Metodi Matematici per la Fisica

Terzo appello estivo - 6 settembre 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$爱 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\theta)}{a+\cos(\theta)} d\theta \,,$$

con $a \in (1, \infty)$.
(Il carattere cinese 爱 si pronuncia *ài* e significa amore.)

Soluzione del primo problema

Con il cambiamento di variabile $z = e^{i\theta}$, si ottiene l'integrale nel piano complesso z,

$$爱 = -i \int_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)^2}{2z^2\left(z^2+2az+1\right)} dz \,.$$

dove il percorso d'integrazione è la circonferenza unitaria orientata in senso anti-orario, ovvero positivo. La funzione integranda è meromorfa, ha polinomi di quarto grado a numeratore e a denominatore. Gli zeri del polinomio a numeratore sono le radici l'unità immaginaria e il suo opposto, entrambe con molteplicità due, ovvero sono zeri doppi. Gli zeri del polinomio a denominatore sono: $z_0 = 0$, che ha molteplicità due, e $z_{1,2} = -a \mp \sqrt{a^2-1}$, che sono invece semplici, hanno molteplicità uno. Dalla condizione $a \in (1, \infty)$, segue che gli zeri z_1 e z_2 sono reali e verificano le condizioni:

$$z_1 = -a - \sqrt{a^2-1} < -1 \,, \qquad z_2 = -a + \sqrt{a^2-1} > -1 \,.$$

Dalla condizione $z_1 z_2 = -1$, essendo il prodotto $z_1 z_2$ il termine noto del polinomio, si ha

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1 \quad \Rightarrow \quad |z_2| = \frac{1}{|z_1|} \,,$$

ma, avendo $z_1 < -1$ e quindi $|z_1| > 1$, si ha: $|z_2| < 1$. Il polo semplice $z_2 = -a + \sqrt{a^2-1}$ è avvolto dalla circonferenza unitaria, che avvolge anche il polo doppio nell'origine z_0. L'integrale può essere calcolato con il teorema dei residui, si ha

$$\begin{aligned} 爱 = -i \int_{|z|=1} \frac{\left(z^2+1\right)^2}{2z^2\left(z^2+2az+1\right)} dz &= 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{-i\left(z^2+1\right)^2}{2z^2\left(z^2+2az+1\right)}, z_0 \right] + \operatorname{Res}\left[\frac{-i\left(z^2+1\right)^2}{2z^2\left(z^2+2az+1\right)}, z_2 \right] \right) \\ &= \pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}, z_0 \right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}, z_2 \right] \right) . \end{aligned}$$

Il residuo nell'origine, il polo doppio z_0, vale

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}, z_0\right] = \frac{d}{dz}\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z^2+2az+1}\bigg|_{z=0} = \left(\frac{4z\left(z^2+1\right)}{z^2+2az+1} - \frac{\left(z^2+1\right)^2(2z+2a)}{\left(z^2+2az+1\right)^2}\right)\bigg|_{z=0} = -2a\,.$$

Il residuo nel polo semplice z_2 vale

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\left(z^2+1\right)^2}{z^2\left(z^2+2az+1\right)}, z_2\right] = \frac{\left(z_2^2+1\right)^2}{z_2^2\left(z_2-z_1\right)} = \frac{\left(-2az_2\right)^2}{z_2^2\left[-a+\sqrt{a^2-1}-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)\right]} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

Il risultato finale è

$$爱 = 2a\pi\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}-1\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$肉 = \int_{B_+}\frac{z^2}{z^6+b}dz\,,$$

con $b \in (0,\infty)$ e il percorso d'integrazione, nella determinazione principale: $\arg(z) \in [0,2\pi]$, è la semiretta

$$B_+ = \{z : \arg(z) = \pi/4\}\,,$$

orientata nel verso che va dall'origine all'infinito.
(Il carattere cinese 肉 si pronuncia *ròu* e significa carne.)

