Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 7 dicembre 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si stabilisca per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ l'integrale

$$M(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{2x}+1} dx$$

converge e se ne calcoli il valore in funzione di α.

Soluzione del primo problema

Con la sostituzione $w = e^x$ si ottiene

$$M(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{w^\alpha}{w^2+1} \frac{dw}{w} = \int_0^{\infty} \frac{w^{\alpha-1}}{w^2+1} dw.$$

La funzione razionale $(w^2+1)^{-1}$, le potenze che ne descrivono i comportamenti in $w \to 0$ e $w \to \infty$ sono: $l = 0$ e $h = -2$, quindi la condizione di convergenza

$$\begin{aligned} -1 - l < \mathrm{Re}(\alpha - 1) &< -h - 1\,, \\ -l < \mathrm{Re}(\alpha) &< -h\,, \\ 0 < \mathrm{Re}(\alpha) &< 2\,. \end{aligned}$$

La formula risolutiva

$$M(\alpha) = -\frac{\pi e^{-i\pi(\alpha-1)}}{\mathrm{sen}(\pi(\alpha-1))} \sum_{\mathrm{tot}} \mathrm{Res}\left[\frac{z^{\alpha-1}}{z^2+1}\right] = -\frac{-\pi e^{-i\pi\alpha}}{-\mathrm{sen}(\pi\alpha)} \sum_{\mathrm{tot}} \mathrm{Res}\left[\frac{z^{\alpha-1}}{z^2+1}\right] = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)} \left(R_1 + R_2\right)\,.$$

L'integranda ha infatti due poli semplici $z_{1,2} = \pm i$, con residui sono

$$R_{1,2} = \lim_{z \to \pm i} \frac{z^{\alpha-1}}{\pm 2i} = \begin{cases} \dfrac{e^{i\pi(\alpha-1)/2}}{2i} = -\dfrac{e^{i\pi\alpha 2}}{2} & z = z_1 \\[2ex] \dfrac{e^{3i\pi(\alpha-1)/2}}{-2i} = \dfrac{e^{3i\pi\alpha/2}}{-2} & z = z_2 \end{cases}\,.$$

La somma dei residui

$$R_1 + R_2 = -\frac{e^{i\pi\alpha 2} + e^{3i\pi\alpha/2}}{2} = -e^{i\pi\alpha}\frac{e^{-i\pi\alpha/2} + e^{i\pi\alpha/2}}{2} = -e^{i\pi\alpha}\cos(\pi\alpha/2)\,.$$

Sostituendo il valore di questa somme nell'espressione precedente si ottiene il risultato finale

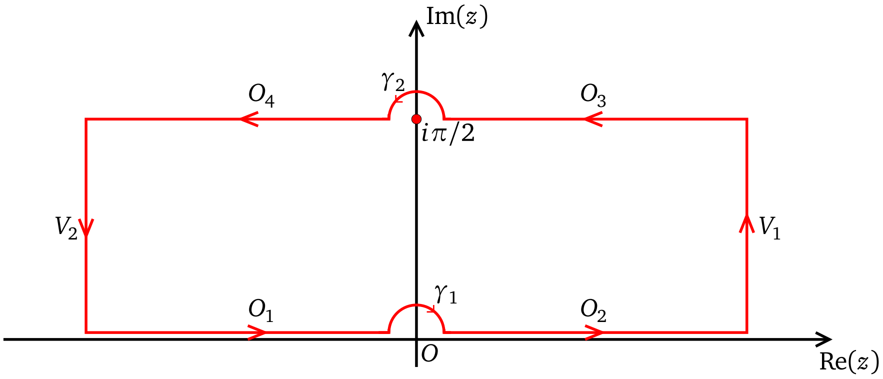
$$M(\alpha) = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)}\left(R_1 + R_2\right) = \frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)} e^{i\pi\alpha}\cos(\pi\alpha/2) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}(\pi\alpha/2)}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{senh}(x)\cosh(x)} dx\,.$$

Soluzione del secondo problema



Si definisce il percorso rettangolare chiuso doppiamente dentato $\Gamma(R,\epsilon)$, mostrato in figura, con sei tratti rettilinei, di cui quattro orizzontali, O_1, O_2, O_3, O_4, e due verticali, V_1, V_2, e due semicirconferenze, γ_1, γ_2. Indicando con $S[z_1, z_2]$ il segmento del piano complesso che unisce i punti z_1 e z_2, orientato nel verso che va dal primo al secondo, si hanno

$$O_1 = S[-R,-\epsilon]\,,\quad O_2 = S[\epsilon,R]\,,\quad O_3 = S[R+i\pi/2,\epsilon+i\pi/2]\,,\quad O_4 = S[-\epsilon+i\pi/2,-R+i\pi/2]\,,$$
$$V_1 = S[R,R+i\pi/2]\,,\quad V_2 = S[-R+i\pi/2,-R]\,.$$

