Metodi Matematici per la Fisica

Quarto appello estivo - 6 settembre 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$= \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^5 \cosh(z)}\,.$$

Curiosità. Il simbolo  rappresenta *Kokopelli* il dio della fertilità secondo le credenze di alcune tribù di nativi americani che vivevano nei territori a sud-ovest degli attuali Stati Uniti. In questo caso la divinità è raffigurata come un suonatore di flauto gobbo con la testa ornata da quattro piume.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è meromorfa ha un polo di ordine cinque nell'origine e poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$, gli zeri della funzione coseno iperbolico. Il percorso d'integrazione, la circonferenza di raggio 2 e con centro nell'origine avvolge una sola volte tre poli, i due semplici $z_0 = i\pi/2$ e $z_{-1} = -i\pi/2$, e il polo di ordine cinque nell'origine. Applicando il teorema dei residui si ha

$$= 2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^5\cosh(z)}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^5\cosh(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^5\cosh(z)}, -\frac{i\pi}{2}\right]\right).$$

Il residuo nell'origine può essere ottenuto come il coefficiente di Laurent C_4 della serie della funzione $1/\cosh(z)$ centrata nell'origine. Infatti, si ha che $\forall\, k \in \mathbb{Z}$,

$$C_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{dz}{\cosh(z) z^{k+1}}\,,$$

dove γ è un percorso chiuso che avvolge una sola volta l'origine, senza includere gli zeri del funzione coseno iperbolico. Per ottenere il coefficiente C_4 usiamo la somma della serie geometrica. Nel limite $z \to 0$, si ha

$$\frac{1}{\cosh(z)} = \frac{1}{1 + z^2/2 + z^4/4! + \cdots} = 1 - \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots\,,$$

consideriamo la potenza quattro, ci sono solo i contributi dalla prima e seconda paretesi, cioè

$$\frac{1}{\cosh(z)} = 1 - \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots = \cdots + z^4\left(-\frac{1}{4!} + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots = \cdots + z^4\frac{5}{24} + \cdots\,,$$

quindi

$$C_4 = \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^5\cosh(z)}, 0\right] = \frac{5}{24}\,.$$

I residui nei poli semplici $z_0 = i\pi/2$ e $z_{-1} = -i\pi/2$ valgono

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^5\cosh(z)}, \pm\frac{i\pi}{2}\right] = \lim_{z\to\pm i\pi/2} \frac{z \mp i\pi/2}{z^5\cosh(z)} = \frac{1}{(\pm i\pi/2)^5\,\mathrm{senh}(\pm i\pi/2)} = -\frac{2^5}{\pi^5}\,.$$

In definitiva

$$= 2i\pi\left(\frac{5}{24} - \frac{2^6}{\pi^5}\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\triangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{\cosh(x)} dx\,.$$

Curiosità. Con il simbolo $\triangle$ diverse tribù di nativi americani indicavano il gusto di godersi la vita.

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa, ha poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Consideriamo il rettangolo

$$\rho_R = [-R,R] \cup \{z : z = R + iy, y \in [0,\pi]\} \cup (-\{z : z = x + i\pi, y \in [-R,R]\}) \cup (-\{z : z = -R + iy, y \in [0,\pi]\})\,,$$

che, $\forall R \in (0,\infty)$, avvolge una volta la sola singolarità $z_0 = i\pi/2$. Ne consegue

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\rho_R} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)} dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = 2i\pi \lim_{z\to i\pi/2} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)(z - i\pi/2)}{\cosh(z)} = -\pi^2 \frac{\mathrm{sen}(i\pi/2)}{\mathrm{senh}(i\pi/2)} = -\pi^2\,\mathrm{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

