsilon/R]\}\right).
\end{aligned}$$

Le integrande hanno, entrambe, tre poli semplici nei punti $z = \pm i$ e $z = 1$. Il percorso chiuso Γ_R^+ contiene sia il polo in $z = i$ che quello in $z = 1$, poiché la retta ρ si trova sotto l'asse reale, ne consegue che il percorso Γ_R^- contiene il solo polo in $z=i$. Il risultato finale si ottiene usando il teorema dei residui, infatti si ha

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_R^+}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)}dz-\frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_R^-}\frac{e^{-iz}}{(z^2+1)(z-1)}dz\right],\\
&=\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)},1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)},i\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-iz}}{(z^2+1)(z-1)},-i\right]\right)\\
&=\pi\left(\frac{e^i}{2}+\frac{e^{-1}}{2i(i-1)}+\frac{e^{-1}}{2i(i+1)}\right)\\
&=\pi\frac{e^i-e^{-1}}{2}.
\end{aligned}
$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si determini la serie di Laurent centrata nell'origine della funzione

$$f(z)=\frac{\mathrm{sen}(z)\,\mathrm{senh}(z)}{z^4}.$$

Soluzione del terzo problema

Usando l'identità $\mathrm{senh}(z)=-i\,\mathrm{sen}(iz)$ e la formula di addizione della funzione coseno

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta),$$

il numeratore della funzione $f(z)$ può essere scritto come somma di due funzioni coseno

$$f(z)=\frac{\mathrm{sen}(z)\,\mathrm{senh}(z)}{z^4}=-i\frac{\mathrm{sen}(z)\,\mathrm{sen}(iz)}{z^4}=i\frac{\cos(z+iz)-\cos(z-iz)}{2z^4}.$$

Sfruttando le serie di Taylor, con $1\pm i=\sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$, si ha

$$
\begin{aligned}
f(z)&=i\frac{\cos(z(1+i))-\cos(z(1-i))}{2z^4}\\
&=\frac{i}{2z^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{2j}}{(2j)!}z^{2j}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{2j}}{(2j)!}z^{2j}\right)\\
&=\frac{i}{2z^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-ji\pi}\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{2j}}{(2j)!}z^{2j}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{ji\pi}\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{2j}}{(2j)!}z^{2j}\right)\\
&=\frac{i}{2z^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{2j}}{(2j)!}z^{2j}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{2j}}{(2j)!}z^{2j}\right)\\
&=\frac{i}{2z^4}\sum_{j=0}^{\infty}\underbrace{\left(e^{-ji\pi/2}-e^{ji\pi/2}\right)}_{-2i\mathrm{sen}(j\pi/2)}\frac{2^j}{(2j)!}z^{2j}\\
&=\frac{1}{z^4}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{sen}(j\pi/2)\frac{2^j}{(2j)!}z^{2j},
\end{aligned}
$$

a partire dalla terza identità, nella prima e seconda serie, per il numero -1 si sono usate le due rappresentazioni: $-1=e^{-i\pi}$ e $-1=e^{i\pi}$. La funzione seno si annulla per ogni valore pari dell'indice j, quindi gli unici termini non-nulli della serie sono i dispari, ovvero, posto $j=2k+1$, avremo

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{sen}((2k+1)\pi/2)\frac{2^{2k+1}}{(2(2k+1))!}z^{2(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k+1}}{(4k+2)!}z^{4k-2}\equiv\sum_{n=-2}^{\infty}C_nz^n,$$

dove i coefficienti di Laurent sono

$$C_n=\begin{cases}(-1)^j\dfrac{2^{2j+1}}{(4j+2)!} & \forall\, n=4k-2,\ \text{con } k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\[2ex] 0 & \text{altrimenti}\end{cases}.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

L'operatore $\hat{A}$, non proporzionale all'identità, è definito in uno spazio di Hilbert a due dimensioni dalla relazione

$$\hat{A}^2 + \hat{A} + \hat{I} = 0\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità. Si determini la rappresentazione matriciale di $\hat{A}$ rispetto alla base formata dai due autovettori della prima matrice di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quarto problema

