Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 7 febbraio 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$V=\int_L \frac{\sqrt{z}}{z^8+1}dz\,,\qquad L=\{z:z\in(0,\infty)\}\cup\{z:\mathrm{Re}(z)=0,\mathrm{Im}(z)\in(0,\infty)\}\,,$$

ovvero L è l'unione dei semiassi reale e immaginario positivi, entrambi percorsi dall'origine all'infinito.

Soluzione del primo problema

L'integrale può scritto come la somma dei due contributi

$$V=\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^8+1}dx+\int_0^\infty \frac{\sqrt{iy}}{(iy)^8+1}idy\equiv L_1+L_2\,,$$

con $z=x+iy$. I due integrali sono proporzionali, infatti con $i=e^{i\pi/2}$, si ha

$$L_2=\int_0^\infty \frac{\sqrt{iy}}{(iy)^8+1}idy=e^{3i\pi/4}\int_0^\infty \frac{\sqrt{y}}{y^8+1}dy=e^{3i\pi/4}L_1\,,$$

quindi, per l'integrale completo si ottiene l'espressione

$$V=\left(1+e^{3i\pi/4}\right)L_1.$$

D'altro canto, l'integrale L_1 può essere calcolato sfruttando il teorema de residui sul percorso chiuso Γ_R, rappresentato dalla frontiera del quarto di cerchio, centrato nell'origine, di raggio R e appartenente al primo quadrante, ovvero

$$\Gamma_R=\{z:z\in(0,R)\}\cup\{z:|z|=R,\ \arg(z)\in(0,\pi/2)\}\cup\left(-\{z:\mathrm{Re}(z)=0,\mathrm{Im}(z)\in(0,R)\}\right).$$

Su tale percorso, nel limite $R\to\infty$, si ha

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{\sqrt{z}}{z^8+1}dz=L_1-L_2=\left(1-e^{3i\pi/4}\right)L_1=2i\pi\sum_{\arg(z_k)\in(0,\pi/2)}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{z^8+1},z_k\right],$$

da cui si ottiene L_1 in termini della somma dei residui dei poli che l'integranda ha nel primo quadrante

$$L_1=\frac{2i\pi}{1-e^{3i\pi/4}}\sum_{\arg(z_k)\in(0,\pi/2)}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{z^8+1},z_k\right].$$

L'integranda ha 8 poli semplici nei punti

$$z_k=e^{i\pi(1+2k)/8}\,,\qquad k=0,1,\dots,7\,.$$

All'interno di Γ_R, $\forall R>1$, cadono i primi due: $z_0=e^{i\pi/8}$ e $z_1=e^{3i\pi/8}$, i residui corrispondenti sono

$$R_k=\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{z^8+1},z_k\right]=\frac{z_k^{1/2}}{8z_k^7}=\frac{z_k^{-13/2}}{8}=\begin{cases}\dfrac{e^{-13i\pi/16}}{8} & z_k=z_0\\[2ex] \dfrac{e^{-39i\pi/16}}{8} & z_k=z_1\end{cases}.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned}L_1&=\frac{2i\pi}{1-e^{3i\pi/4}}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{z^8+1},z_0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{z}}{z^8+1},z_1\right]\right)=\frac{2i\pi}{1-e^{3i\pi/4}}\frac{e^{-13i\pi/16}+e^{-39i\pi/16}}{8}\\&=\frac{2i\pi}{1-e^{3i\pi/4}}e^{-26i\pi/16}\frac{e^{13i\pi/16}+e^{-13i\pi/16}}{8}=\frac{i\pi}{1-e^{3i\pi/4}}e^{-13i\pi/8}\frac{\cos(13\pi/16)}{2}\,.\end{aligned}$$