L'integrale può essere scritto come somma dei contributi relativi ai quattro tratti rettilinei e, considerando l'annullamento degli integrali su intervalli reali simmetrici rispetto all'origine di funzioni integrande dispari, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \oint_{\rho_R} \frac{z\,\mathrm{sen}(z)}{\cosh(z)} dz &= \triangle - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + i\pi)\,\mathrm{sen}(x + i\pi)}{\cosh(x + i\pi)} dx \\
&\quad + i \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^\pi \frac{(R + iy)\,\mathrm{sen}(R + iy)}{\cosh(R + iy)} dy - \int_0^\pi \frac{(-R + iy)\,\mathrm{sen}(-R + iy)}{\cosh(-R + iy)} dy\right) \\
&= \triangle + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + i\pi)(\,\mathrm{sen}(x)\cosh(\pi) + i\cos(x)\,\mathrm{senh}(\pi))}{\cosh(x)} dx \\
&\quad + i \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^\pi \frac{(R + iy)\,\mathrm{sen}(R + iy)}{\cosh(R + iy)} dy - \int_0^\pi \frac{(-R + iy)\,\mathrm{sen}(-R + iy)}{\cosh(-R + iy)} dy\right) \\
&= \triangle + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x\,\mathrm{sen}(x)\cosh(\pi) - \pi\cos(x)\,\mathrm{senh}(\pi))}{\cosh(x)} dx \\
&\quad + i \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^\pi \frac{(R + iy)\,\mathrm{sen}(R + iy)}{\cosh(R + iy)} dy - \int_0^\pi \frac{(-R + iy)\,\mathrm{sen}(-R + iy)}{\cosh(-R + iy)} dy\right) \\
&= \triangle(1 + \cosh(\pi)) - \pi\,\mathrm{senh}(\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \\
&\quad + i \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^\pi \frac{(R + iy)\,\mathrm{sen}(R + iy)}{\cosh(R + iy)} dy - \int_0^\pi \frac{(-R + iy)\,\mathrm{sen}(-R + iy)}{\cosh(-R + iy)} dy\right).
\end{aligned}$$

Dimostriamo che gli ultimi due integrali sono infinitesimi nel limite $R \to \infty$. Consideriamo i moduli e usiamo la disuguaglianza di Darboux e quella triangolare

$$\begin{aligned}
0 \le \left|\int_0^\pi \frac{(\pm R + iy)\,\mathrm{sen}(\pm R + iy)}{\cosh(\pm R + iy)} dy\right| &\le \int_0^\pi \frac{(R + y)\left(e^{-y} + e^{y}\right)}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} dy \\
&\le \int_0^\pi \frac{(R + \pi)(1 + e^\pi)}{|e^{\pm R} + e^{\mp R}|} dy = \pi \frac{(R + \pi)(1 + e^\pi)}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che l'integrale richiesto può essere ottenuto dall'equazione

$$
\begin{aligned}
-\pi^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \triangle\,(1+\cosh(\pi)) - \pi \operatorname{senh}(\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \\
-\pi^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2\triangle \cosh^2(\pi/2) - 2\pi \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx \\
\triangle &= \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{senh}(\pi/2)}{\cosh^2(\pi/2)} \left(-\pi + 2\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx\,.\right)
\end{aligned}
$$

Calcoliamo l'integrale

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx\,,
$$

usando lo stesso metodo del percorso rettangolare ρ_R nel limite $R \to \infty$, si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \oint_{\rho_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z)} dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+i\pi)}{\cosh(x+i\pi)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)\cosh(\pi) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(\pi)}{\cosh(x)} dx \\
&= (1+\cosh(\pi)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx\,.
\end{aligned}
$$

Dove, l'annullamento dei contributi sui tratti verticali, paralleli all'asse delle parti immaginarie, segue, a fortiori, dalle stesse considerazioni del caso precedente. Infatti, considerando che la funzione integranda non ha il fattore z a numeratore e la funzione coseno anziché seno, si ha

$$
0 \le \left| \int_0^{\pi} \frac{\cos(\pm R + iy)}{\cosh(\pm R + iy)} dy \right| \;\le\; \int_0^{\pi} \frac{e^{-y}+e^{y}}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} dy \le \int_0^{\pi} \frac{1+e^{\pi}}{|e^{\pm R} + e^{\mp R}|} dy = \pi \frac{1+e^{\pi}}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,.
$$

Lo stesso limite dell'espressione precedente può essere ottenuto con il teorema dei residui, cioè

$$
\lim_{R\to\infty} \oint_{\rho_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\cos(z)}{\cosh(z)}, \frac{i\pi}{2}\right] = 2\pi \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right),
$$

quindi l'integrale cercato vale

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx = 2\pi \frac{\cosh(\pi/2)}{1+\cosh(\pi)} = \frac{\pi}{\cosh(\pi/2)}\,.
$$