Soluzione del secondo problema

Consideriamo il percorso d'integrazione rappresentato dalla prima bisettrice del piano complesso, che indichiamo con B, ovvero dalla retta data dall'unione

$$B = B_- \cup B_+\,,$$

dove $B_- = \{z : \arg(z) = 5\pi/4\}$. Usando le parametrizzazioni delle due semirette

$$B_+ = \left\{z = e^{i\pi 4}t\,, t \in [0,\infty)\right\}\,, \qquad B_- = -\left\{z = e^{5i\pi/4}t\,, t \in [0,\infty)\right\}\,,$$

si ha che l'integrale lungo B_- coincide con 肉, ovvero quello lungo B_+, infatti

$$\begin{aligned}\int_{B_-}\frac{z^2}{z^6+b}dz &= -\int_0^\infty \frac{e^{10i\pi/4}t^2}{e^{30i\pi/4}t^6+b}e^{5i\pi/4}dt = -\int_0^\infty \frac{e^{2i\pi/4}t^2}{e^{6i\pi/4}t^6+b}e^{5i\pi/4}dt \\ &= -e^{4i\pi/4}\int_0^\infty \frac{\left(e^{i\pi/4}t\right)^2}{\left(e^{i\pi/4}t\right)^6+b}e^{i\pi/4}dt = \{z = e^{i\pi/4}t\} = -e^{4i\pi/4}\int_{B_+}\frac{z^2}{z^6+b}dz \\ &= \int_{B_+}\frac{z^2}{z^6+b}dz = 肉\,.\end{aligned}$$

Ne consegue che

$$肉 = \frac{1}{2}\int_B \frac{z^2}{z^6+b}dz\,,$$

è quindi possibile usare il lemma di Jordan, a tal fine consideriamo il percorso chiuso

$$\Gamma_R = \left\{z : z = Re^{i\theta}\,, \theta \in [\pi/4, 5\pi/4]\right\} \cup \left\{z : z = re^{i\pi/4}\,, r \in [-R,R]\right\} = \gamma_R \cup \rho_R\,,$$

coincidente con la frontiera del semicerchio di raggio R, centrato nell'origine e avente al centro l'angolo piatto che, nella determinazione principale data, va da $\pi/4$ a $5\pi/4$. I due elementi che costituiscono questa frontiera sono la semicirconferenza γ_R e il suo diametro ρ_R, definiti nell'espressione precedente.
L'integrale sul percorso chiuso Γ_R, anche nel limite $R \to \infty$, può essere calcolato con il teorema dei residui e vale

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^6+b} dz = 2i\pi \sum_{\arg(z_k)\in(\pi/4,5\pi/4)} \text{Res}\left[\frac{z^2}{z^6+b}, z_k\right],$$

la somma si estende sui poli dell'integranda aventi argomenti compresi nell'intervallo $(\pi/4, 5\pi/4)$, indipendentemente dal modulo, avendo il limite di raggio divergente. I poli dell'integranda sono i sei zeri del polinomio di sesto grado che ne rappresenta il denominatore, ovvero

$$z_k = b^{1/6} e^{(2k+1)i\pi/6}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5,$$

sono sei poli semplici allineati uniformemente lungo la circonferenza centrata nell'origine, di raggio $b^{1/6}$, sono i vertici dell'esagono regolare in essa inscritto. I poli che appartengono al semipiano che si origina dalla prima bisettrice e contiene il semiasse delle parti immaginarie positive, cioè quelli che devono essere inclusi nella somma che dà il valore dell'integrale su Γ_R, sono i tre con indici $k = 1, 2, 3$, quindi

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^6+b} dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{3} \text{Res}\left[\frac{z^2}{z^6+b}, z_k\right].$$

Il residuo del k-esimo polo è

$$\text{Res}\left[\frac{z^2}{z^6+b}, z_k\right] = \frac{z_k^2}{6z_k^5} = \frac{z_k^{-3}}{6} = b^{-1/2}\frac{e^{-(2k+1)i\pi/2}}{6}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 5,$$

da cui

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^6+b} dz = 2i\pi \frac{b^{-1/2}}{6}\left(\underbrace{e^{-3i\pi/2}}_{i} + \underbrace{e^{-5i\pi/2}}_{-i} + \underbrace{e^{-7i\pi/2}}_{i}\right) = -\frac{\pi b^{-1/2}}{3}.$$