Le semicirconferenze di raggio ϵ e centri in $z=0$ e $z=i\pi/2$ sono

$$\gamma_1 = \{z : z = \epsilon e^{i\theta},\, \theta \in [0,\pi]\}\,, \qquad \gamma_2 = \{z : z = i\pi/2 + \epsilon e^{i\theta},\, \theta \in [0,\pi]\}\,.$$

In definitiva

$$\Gamma(R,\epsilon) = \left(\bigcup_{j=1}^{4} O_j\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{2} V_k\right) \cup (-\gamma_1) \cup \gamma_2\,.$$

Poich l'integranda ha in $z=0$ una singolarit eliminabile si ha, sul lato dentato appoggiato sull'asse reale,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty} \int_{O_1\cup(-\gamma_1)\cup O_2} \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{senh}(z)\cosh(z)} dz = T\,.$$

Sui lati verticali del rettangolo

$$\lim_{R\to\infty} \int_{V_1} \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{senh}(z)\cosh(z)} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{V_2} \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{senh}(z)\cosh(z)} dz = 0\,.$$

Sul lato dentato superiore usiamo

$$\gamma_2 = \gamma_1 + i\pi/2\,, \qquad O_3 = -O_2 + i\pi/2\,, \qquad O_4 = -O_1 + i\pi/2\,,$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{O_3\cup\gamma_2\cup O_4}\frac{\mathrm{sen}(z)dz}{\mathrm{senh}(z)\cosh(z)} &= -\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{O_1\cup(-\gamma_1)\cup O_2}\frac{\mathrm{sen}(z+i\pi/2)dz}{\mathrm{senh}(z+i\pi/2)\cosh(z+i\pi/2)}\\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{O_1\cup(-\gamma_1)\cup O_2}\frac{\mathrm{sen}(z)\cos(i\pi/2)+\cos(z)\mathrm{sen}(i\pi/2)}{i\cosh(z)i\mathrm{senh}(z)}dz\\
&= \cosh(\pi/2)T + i\mathrm{senh}(\pi/2)\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{O_1\cup(-\gamma_1)\cup O_2}\frac{\cos(z)}{\cosh(z)\mathrm{senh}(z)}dz\\
&= \cosh(\pi/2)T + i\mathrm{senh}(\pi/2)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\gamma_1}\frac{\cos(z)}{\cosh(z)\mathrm{senh}(z)}dz\\
&= \cosh(\pi/2)T + i\mathrm{senh}(\pi/2)\lim_{\epsilon\to 0}\left(-i\pi\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\cos(z)z}{\cosh(z)\mathrm{senh}(z)}\right)\\
&= \cosh(\pi/2)T + \pi\mathrm{senh}(\pi/2)\,.
\end{aligned}
$$

Abbiamo usato, nella quartultima riga, il fatto che l'integrale su $O_1\cup O_2$ si annulla in quanto l'integranda dispari rispetto allo scambio $z\to -z$ e l'intervallo di integrazione simmetrico; per l'integrale su γ_1, nelle terzultima riga, il lemma di integrazione sugli archi infinitesimi. In definitiva, poich il percorso chiuso $\Gamma(R,\epsilon)$ contiene la singolarit in $z = i\pi/2$,

$$
2i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sen}(z)}{\mathrm{senh}(z)\cosh(z)}, i\pi/2\right] = \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma(R,\epsilon)}\frac{\mathrm{sen}(z)}{\mathrm{senh}(z)\cosh(z)}dz = \left[1+\cosh(\pi/2)\right]T + \pi\mathrm{senh}(\pi/2)\,.
$$

Il residuo del polo semplice

$$
\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sen}(z)}{\mathrm{senh}(z)\cosh(z)}, i\pi/2\right] = \lim_{z\to i\pi/2}\frac{\mathrm{sen}(z)(z-i\pi/2)}{\mathrm{senh}(z)\cosh(z)} = \frac{\mathrm{sen}(i\pi/2)}{\mathrm{senh}^2(i\pi/2)} = -i\mathrm{senh}(\pi/2)\,,
$$

quindi

$$
T = \pi\frac{\mathrm{senh}(\pi/2)}{1-\cosh(\pi/2)} = \pi\frac{2\mathrm{senh}(\pi/4)\cosh(\pi/4)}{1+\left[2\cosh^2(\pi/4)-1\right]} = \pi\tanh(\pi/4)\,.
$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si determini lo sviluppo di Laurent in $0<|z-1|<2$, centrato in $z=1$, della funzione