Dalla relazione

$$
\triangle = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{senh}(\pi/2)}{\cosh^2(\pi/2)} \left(-\pi + 2\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx\right),
$$

segue

$$
\triangle = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{senh}(\pi/2)}{\cosh^2(\pi/2)} \left(-\pi + 2\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\pi}{\cosh(\pi/2)}\right) = \frac{\pi^2}{2} \frac{\operatorname{senh}(\pi/2)}{\cosh^2(\pi/2)}
$$

e, usando la funzione tangente iperbolica, l'integrale richiesto dal problema è

$$
\triangle = \frac{\pi^2}{2} \frac{\tanh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2)}\,.
$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Sapendo che la funzione

$$v(x,y) = \cosh\big(\operatorname{sen}(x)\cosh(y)\big)\operatorname{sen}\big(\cos(x)\operatorname{senh}(y)\big)$$

è armonica in $\mathbb{R}^2$ si ottenga la funzione analitica $\text{☼}(z)$ nella forma la cui scrittura contenga il minor numero di simboli, che verifica le condizioni

$$\operatorname{Im}\big(\text{☼}(z)\big) = v(x,y)\,, \qquad \operatorname{Re}\big(\text{☼}(0)\big) = 0\,,$$

con $z = x + iy$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Curiosità. Il simbolo ☼ rappresenta il sole per la popolazione di nativi americani denominata *Tsiya*.

Soluzione del terzo problema

In generale sappiamo che nota la parte reale $s(x,y)$ di una funzione analitica $f(z)$, cioè $\operatorname{Re}(f(z)) = s(x,y)$, è possibile risalire alla stessa funzione usando la relazione

$$f(z) = 2s\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - \tilde{f}(0) = 2s\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - f^*(0)\,,$$

dove $\tilde{f}(z) = f^*(z^*) = s(x,-y) - it(x,-y))$, con $t(x,y) = \operatorname{Im}(f(z))$, per cui: $\tilde{f}(0) = -f^*(0)$. Poiché in questo caso è nota la parte immaginaria della funzione, posto $\text{☼}(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, definiamo la funzione analitica

$$f(z) = -i\text{☼}(z) = -i\,(u(x,y) + iv(x,y)) = v(x,y) - iu(x,y)\,,$$

che ha come parte reale la parte immaginaria di $\text{☼}(z)$ e come parte immaginaria l'opposto di quella reale. Dalla relazione precedente si ha quindi

$$f(z) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - f^*(0) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + i\text{☼}^*(0) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + \operatorname{Im}\big(\text{☼}(0)\big) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) + v(0,0) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right),$$

dove si è usato il dato per cui nell'origine la funzione è nulla, avendo la parte reale e la parte immaginaria nulle. Calcoliamo la funzione usando le formula di passaggio dalle funzioni iperboliche a quelle trigonometriche e le formule di duplicazione della funzione seno,

$$\begin{aligned}
f(z) = 2v\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) &= 2\cosh\big(\operatorname{sen}(z/2)\cosh(-iz/2)\big)\operatorname{sen}\big(\cos(z/2)\operatorname{senh}(-iz/2)\big)\\
&= 2\cosh\big(\operatorname{sen}(z/2)\cos(z/2)\big)\operatorname{sen}\big(-i\cos(z/2)\operatorname{sen}(z/2)\big)\\
&= 2\cosh\big(\operatorname{sen}(z)/2\big)\operatorname{sen}\big(-i\operatorname{sen}(z)/2\big)\\
&= -2i\cosh\big(\operatorname{sen}(z)/2\big)\operatorname{senh}\big(\operatorname{sen}(z)/2\big)\\
&= -2i\cosh\big(\operatorname{sen}(z)/2\big)\operatorname{senh}\big(\operatorname{sen}(z)/2\big),
\end{aligned}$$