Scrivendo l'integrale sul percorso chiusa Γ_R come somma dei contributi sulla semicirconferenza γ_R e sul diametro ρ_R si ha

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^6+b} dz = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^6+b} dz + \int_{\rho_R} \frac{z^2}{z^6+b} dz\right) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^6+b} dz + \int_B \frac{z^2}{z^6+b} dz,$$

l'ultima identità segue dal limite

$$\lim_{R\to\infty} \rho_R = B,$$

al divergere del raggio R il diametro ρ_R tende alla prima bisettrice B. Dimostriamo che il limite del primo integrale è uguale a zero come conseguenza dell'annullamento uniforme, nello stesso limite di raggio divergente, del valore della funzione integranda moltiplicata per la stessa variabile z, cioè

$$\lim_{R\to\infty} z\frac{z^2}{z^6+b} \overset{\text{U.}}{=} 0.$$

Per valori di z appartenenti alla semicirconferenza γ_R, tali che $z = Re^{i\theta}$, con $\theta \in [\pi/4, 5\pi/4]$ e, alla luce del limite, assumendo senza perdita di generalità $R^6 > b$, consideriamo la maggiorazione e il limite seguenti

$$0 \le \left|\frac{z^3}{z^6+b}\right| = \frac{R^3}{|R^6 e^{6i\theta} + b|} \le \frac{R^3}{|R^6 - b|} = \frac{R^3}{R^6 - b} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

che verifica il precedente limite uniforme e quindi si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^6+b} dz = 0.$$

Consideriamo le due espressioni per il limite dell'integrale sul percorso chiuso Γ_R, ottenute usando il teorema dei residui e la scomposizione del percorso d'integrazione, unitamente all'espressione dello stesso integrale in termini di quello cercato 肉, si ha

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{z^2}{z^6+b}dz=-\frac{\pi b^{-1/2}}{3}=\int_B\frac{z^2}{z^6+b}dz=2\text{肉}\,,$$

quindi il valore richiesto è

$$\text{肉}=-\frac{\pi b^{-1/2}}{6}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottengano tutte le serie di Laurent della funzione

$$\text{鱼}(z)=\frac{e^z-1}{z+1}\,.$$

con centro nell'origine.
(Il carattere cinese 鱼 si pronuncia *yú* e significa "pesce".)

Soluzione del terzo problema

La funzione 鱼(z) è meromorfa essendo il rapporto di due funzioni intere. La funzione a numeratore non ha zeri quindi la funzione completa ha una sola singolarità al finito, un polo semplice in corrispondenza dello zero semplice in $z=-1$ dell polinomio di primo grado a denominatore. Ne consegue con si hanno due serie di Laurent centrate nell'origine, che convergono nel disco, infatti l'origine non è una singolarità e nella corona circolare

$$C_1=\{z:|z|<1\}\,,\qquad C_{1,\infty}=\{z:|z|>1\}\,.$$

Al fine di calcolare gli insiemi dei coefficienti di Laurent delle serie, sfruttiamo la serie di Taylor della funzione esponenziale per il numeratore e la serie geometrica per il denominatore. In particolare, per il numeratore si ha

$$e^z-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\,,$$

che converge $\forall\, z\in\mathbb{C}$ e quindi in entrambi i domini C_1 e $C_{1,\infty}$. Il fattore $1/(z+1)$, invece, può essere scritto come la somma di due serie geometriche, convergenti l'una nel disco C_1 e l'altra nella corona circolare $C_{1,\infty}$. Nel disco, ovvero $\forall\, z$ tale che $|z|<1$, si ha