Usando questa espressione per L_1 si ottiene l'integrale cercato

$$V = \left(1+e^{3i\pi/4}\right)L_1 = \frac{i\pi e^{-13i\pi/8}}{2}\frac{1+e^{3i\pi/4}}{1-e^{3i\pi/4}}\cos(13\pi/16) = -\frac{\pi e^{-13i\pi/8}}{2}\cot(3\pi/8)\cos(13\pi/16)\,,$$

infine, riassorbendo il segno meno nell'esponenziale

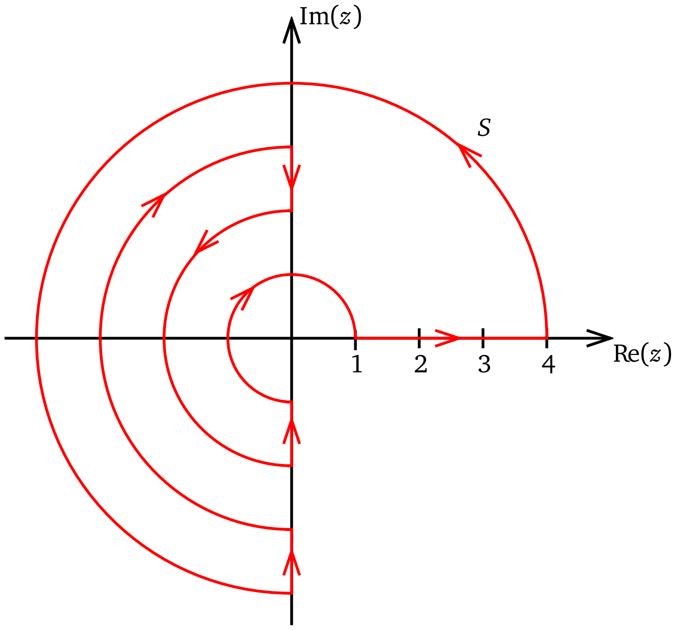
$$V = \frac{\pi e^{-5i\pi/8}}{2}\cot(3\pi/8)\cos(13\pi/16)\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$T = \oint_S \frac{\mathrm{Re}(z)}{z^3}dz\,,$$

dove S è il percorso chiuso mostrato in figura.



Soluzione del secondo problema

Il percorso di integrazione S è l'unione di quattro archi A_k e quattro tratti rettilinei L_k, $k=1,2,3,4$, con

$$\begin{array}{ll} A_1 = \{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 3\pi/2]\} & L_1 = \{z : z \in [1,4]\} \\ A_2 = \{z : z = 2e^{i\theta}, \theta \in [\pi/2, 3\pi/2]\} & L_2 = \{z : \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \in [-2,-1]\} \\ A_3 = \{z : z = 3e^{i\theta}, \theta \in [\pi/2, 3\pi/2]\} & L_3 = -\{z : \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \in [2,3]\} \\ A_4 = \{z : z = 4e^{i\theta}, \theta \in [0, 3\pi/2]\} & L_4 = \{z : \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \in [-4,-3]\} \end{array},$$

in particolare si ha

$$S = \left(\bigcup_{k=1}^4 (-1)^k A_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^4 L_k\right),$$

dove il segno variabile $(-1)^k$ indica che gli archi sono percorsi alternativamente in senso orario e antiorario, mentre dei tratti rettilinei solo L_3 è percorso in senso inverso e il corrispondente segno meno è incluso nella definizione. L'integrale può essere scritto come segue

$$T = \frac{1}{2}\oint_S \frac{z+z^*}{z^3}dz = \frac{1}{2}\oint_S \frac{z^*}{z^3}dz = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^4\left((-1)^k\int_{A_k}\frac{z^*}{z^3}dz + \int_{L_k}\frac{z^*}{z^3}dz\right),$$

la seconda identità di ha in quanto l'integranda ha una sola singolarità polare nell'origine che non è contenuta nel percorso chiuso S. Calcoliamo gli integrali sugli archi facendo la sostituzione $z = r_k e^{i\theta}$, con i raggi $r_k = k$,