Infine, usando ancora la formula di duplicazione, si ha

$$f(z) = -i\operatorname{senh}\big(\operatorname{sen}(z)\big)\,.$$

Poiché la relazione che lega la funzione appena ottenuta a quella cercata è $f(z) = -i\text{☼}(z)$, da cui $\text{☼}(z) = if(z)$, si ha

$$\text{☼}(z) = \operatorname{senh}\big(\operatorname{sen}(z)\big)\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottengano i valori minimo e massimo, rispettivamente indicati con R_- e R_+, della funzione razionale

$$R(x,y,z) = \frac{-x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 2xy - 2xz + 4yz}{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

definita in $\mathbb{R}^3 \backslash (0,0,0)$ e i vettori $\vec{v}_- = (x_-, y_-, z_-)$ e $\vec{v}_+ = (x_+, y_+, z_+)$ in corrispondenza dei quali tali valori sono assunti, ovvero tali che,

$$\min_{\mathbb{R}^3\backslash(0,0,0)} \{R(x,y,z)\} = R_- = R(x_-, y_-, z_-)\,, \qquad \max_{\mathbb{R}^3\backslash(0,0,0)} \{R(x,y,z)\} = R_+ = R(x_+, y_+, z_+)\,.$$

Suggerimento. Il numeratore della funzione razionale può essere scritto come il valore di aspettazione $\langle v|\hat{A}|v\rangle = v^T A v$ di un opportuno operatore hermitiano $\hat{A}$ definito in uno spazio vettoriale reale e rappresentato dalla matrice simmetrica e reale A.

Soluzione del quarto problema

Seguendo il suggerimento, definiamo la matrice 3×3 A simmetrica e reale che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ come

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix}$$

e tale che

$$\langle v|\hat{A}|v\rangle = v^T A v = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 2xy - 2xz + 4yz\,.$$

Il valore di aspettazione in termini degli elementi della matrice A è

$$\langle v|\hat{A}|v\rangle = A^1_1 x^2 + A^2_2 y^2 + A^3_3 z^2 + 2A^1_2 xy + 2A^1_3 xz + 2A^2_3 yz\,,$$

dell'identità segue

$$A^1_1 = -1\,, \quad A^2_2 = -3\,, \quad A^3_3 = -3\,, \quad A^1_2 = 1\,, \quad A^1_3 = -1\,, \quad A^2_3 = 2\,,$$

quindi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

La funzione razionale può essere scritta nella forma di un valore di aspettazione normalizzato

$$R(x,y,z) = \frac{\langle v|\hat{A}|v\rangle}{\langle v|v\rangle}\,,$$

infatti, con

$$|v\rangle \hookleftarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

si ha

$$\langle v|v\rangle = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

Indichiamo rispettivamente con $\{\alpha_k\}_{k=1}^3$ e $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^3$ gli insiemi degli autovalori e degli autovettori dell'operatore hermitiano $\hat{A}$, questi ultimi sono ortonormali in quanto l'operatore è normale. Si hanno quindi le tre equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k |a_k\rangle\,, \qquad k = 1,2,3\,.$$

L'insieme degli autovettori rappresenta una base ortonormale dello spazio vettoriale reale, rispetto ad essa il generico vettore $|v\rangle$ può essere scritto come

$$|v\rangle = v^k |a_k\rangle\,,$$

dove $v^k = \langle a_k|v\rangle$ è la k-esimo componente contro-variante, con $k = 1,2,3$. Usando le rappresentazioni rispetto a questa base, la funzione razionale, assume la forma

$$R = \frac{\langle a_j|v^{j*}\hat{A}v^k|a_k\rangle}{\sum_{k=1}^{2}\left|v^k\right|^2} = \frac{v^j v^k \alpha_k \langle a_j|a_k\rangle}{\sum_{k=1}^{2}\left(v^k\right)^2} = \frac{v^j v^k \alpha_k \delta^j_k}{\sum_{k=1}^{2}\left(v^k\right)^2} = \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(v^j\right)^2\alpha_j}{\sum_{k=1}^{2}\left(v^k\right)^2}\,,$$

dove si è sfruttata la realtà dello spazio vettoriale per porre $v^{j*} = v^j$ a numeratore e $\left|v^k\right|^2 = \left(v^k\right)^2$ a denominatore. Gli autovalori sono reali poiché l'operatore è hermitiano, son quindi ordinati, vale la limitazione

$$\min_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\alpha_j\right\} \le \alpha_k \le \max_{l\in\{1,2,3\}}\{\alpha_l\}\,, \qquad \forall k \in \{1,2,3\}\,.$$