$$
f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{(z+1)^2}\,.
$$

Soluzione del terzo problema

Per la funzione a numeratore si ha lo sviluppo in serie ereditato da quello per la funzione esponenziale,

$$
\exp\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{-k}}{k!}\,.
$$

Il fattore $1/(z+1)^2$ pu essere ricondotto alla derivata di una serie geometrica,

$$
\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{1}{1+(z-1)/2}\,.
$$

Dalla condizione $0 < |z-1| < 2$, si ha $|z-1|/2 < 1$, quindi la funzione di cui si fa la derivata nell'equazione precedente rappresenta la somma di una serie geometrica uniformemente convergente di ragione $-(z-1)/2$,

$$\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-1)^m}{(-2)^m} = \frac{d}{dz}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-1)^m}{(-2)^{m+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} m\frac{(z-1)^{m-1}}{(-2)^{m+1}} = \{j = m-1\} = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{(z-1)^j}{(-2)^{j+2}}\,.$$

Con i due risultati si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{j+1}{(-2)^{j+2}}(z-1)^{j-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-1)^n\,.$$

La serie di Laurent completa, si hanno tutte le potenze, $C_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. Il coefficiente n-simo

$$C_n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(-k)!}\frac{j+1}{(-2)^{j+2}}\delta_{j-k,n} = \{j = n+k\} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{n+k+1}{(-2)^{n+k+2}} & n \geq 0 \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=-n}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{n+k+1}{(-2)^{n+k+2}} & n \leq -1 \end{cases}\,.$$

La presenza dei due casi conseguenza del fatto che ponendo $j = n+k$, come imposto dalla delta di Kronecker, necessario considerare che l'indice j varia da 0 and infinto, quindi

$$n + k = j \geq 0 \qquad \Rightarrow k \geq -n\,,$$

quindi se $-n \leq 0$, ovvero $n \geq 0$, l'indice k pu coprire il suo naturale intervallo da 0 ad infinito, se, invece, $-n \geq 1$, cio , $n \leq -1$, i valori di k partiranno da $-n = |n| \geq 1$, anzich da 0. La serie (completa) che definisce i coefficienti di Laurent della parte regolare pu essere sommata, infatti,

$$\begin{aligned} C_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{n+k+1}{(-2)^{n+k+2}} &= \frac{n+1}{(-2)^{n+2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1/2)^k}{k!} + \frac{1}{(-2)^{n+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1/2)^k}{(k-1)!} \\ &= \{k' = k-1\} = \frac{n+1}{(-2)^{n+2}}\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{(-2)^{n+2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1/2)^k}{(k-1)!} \\ &= \frac{n+1}{(-2)^{n+2}}\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{(-2)^{n+3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1/2)^{k'}}{k'!} \\ &= \frac{-2n-1}{(-2)^{n+3}\sqrt{e}} = (-1)^n\frac{2n+1}{2^{n+3}\sqrt{e}}\,, \qquad n \geq 0\,. \end{aligned}$$

Il coefficiente generico si ottiene dalla legge duplice

$$C_n = \begin{cases} \displaystyle(-1)^n\frac{2n+1}{2^{n+3}\sqrt{e}} & n \geq 0 \\[2ex] \displaystyle(-1)^n\frac{2n+1}{2^{n+3}\sqrt{e}} - \sum_{k=0}^{-n-1}\frac{1}{k!}\frac{n+k+1}{(-2)^{n+k+2}} & n \leq -1 \end{cases}\,,$$

nella seconda espressione la serie $\sum_{k=-n}^{\infty}$ data dalla sottrazione della somma finita dei primi $(-n)$ termini alla serie completa, ovvero: $\sum_{k=-n}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} - \sum_{k=0}^{-n-1}$.

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si risolva l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x+y)u(x-y)dy = e^{-x^2},$$

determinando la funzione incognita $u(x)$.

Soluzione del quarto problema

Facciamo la sostituzione $w = x + y$, nell'integrale e si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x+y)u(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} u(w)u(2x-w)dw = e^{-x^2}.$$

Nell'ultima identit sostituiamo $x' = 2x$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(w)u(x'-w)dw = e^{-x'^2/4}.$$

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri, osservando che l'integrale rappresenta la convoluzione $(u * u)(x)$,

$$\sqrt{2\pi}\,\tilde{u}^2(k) = \sqrt{2}\,e^{-k^2}$$

$$\tilde{u}(k) = \frac{e^{-k^2/2}}{\pi^{1/4}}.$$

L'anti-trasformata d la funzione $u(x)$, soluzione dell'equazione integrale,

$$u(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}}.$$

Si verifica facilmente che

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x+y)u(x-y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2/2-(x-y)^2/2}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dy$$
$$= \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = e^{-x^2}.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si risolva l'equazione differenziale matriciale

$$\frac{du}{dx}(x) = Hu(x),$$

dove H la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e $u(x)$ il vettore colonna 2×1 incognito, che in $x = 0$ vale