$k = 1, 2, 3, 4,$

$$\int_{A_k} \frac{z^*}{z^3} dz = \int_{\theta_1^k}^{\theta_2^k} \frac{r_k^2}{r_k^3 e^{3i\theta}} i d\theta = \begin{cases} (1+i)/3 & k=1 \\ i/3 & k=2 \\ 2i/9 & k=3 \\ (1+i)/12 & k=4 \end{cases} .$$

Gli integrali sui tratti rettilinei si calcolano usando invece la rappresentazione cartesiana $z = x + iy$,

$$\int_{L_1} \frac{z^*}{z^3} dz = \int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \frac{3}{4},$$

$$\int_{L_2} \frac{z^*}{z^3} dz = \int_{-2}^{-1} \frac{-iy}{-iy^3} i dy = i \int_{-2}^{-1} \frac{dy}{y^2} = \frac{i}{2},$$

$$\int_{L_3} \frac{z^*}{z^3} dz = -i \int_2^3 \frac{dy}{y^2} = -\frac{i}{6},$$

$$\int_{L_4} \frac{z^*}{z^3} dz = i \int_{-4}^{-3} \frac{dy}{y^2} = \frac{i}{12}.$$

L'integrale cercato è quindi la somma degli 8 contributi e vale

$$T = \frac{1}{2}\left(-\frac{1+i}{3} + \frac{i}{3} - \frac{2i}{9} + \frac{1+i}{12} + \frac{3}{4} + \frac{i}{2} - \frac{i}{6} + \frac{i}{12}\right) = \frac{1}{4} + \frac{5}{36} i .$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

La funzione meromorfa $f(z)$, che ha solo poli semplici, ammette lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$f(z) = f_0 + \sum_k \frac{A^{(k)}}{z - z_k},$$

dove f_0 è una costante e $\{z_k\}_k$ è l'insieme dei poli semplici. Si dimostri che la funzione $g(z) = f^2(z)$ ha sviluppo di Mittag-Leffler

$$g(z) = g_0 + \sum_k \left(\frac{R_{-2}^{(k)}}{(z - z_k)^2} + \frac{R_{-1}^{(k)}}{z - z_k} \right),$$

con

$$g_0 = f_0^2, \qquad R_{-2}^{(k)} = \left(A^{(k)}\right)^2, \qquad R_{-1}^{(k)} = 2A^{(k)} \left(f_0 + \sum_{m \neq k} \frac{A^{(m)}}{z_k - z_m} \right).$$

Soluzione del terzo problema

I poli della funzione $f(z)$ e quindi della funzione $g(z)$ sono isolati, ne consegue che in un opportuno intorno U_k del generico z_k si ha

$$f(z) = \frac{\phi_k(z)}{z - z_k},$$

dove la funzione $\phi_k(z)$ è analitica e non nulla $\forall\, z \in U_k$. Il k-esimo residuo coincide con il valore della funzione $\phi_k(z)$ in $z = z_k$, ovvero $A^{(k)} = \phi_k(z_k)$. Per la funzione $g(z)$ avremo

$$g(z) = \frac{\phi_k^2(z)}{(z - z_k)^2},$$

quindi $g(z)$ ha solo poli doppi nei punti in cui la $f(z)$ ha i poli semplici. Lo sviluppo di Mittag-Leffler ha la forma

$$g(z) = g_0 + \sum_k \left(\frac{R_{-2}^{(k)}}{(z - z_k)^2} + \frac{R_{-1}^{(k)}}{z - z_k} \right).$$

Il valore costante g_0 si ottiene considerando il limite

$$g_0 = \lim_{j\to\infty} g(p_j) = \lim_{j\to\infty} f^2(p_j) = \lim_{j\to\infty}\left(f_0 + \sum_k \frac{A^{(k)}}{p_j - z_k}\right)^2$$
$$= f_0^2 + 2f_0 \lim_{j\to\infty}\sum_k \frac{A^{(k)}}{p_j - z_k} + \lim_{j\to\infty}\left(\sum_k \frac{A^{(k)}}{p_j - z_k}\right)^2 = f_0^2\,,$$