Usando questa duplice disuguaglianza nella definizione della funzione razionale R, ovvero le limitazioni per il numeratore

$$\sum_{j=1}^{3}\left(v^j\right)^2\alpha_j \ge \min_{l\in\{1,2,3\}}\{\alpha_l\}\sum_{j=1}^{3}\left(v^j\right)^2\,, \qquad \sum_{j=1}^{3}\left(v^j\right)^2\alpha_j \le \max_{l\in\{1,2,3\}}\{\alpha_l\}\sum_{j=1}^{3}\left(v^j\right)^2\,,$$

si ha

$$\min_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\alpha_j\right\} \le R \le \max_{l\in\{1,2,3\}}\{\alpha_l\}\,.$$

Ne consegue che i valori minimo e massimo della funzione R coincidono rispettivamente con il minimo e massimo autovalore dell'operatore $\hat{A}$, cioè

$$R_- = \min_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\alpha_j\right\}\,, \qquad R_+ = \max_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\alpha_j\right\}\,.$$

Si ottengono quando il vettore $|v\rangle$ è l'autovettore corrispondente all'autovalore minimo e massimo.
Calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det(A - I\alpha) &= 0\\
\det\begin{pmatrix} -1-\alpha & 1 & -1\\ 1 & -3-\alpha & 2\\ -1 & 2 & -3-\alpha\end{pmatrix} &= 0\\
(-1-\alpha)\left[(-3-\alpha)^2 - 4\right] + 3 + \alpha - 2 - 2 + 3 + \alpha &= 0\\
(-1-\alpha)\left[(-3-\alpha)^2 - 6\right] &= 0\,,
\end{aligned}$$

da cui i tre autovalori ordinati dal minore al maggiore,

$$\alpha_1 = -3 - \sqrt{6}\,, \quad \alpha_2 = -1\,, \quad \alpha_3 = -3 + \sqrt{6}\,.$$

I valori minimo e massimo della funzione razionale sono

$$R_- = \alpha_1 = -3 - \sqrt{6}\,, \qquad R_+ = \alpha_3 = -3 + \sqrt{6}\,.$$

Le componenti contro-varianti degli autovettori sono le soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -1-\alpha_k & 1 & -1\\ 1 & -3-\alpha_k & 2\\ -1 & 2 & -3-\alpha_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(k)}\\ a^2_{(k)}\\ a^3_{(k)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\,, \qquad k \in \{1,2,3\}\,,$$

dove $a^j_{(k)}$ è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, con: $k, j \in \{1,2,3\}$. Consideriamo solo il primo e il terzo autovettore, poniamo $a^1_{(1,3)} = n_{1,3}$ dalla prima e seconda equazione si hanno

$$n_{1,3}\left(2 \pm \sqrt{6}\right) + a^2_{(1,3)} - a^3_{(1,3)} = 0\,, \quad n_{1,3} \pm \sqrt{6}a^2_{(1,3)} + 2a^3_{(1,3)} = 0\,,$$

dalla prima si ottengono le terze componenti come: $a^3_{(1,3)} = n_{1,3}\left(2 \pm \sqrt{6}\right) + a^2_{(1,3)}$ che, sostituite nella seconda

$$n_{1,3} \pm \sqrt{6}a^2_{(1,3)} + 2n_{1,3}\left(2 \pm 2\sqrt{6}\right) + 2a^2_{(1,3)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a^2_{(1,3)} = n_{1,3}\frac{-5 \mp 2\sqrt{6}}{2 \pm \sqrt{6}} = n_{1,3}\frac{-2 \mp \sqrt{6}}{2} = -n_{1,3}\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$

le terze componenti sono

$$a^3_{(1,3)} = n_{1,3}\left(2 \pm \sqrt{6}\right) + a^2_{(1,3)} = n_{1,3}\frac{4 \pm 2\sqrt{6} - 2 \mp \sqrt{6}}{2} = n_{1,3}\frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} = a\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