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quinto problema

Diagonalizziamo la matrice H, gli autovalori e gli autostati sono

$$x_{1,2} = 1 \pm i\,, \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria che diagonalizza H

$$D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\tilde{H} = D^\dagger H D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Applicando $D^\dagger$ a destra di ambo i membri dell'equazione differenziale e usando la relazione di unitariet di D si ottiene

$$\begin{aligned} D^\dagger \frac{du}{dx}(x) &= D^\dagger H D D^\dagger u(x) \\ \frac{d\tilde{u}}{dx}(x) &= \tilde{H}\tilde{u}(x) \\ \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{u}_1}{dx}(x) \\ \frac{d\tilde{u}_2}{dx}(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \tilde{u}_1(x) \\ x_2 \tilde{u}_2(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove si posto $\tilde{u} = D^\dagger u$. La soluzione $\tilde{u}(x)$

$$\tilde{u}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(x) \\ \tilde{u}_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(0)e^{x_1 x} \\ \tilde{u}_2(0)e^{x_2 x} \end{pmatrix}.$$

Otteniamo $u(x)$ applicando a la matrice D a $\tilde{u}(x)$, si ha

$$u(x) = D\tilde{u}(x) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(0)e^{x_1 x} \\ \tilde{u}_2(0)e^{x_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\tilde{u}_1(0)e^{x_1 x} + \tilde{u}_2(0)e^{x_2 x}\right)/\sqrt{2} \\ i\left(-\tilde{u}_1(0)e^{x_1 x} + \tilde{u}_2(0)e^{x_2 x}\right)/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Infine usiamo le condizioni al contorno per determinare le due costanti $\tilde{u}_1(0)$ e $\tilde{u}_2(0)$. In $x = 0$,

$$u(x) = \begin{pmatrix} \left(\tilde{u}_1(0) + \tilde{u}_2(0)\right)/\sqrt{2} \\ i\left(-\tilde{u}_1(0) + \tilde{u}_2(0)\right)/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene un sistema di due equazioni

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(0) + \tilde{u}_2(0) &= \sqrt{2} \\ \tilde{u}_1(0) - \tilde{u}_2(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

le soluzioni sono

$$\tilde{u}_1(0) = \tilde{u}_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Consideriamo, la prima componente della soluzione $u(x)$ e usiamo la relazione tra gli autovalori $x_1 = x_2^*$,

$$u_1(x) = \frac{\tilde{u}_1(0)e^{x_1 x} + \tilde{u}_2(0)e^{x_2 x}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{x_1 x} + e^{x_2 x}}{2} = \frac{e^{x_1 x} + \left(e^{x_1 x}\right)^*}{2} = \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\right) = e^x \cos(x)\,.$$

Per la seconda si ha

$$u_2(x) = \frac{\tilde{u}_1(0)e^{x_1 x} - \tilde{u}_2(0)e^{x_2 x}}{i\sqrt{2}} = \frac{e^{x_1 x} - e^{x_2 x}}{2i} = \frac{e^{x_1 x} - (e^{x_1 x})^*}{2i} = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\right) = e^x \operatorname{sen}(x)\,.$$

In definitiva

$$u(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix},$$

si determinino gli autovalori, gli autovettori e la matrice $B_n = |A|^{2n}$, potenza n-esima del modulo quadro, $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione del sesto Problema

La matrice pu   essere definita a blocchi 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori e autovettori della matrice H sono

$$\theta_{1,2} = 1 \pm i\,, \qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quelli della matrice L

$$\lambda_{1,2} = \pm 1 + i\,, \qquad l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che gli autovalori e autovettori di A sono

$$\begin{matrix} \alpha_{1,2} = 1 \pm i \\ \alpha_{3,4} = \pm 1 + i \end{matrix}\,, \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice che diagonalizza A

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La potenza n-esima, $n \in \mathbb{N}$, del modulo quadro della rappresentazione diagonale $\tilde{A} = U^\dagger A U$ della matrice A si ottiene come

$$\tilde{B}_n = |\tilde{A}|^{2n} = \mathrm{diag}\left(|\alpha_1|^2, |\alpha_2|^2, |\alpha_3|^2, |\alpha_4|^2\right) = \mathrm{diag}\,(2^n, 2^n, 2^n, 2^n) = 2^n I_4\,,$$

dove I_4 la matrice identit 4×4. In rappresentazione rispetto alla base canonica ha ovviamente la stessa forma essendo proporzionale alla matrice isentit ,

$$B_n = |A|^{2n} = U|\tilde{A}|^{2n}U^\dagger = 2^n I_4\,.$$