Indicando con $A_d = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$ la rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{A}$ si ha

$$A_d^2 + A_d + I = 0\,,$$

ovvero l'equazione di secondo grado per gli autovalori

$$\alpha_{1,2}^2 + \alpha_{1,2} + 1 = 0\,,$$

da cui si ottengono

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm 2i\pi/3}\,.$$

Gli operatori non proporzionali all'identità sono quelli con rappresentazione diagonale

$$A_d^{\pm} = \begin{pmatrix} e^{\pm 2i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{\mp 2i\pi/3} \end{pmatrix}.$$

Come è noto la matrice σ_1 ha autovalori $\lambda_\pm = \pm 1$ e autovettori

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix},$$

ne consegue che la matrice unitaria diagonalizzante è

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Le rappresentazioni cercate sono

$$A^{\pm} = U A_d^{\pm} U^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\pm 2i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{\mp 2i\pi/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \pm i\sqrt{3}/2 \\ \pm i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si calcolino autovalori e autovettori della matrice 2×2

$$B = e^{\sigma_1 + \sigma_2}\,,$$

dove σ_1 e σ_2 sono la prima e la seconda matrice di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quinto problema

Ci sono due possibilità. La prima consiste nel considerare la matrice somma, ovvero

$$S = \sigma_1 + \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix},$$

e diagonalizzarla. Gli autovalori sono le soluzione dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1-i \\ 1+i & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - 2 &= 0, \end{aligned}$$

quindi

$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}.$$

Gli autovettori $u_\pm$, di componenti proporzionali a $x_\pm$ e $y_\pm$ (a meno della normalizzazione), si ottengono dall'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix},$$

poniamo $x_\pm = 1$ quindi

$$y_\pm = \frac{\lambda_\pm}{1-i} = \frac{\pm\sqrt{2}}{1-i} = \pm e^{i\pi/4},$$

ovvero

$$u_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\pi/4} \end{pmatrix};$$

e la matrice unitaria diagonalizzante è

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ e^{i\pi/4}/\sqrt{2} & -e^{i\pi/4}/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione diagonale della matrice B è

$$B_d = \mathrm{diag}\left(e^{\sqrt{2}}, e^{-\sqrt{2}}\right),$$

quindi gli autovalori di B sono

$$\beta_\pm = e^{\pm\sqrt{2}}.$$

La rappresentazione di B rispetto alla base canonica si ottiene come

$$\begin{aligned} B = V B_d V^\dagger &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ e^{i\pi/4}/\sqrt{2} & -e^{i\pi/4}/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}}/\sqrt{2} & e^{-\sqrt{2}}/\sqrt{2} \\ e^{i\pi/4}e^{\sqrt{2}}/\sqrt{2} & -e^{i\pi/4}e^{-\sqrt{2}}/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -e^{-i\pi/4}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}}{2} & e^{-i\pi/4}\dfrac{e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}}{2} \\ e^{i\pi/4}\dfrac{e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}}{2} & \dfrac{e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui, usando le funzioni iperboliche, si ha

$$B = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{2}\right) & e^{-i\pi/4}\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right) \\ e^{i\pi/4}\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right) & \cosh\left(\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Il secondo metodo consiste nel calcolo esplicito dei termini della serie di Taylor dell'esponenziale

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)^k}{k!} .$$

In particolare si osserva che il quadrato è pari a due volte l'identità

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 2I + \{\sigma_1, \sigma_2\} = 2I ,$$

ne consegue che le potenze pari saranno

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^{2n} = \left[(\sigma_1 + \sigma_2)^2\right]^n = 2^n I , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

Le potenze dispari si ottengono dalla precedente, ovvero

$$(\sigma_1 + \sigma_2)^{2n+1} = (\sigma_1 + \sigma_2)^{2n} (\sigma_1 + \sigma_2) = 2^n (\sigma_1 + \sigma_2) , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} .$$