In definitiva, scegliendo i valore di $n_{1,3}$ in modo da normalizzare si hanno

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{3/2} \\ 1 + \sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \frac{1}{\sqrt{6 - 2\sqrt{6}}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{3/2} \\ 1 - \sqrt{3/2} \end{pmatrix},$$

dove si sono usati i valori

$$n_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{6 \pm 4\sqrt{3/2}}}.$$

Alla luce dell'omogeneità della funzione razionale $R(x, y, z)$, ovvero del fatto che tutti i termini a numeratore e a denominatore sono quadratici nelle variabili, si ha che, $\forall\, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $R(x, y, z) = R(wx, wy, wz)$, quindi i vettori $\vec{v}_-$ e $\vec{v}_+$ nei quali assume rispettivamente i valori minimo e massimo sono definiti a meno di una costante moltiplicativa. Trascuriamo la normalizzazione e scegliamo

$$\vec{v}_- = \left(1, -1 - \sqrt{3/2}, 1 + \sqrt{3/2}\right), \qquad \vec{v}_+ = \left(1, -1 + \sqrt{3/2}, 1 - \sqrt{3/2}\right).$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$c(x) = \int_{x-a}^{x} e^{-y^2}\,\mathrm{sen}(x - y)dy,$$

con $a \in (0, \infty)$.

Soluzione del quinto problema

La funzione $c(x)$ può essere scritta come la convoluzione della funzione gaussiana $g(x) = e^{-x^2}$ e della funzione

$$h(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}(x) & x \in [0, a] \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R} \end{cases}.$$

Infatti, usando la funzione gradino θ di Heaviside,

$$\begin{aligned}(g * h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x - y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{sen}(x - y)\theta(x - y)\theta(a - x + y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2}\,\mathrm{sen}(x - y)\theta(a - x + y)dy \\ &= \int_{x-a}^{x} e^{-y^2}\,\mathrm{sen}(x - y)dy.\end{aligned}$$

Usiamo, quindi, il teorema della convoluzione

$$\tilde{c}(k) \equiv \mathscr{F}_k[c] = \mathscr{F}_k[g * h] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[g]\,\mathscr{F}_k[h],$$

La trasformata di Fourier della funzione gaussiana è nota e vale

$$\mathscr{F}_k[g] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $h(x)$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[h] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a \operatorname{sen}(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_0^a \left(e^{-ix(k-1)} - e^{-ix(k+1)}\right)dx \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-ia(k-1)}-1}{1-k} + \frac{e^{-ia(k+1)}-1}{1+k}\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-iak}\left[e^{ia}+e^{-ia}+k\left(e^{ia}-e^{-ia}\right)\right]-2}{1-k^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-iak}\left(\cos(a)+ik\operatorname{sen}(a)\right)-1}{k^2-1}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\tilde{c}(k) = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[g]\,\mathscr{F}_k[h] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}\,\frac{e^{-iak}\left(\cos(a)+ik\operatorname{sen}(a)\right)-1}{k^2-1}\,.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore $\hat{G}$ è definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 dalle azioni sulla terna di vettori ortonormali $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$

$$\hat{G}|t_1\rangle = |t_2\rangle\,, \qquad \hat{G}|t_2\rangle = |t_3\rangle\,, \qquad \hat{G}|t_3\rangle = |t_1\rangle\,.$$

Si determini lo spettro discreto dell'operatore $\hat{G}$.
Infine, si ottenga la matrice $G_e \overset{e}{\hookleftarrow} \hat{G}$, cioè la matrice 3×3 che rappresenta l'operatore $\hat{G}$ rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$, sapendo che, rispetto alla stessa base, si hanno le rappresentazioni

$$|t_1\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} t_{e1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad |t_2\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} t_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad |t_3\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} t_{e3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

La terna di vettori ortonormali $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ è una base dello spazio di Hilbert E_3. Detta G la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{G}$ rispetto a questa base si hanno per le tre colonne gli elementi

$$G_1^j = \langle t_j|\hat{G}|t_1\rangle = \langle t_j|t_2\rangle = \delta_2^j\,, \qquad G_2^j = \langle t_j|\hat{G}|t_2\rangle = \langle t_j|t_3\rangle = \delta_3^j\,, \qquad G_3^j = \langle t_j|\hat{G}|t_3\rangle = \langle t_j|t_1\rangle = \delta_1^j\,,$$