dove la successione $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ si accumula all'infinito, $|p_j| \underset{j\to\infty}{\to} \infty$, e ha intersezione vuota con l'insieme dei poli, $\{p_j\}_{j=0}^{\infty} \cap \{z_k\} = \emptyset$. I valori dei coefficienti di Laurent delle parti principali si ottengono con la formula integrale

$$R_j^{(k)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k} \frac{g(z)}{(z-z_k)^{j+1}}dz\,, \qquad j = -2, -1\,,$$

dove γ_k è una circonferenza che avvolge solo il k-esimo polo z_k. Con $j = -2$ si ha

$$\begin{aligned}
R_{-2}^{(k)} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k} g(z)(z-z_k)dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k}\left(f_0 + \sum_m \frac{A^{(m)}}{z-z_m}\right)^2 (z-z_k)dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k}\left(f_0^2 + 2f_0\sum_m \frac{A^{(m)}}{z-z_m} + \sum_{m,n}\frac{A^{(m)}A^{(n)}}{(z-z_m)(z-z_n)}\right)(z-z_k)dz\,,
\end{aligned}$$

gli unici integrali diversi da zero sono quelli che contengono il polo semplice $1/(z-z_k)$, tutti gli altri poli non contribuiscono non essendo inclusi in γ_k. Il primo termine in f_0^2 è nullo, così come la prima somma, infatti il polo $1/(z-z_k)$, per $m = k$, è cancellato dal fattore $(z-z_k)$. Dalla seconda (doppia) somma si ha un solo contributo non nullo, quello contenente il polo doppio $1/(z-z_k)^2$, per $m = n = k$, che diventa singolo a causa del fattore $(z-z_k)$. In definitiva per $R_{-2}^{(k)}$ si ha il valore cercato

$$R_{-2}^{(k)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k}\sum_{m,n}\frac{A^{(m)}A^{(n)}}{(z-z_m)(z-z_n)}(z-z_k)dz = \left(A^{(k)}\right)^2\,.$$

Il coefficiente $R_{-1}^{(k)}$, ovvero il residuo, è

$$\begin{aligned}
R_{-1}^{(k)} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k} g(z)dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k}\left(f_0 + \sum_m \frac{A^{(m)}}{z-z_m}\right)^2 dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k}\left(f_0^2 + 2f_0\sum_m \frac{A^{(m)}}{z-z_m} + \sum_{m,n}\frac{A^{(m)}A^{(n)}}{(z-z_m)(z-z_n)}\right)dz\,,
\end{aligned}$$

con le stesse considerazioni del caso precedente, si ha contributo non nullo dal termine con $m = k$ della prima somma e da quelli con $m = k$ o $n = k$ della seconda. Il termine con $m = n = k$ dà invece contributo nullo. Ne consegue che anche per $R_{-1}^{(k)}$ si ottiene il valore cercato

$$R_{-1}^{(k)} = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_k}\left(2f_0\frac{A^{(k)}}{z-z_k} + 2A^{(k)}\sum_{m\neq k}\frac{A^{(m)}}{(z-z_m)(z-z_k)}\right)dz = 2A^{(k)}\left(f_0 + \sum_{m\neq k}\frac{A^{(m)}}{(z_k-z_m)}\right).$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Dopo aver verificato che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile si ottengano gli autovalori e gli autovettori. Infine, si calcoli la matrice

$$B = \operatorname{sen}(A)\,.$$

Soluzione del quarto problema

Gli autovalori sono le soluzione dell'equazione secolare in a,

$$\det\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1-a \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-a)^3 = 0\,,$$

si ha quindi massima degenerazione: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Gli autovettori sono

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

da cui si ha la sola condizione $y = 0$. Scegliamo la terna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice non è diagonalizzabile poiché non ammette un insieme di autovettori linearmente indipendenti, come diretta conseguenza dell'annullamento della seconda componente. Infatti la molteplicità geometrica, ovvero la dimensione dello spazio vettoriale generato dagli autovettori è pari a 2 ed è strettamente minore della molteplicità algebrica che è invece pari a 3 (il grado dell'equazione secolare).
Per calcolare la funzione seno della matrice A, non possiamo usare il teorema spettrale, non essendo A diagonalizzabile, usiamo direttamente lo sviluppo in serie di Taylor