Alla luce di questi risultati la serie può essere calcolata separando i termini dispari e quelli pari come

$$\begin{aligned} B = e^{\sigma_1+\sigma_2} = (\sigma_1 + \sigma_2) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{(2j+1)!} + I \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{(2j)!} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2j}}{(2j+1)!} + I \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2j}}{(2j)!} \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{2}} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) + I \cosh\left(\sqrt{2}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (1-i)/\sqrt{2} \\ (1+i)/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{2}\right) , \end{aligned}$$

posto $(1 \pm i)/\sqrt{2} = e^{\pm i\pi/4}$ si ha

$$B = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{2}\right) & e^{-i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) \\ e^{i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) & \cosh\left(\sqrt{2}\right) \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{2}\right) - \beta & e^{-i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) \\ e^{i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) & \cosh\left(\sqrt{2}\right) - \beta \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\cosh\left(\sqrt{2}\right) - \beta\right]^2 - \operatorname{senh}^2\left(\sqrt{2}\right) = 0 ,$$

da cui

$$\beta_\pm = \cosh\left(\sqrt{2}\right) \pm \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) = e^{\pm\sqrt{2}} .$$

Gli autovettori $u_\pm$, per cui usiamo le stesse componenti del caso precedente, si ottengono dall'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{2}\right) & e^{-i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) \\ e^{i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) & \cosh\left(\sqrt{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} = \beta_\pm \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \end{pmatrix} .$$

Dalla prima componente si ha l'equazione

$$\cosh\left(\sqrt{2}\right) x_\pm + e^{-i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right) y_\pm = \beta_\pm x_\pm ,$$

posto $x_\pm = 1$, la seconda componente ha la forma

$$y_\pm = \frac{\beta_\pm - \cosh\left(\sqrt{2}\right)}{e^{-i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)} = \frac{2e^{\pm\sqrt{2}} - e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}}{2e^{-i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)} = \pm \frac{e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}}{2e^{-i\pi/4} \operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)} = \pm e^{i\pi/4} .$$

Infine, normalizzando, si ottengono gli autovettori

$$u_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\pi/4} \end{pmatrix} .$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Sfruttando il teorema della convoluzione si determini la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\cosh(x)}\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Scriviamo la funzione $f(x)$ come prodotto della funzione coseno e dell'inversa della funzione coseno iperbolico

$$f(x) = \cos(x)\frac{1}{\cosh(x)} \equiv f_1(x) f_2(x)\,,$$

con le definizioni

$$f_1(x) = \cos(x)\,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{\cosh(x)}\,.$$

Il teorema della convoluzione asserisce che la trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni coincide, a meno del fattore $1/\sqrt{2\pi}$, con la convoluzione delle singole trasformate di Fourier, ovvero

$$\mathscr{F}_k[f_1 f_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k[f_1] * \mathscr{F}_k[f_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_{k'}[f_1]\mathscr{F}_{k-k'}[f_2]\,dk'\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione coseno è

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_1(k) \equiv \mathscr{F}_k[\cos(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ix(k-1)} + e^{-ix(k+1)}\right)dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right]\,.
\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier dell'inverso del coseno iperbolico

$$\tilde{f}_2(k) \equiv \mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)}dx\,.$$

può essere ottenuta calcolando l'integrale nel piano complesso.
A tal fine definiamo il percorso rettangolare, mostrato in figura,

$$\Gamma_R = [-R, R] \cup [R, R+i\pi] \cup [R+i\pi, -R+i\pi] \cup [-R+i\pi, -R]\,,$$

dove con il simbolo $[z_1, z_2]$ si indica il segmento complesso di estremi z_1 e z_2, orientato nel verso che va dal primo al secondo punto. Questo percorso contiene la singolarità $z_0 = i\pi/2$, che rappresenta un polo semplice dell'integranda. Ne consegue che, per il teorema dei residui