ovvero

$$\hat{G} \overset{t}{\hookleftarrow} G = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det(G - I\gamma) &= 0 \\
\det\begin{pmatrix}-\gamma&0&1\\1&-\gamma&0\\0&1&-\gamma\end{pmatrix} &= 0 \\
-\gamma^3 + 1 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Gli autovalori dell'operatore $\hat{G}$ sono le tre radici terze dell'unità, l'insieme $\{\gamma_k\}_{k=1}^3$ è quindi lo spettro discreto. In dettaglio i tre autovalori sono

$$\gamma_k = e^{2i(k-1)\pi/3}\,, \qquad k = 1,2,3\,,$$

in dettaglio

$$\gamma_1 = 1\,, \qquad \gamma_2 = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \gamma_3 = e^{4i\pi/3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Le matrici 3×1 che rappresentano i vettori della base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ rispetto alla stessa base sono naturalmente

$$|t_1\rangle \overset{t}{\longleftrightarrow} t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |t_2\rangle \overset{t}{\longleftrightarrow} t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |t_3\rangle \overset{t}{\longleftrightarrow} t_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Indichiamo con V la matrice unitaria che trasforma la rappresentazione rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$ in quella rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$, si ha

$$t_{ek} = V t_k\,, \qquad k = 1,2,3\,.$$

Consideriamo il j-esimo elemento, con $j = 1,2,3$,

$$t^j_{e(k)} = V^j_l\, t^l_{(k)} = V^j_l\, \delta^l_k = V^j_k\,,$$

dove $t^j_{e(k)}$ è la j-esima componente contro-variante della rappresentazione del k-esimo vettore $|t_k\rangle$ rispetto alla base canonica e $t^l_{(k)}$ è la l-esima componente contro-variante della rappresentazione sempre del k-esimo vettore $|t_k\rangle$ ma rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$. Si ottiene che l'elemento della j-esima riga e k-esima colonna della matrice V, con $j,k = 1,2,3$, coincide con la j-esima componente contro-variante della rappresentazione del k-esimo vettore $|t_k\rangle$ rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$, ovvero

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

La due rappresentazioni delle tre equazioni che definiscono l'operatore $\hat{G}$ sono

$$\begin{aligned} \hat{G}|t_1\rangle = |t_2\rangle &\overset{e,t}{\longleftrightarrow} G_e t_{e1} = t_{e2}\,, \qquad G t_1 = t_2\,, \\ \hat{G}|t_2\rangle = |t_3\rangle &\overset{e,t}{\longleftrightarrow} G_e t_{e3} = t_{e3}\,, \qquad G t_2 = t_3\,, \\ \hat{G}|t_2\rangle = |t_3\rangle &\overset{e,t}{\longleftrightarrow} G_e t_{e3} = t_{e3}\,, \qquad G t_2 = t_3\,. \end{aligned}$$

Consideriamo la rappresentazione della prima equazione rispetto alla base $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^3$, moltiplichiamo a sinistra per la matrice unitaria V e sfruttiamo la relazione tra le rappresentazioni,

$$V G t_1 = V t_2 = t_{e2}\,,$$

inseriamo la matrice identità nella forma $I = V^\dagger V$ tra la matrice G e il vettore t_1 a primo membro

$$V G_e V^\dagger \underbrace{V t_1}_{=t_{e1}} = V G V^\dagger t_{e1} = t_{e2}\,,$$

confrontiamo con la rappresentazione rispetto alla base canonica della stessa equazione, cioè $G_e t_{e1} = t_{e2}$, si ottiene la relazione che lega le rappresentazioni G_e e G dell'operatore $\hat{G}$,

$$G_e = V G V^\dagger\,.$$

Calcoliamo la matrice G_e

$$\begin{aligned} G_e &= V G V^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{18}+1/\sqrt{6}+1/\sqrt{12} & 2/\sqrt{18}-1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{18}+1/\sqrt{6}-1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{18}+2/\sqrt{12} & -2/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18}-2/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{18}-1/\sqrt{6}+1/\sqrt{12} & 2/\sqrt{18}+1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{18}-1/\sqrt{6}-1/\sqrt{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$G_e = \sqrt{18}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}+\sqrt{3/2} & 2-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}-\sqrt{3/2} \\ -1+2\sqrt{3/2} & -2 & -1-2\sqrt{3/2} \\ 1-\sqrt{3}+\sqrt{3/2} & 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3}-\sqrt{3/2} \end{pmatrix}.$$