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Le potenze dispari di A sono:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^3A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^7 = A^5A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdots = \cdots$$

$$A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che

$$B = \mathrm{sen}(A) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(1) & 0 \\ 0 & \cos(1) & \mathrm{sen}(1) \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si determini la matrice C che verifica l'identità

$$\ln(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quinto problema

Diagonalizziamo la matrice hermitiana $\ln(C)$. Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\det\begin{pmatrix} 1-c & 0 & -1 \\ 0 & 1-c & 0 \\ -1 & 0 & 1-c \end{pmatrix} = (1-c)^3 - 1 + c = 0$$

$$c(c-1)(c-2) = 0$$

e sono

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 1 \qquad c_3 = 2\,,$$

Gli autovettori

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sono ortogonali poiché gli autovalori sono diversi, non c'è degenerazione e la matrice è hermitiana. Usando la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

diagonalizziamo l'equazione iniziale come

$$\mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3) = U^\dagger \ln(C) U = \ln(C_d) = \mathrm{diag}(\ln(l_1), \ln(l_2), \ln(l_3))\,,$$

dove C_d è la rappresentazione diagonale di C, ovvero $C_d = \mathrm{diag}(l_1, l_2, l_3) = U^\dagger C U$. Ne consegue che

$$l_k = e^{c_k}\,, \qquad k = 1, 2, 3\,,$$

e quindi

$$C_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione della matrice C rispetto alla base canonica si ottiene invertendo la trasformazione unitaria

$$C = UC_dU^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

da cui

$$C = \begin{pmatrix} (1+e^2)/2 & 0 & (1-e^2)/2 \\ 0 & e & 0 \\ (1-e^2)/2 & 0 & (1+e^2)/2 \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si risolva l'equazione differenziale

$$u''(x) - \alpha^2 u(x) = \delta'(x+\beta)\,, \qquad \alpha, \beta > 0\,,$$

usando il metodo della trasformata di Fourier.

Soluzione del sesto Problema

Facendo la trasformata di Fourier di ambo i membri si ottiene

$$\left(-k^2 - \alpha^2\right)\tilde{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x+\beta)e^{-ikx}dx = \left.\frac{\delta(x+\beta)e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}\right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x+\beta)e^{-ikx}dx = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\beta}\,,$$

da cui si ricava la trasformata di Fourier della soluzione

$$\tilde{u}(k) = -\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ik\beta}}{k^2+\alpha^2}\,.$$

La soluzione è l'anti-trasformata di Fourier di $\tilde{u}(k)$

$$u(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ik\beta}}{k^2+\alpha^2}e^{ikx}dk = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ik(x+\beta)}}{k^2+\alpha^2}dk = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha(x+\beta)}}{2} & x+\beta > 0 \\[2ex] -\dfrac{e^{\alpha(x+\beta)}}{2} & x+\beta < 0 \end{cases}.$$

È Facile verificare che, per $x+\beta \neq 0$, la funzione trovata è soluzione dell'equazione (omogenea), infatti

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2\right)u(x) = 0\,.$$

La verifica completa può essere fatta considerando la rappresentazione integrale di Fourier della soluzione, ovvero

$$u(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ke^{ik(x+\beta)}}{k^2+\alpha^2}dk\,.$$

Applicando l'operatore differenziale $\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2\right)$ si ottiene l'identità cercata, infatti

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2\right)u(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(-k^2-\alpha^2)e^{ik(x+\beta)}}{k^2+\alpha^2}dk = -\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ke^{ik(x+\beta)}dk = \frac{d}{dx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x+\beta)}dk = \frac{d}{dx}\delta(x+\beta),$$

in definitiva

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2\right)u(x) = \delta'(x+\beta)\,.$$