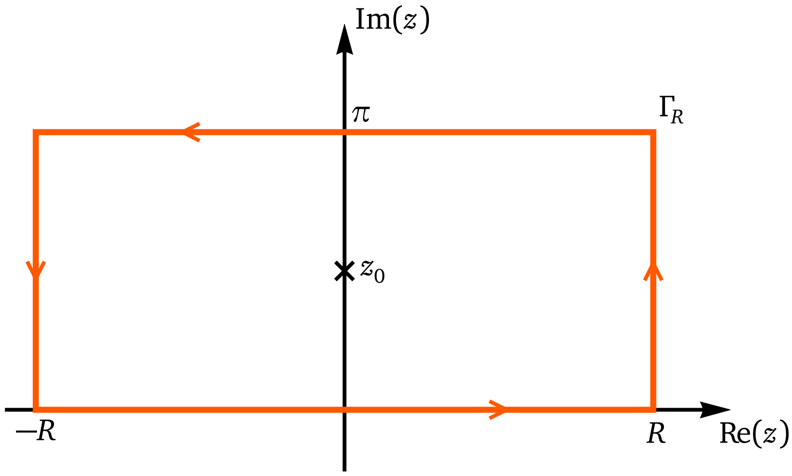
$$\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}, z_0\right] = 2\pi e^{k\pi/2}\,.$$

Questo risultato non dipende da R, quindi, includendo anche il fattore $1/\sqrt{2\pi}$,

$$\sqrt{2\pi}e^{k\pi/2} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz = \left(1+e^{k\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)}dx = \left(1+e^{k\pi}\right)\tilde{f}_2(k)\,, \tag{1}$$

dove abbiamo usato i limiti

$$\lim_{R\to\infty}\int_{[R,R+i\pi]}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{[-R+i\pi,-R]}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz = 0\,.$$



Questi ultimi si ottengono minorando i moduli degli integrali per mezzo della disuguaglianza di Darboux, infatti, posto $z = \pm R + iy$, rispettivamente per i due integrali, e per $R \gg 1$, si hanno

$$\left|\int_{[R,R+i\pi]} \frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)} dz\right| = \left|i\int_0^\pi \frac{e^{-ikR+ky}}{\cosh(R+iy)} dy\right| \le 2\int_0^\pi \frac{e^{ky}}{|e^{R+iy}+e^{-R-iy}|} dy \le 2\int_0^\pi \frac{e^{ky}}{e^R - e^{-R}} dy = \frac{2}{k}\frac{e^{k\pi}-1}{e^R-e^{-R}}$$

$$\left|\int_{[-R+i\pi,-R]} \frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)} dz\right| = \left|i\int_\pi^0 \frac{e^{ikR+ky}}{\cosh(-R+iy)} dy\right| \le 2\int_0^\pi \frac{e^{ky}}{|e^{-R+iy}+e^{R-iy}|} dy \le 2\int_0^\pi \frac{e^{ky}}{e^R - e^{-R}} dy = \frac{2}{k}\frac{e^{k\pi}-1}{e^R-e^{-R}}\,.$$

La funzione di R, che limita i moduli dei due integrali, è infinitesima nel limite considerato, cioè, $\forall\, k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{2}{k}\frac{e^{k\pi}-1}{e^R-e^{-R}} = 0\,.$$

Infine, usando il risultato dato nell' Eq. (1), la trasformata di Fourier della funzione $f_2(x)$ vale

$$\tilde{f}_2(k) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{k\pi/2}}{1+e^{k\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{-k\pi/2}+e^{k\pi/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cosh(k\pi/2)}\,.$$

Il risultato finale si ottiene calcolando la convoluzione delle due trasformate di Fourier

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(k')\tilde{f}_2(k-k')dk' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(k'-1)+\delta(k'+1)}{\cosh\big((k-k')\pi/2\big)}dk' \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cosh\big((k-1)\pi/2\big)} + \frac{1}{\cosh\big((k+1)\pi/2\big)}\right).
\end{aligned}$$