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{j=0}^{\infty}(-z)^j\,,$$

la ragione della serie geometrica è $-z$ il cui modulo verifica la condizione di convergenza $|-z|=|z|<1$. Nella corona circolare, cioè $\forall\, z$ tale che $|z|>1$ avremo

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1/z}{1+1/z}=\frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}(-z)^{-j}=\sum_{j=0}^{\infty}(-z)^{-j-1}\,,$$

in questo caso la serie geometrica ha ragione $-1/z$ e il modulo $|-1/z|=1/|z|$ verifica la condizione $1/|z|<1$, che implica la convergenza della serie. Ne consegue che, $\forall\in C_1$ si ha

$$\text{鱼}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j z^{k+j}}{k!}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n z^n\,,$$

l'ultima identità è formale, l'insieme $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dei coefficienti di Laurent deve essere determinato sfruttando la stessa identità. Osserviamo immediatamente come la potenza minima sia quella con i valori minimi degli indici k e j, cioè $n=j+k=1$, che implica $A_n=0$, $\forall\, n<1$, quindi, la serie di Laurent ha solo la parte regolare, è una serie di Taylor.

Ciò equivale ad asserire, come già evidenziato, che l'origine non è una singolarità per la funzione $\text{鱼}(z)$. Possiamo scrivere

$$\text{鱼}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{k+j}}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n = \{n = k+j\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j z^n}{(n-j)!}\,,$$

dove l'estremo superiore della somma in j è dato dalla condizione:$k = n - j \geq 1$ da cui segue $j \leq n-1$. Si ha quindi che l'n-esimo coefficiente A_n, con $n \in \mathbb{N}$, è

$$A_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(n-j)!} = (-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}\frac{1}{2!} + \cdots - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\,.$$

La prima serie di Laurent, convergente nel disco unitari $C_1 = \{z : |z| < 1\}$, ha l'insieme dei coefficienti $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, definiti dalla duplice legge

$$A_n = \begin{cases} 0 & n < 1 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(n-j)!} & n > 0 \end{cases}\,.$$

Nella corona circolare $C_{1,\infty}$ la funzione $\text{鱼}(z)$ può essere scritta come

$$\text{鱼}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{k-j-1}}{k!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n\,.$$

In questo caso tutti i coefficienti di Laurent sono non nulli, infatti dall'ultima identità si ha $n = k - j - 1$ che, con $k \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, fa sì che la potenza n possa assumere tutti i valori di $\mathbb{Z}$. Dalla definizione dell'indice si ha: $j = k - n - 1 \geq 0$, da cui $k \geq n + 1$, è necessario distinguere due eventualità: se $n > 0$ la precedente condizione è effettiva e implica una riduzione dell'intervallo di variabilità dell'indice k; se, invece $n \leq 0$, allora la condizione iniziale, vista la positività di k, non implica alcuna limitazione per lo stesso indice k. Se ne deduce che il coefficiente n-esimo può essere definito dalla duplice legge

$$B_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k!} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = (-1)^{n+1}\left(e^{-1} - 1\right) & n \leq 0 \\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n-1}}{k!} = (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} & n > 0 \end{cases}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 7/30)

Si dimostri che tra la norma dell'inverso e l'inverso della norma di un generico operatore regolare e normale $\hat{A}$ vale la relazione

$$\left\|\hat{A}^{-1}\right\| \geq \left\|\hat{A}\right\|^{-1}\,,$$

e che per un operatore unitario si ha l'identità.

Inoltre, si verifichi esplicitamente la disuguaglianza stretta nel caso dell'operatore regolare e normale $\hat{F}$, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 e avente le seguenti proprietà:

- $\exists\,|u\rangle \in E_3$, con $|u\rangle \neq |0\rangle$, tale che: $\hat{F}|u\rangle = |u\rangle$;
- $\det\left(\hat{F}\right) = -6$;
- $\mathrm{Tr}\left(\hat{F}\right) = 1$.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Poiché l'operatore $\hat{A}$ è normale, si ha $\left[\hat{A}, \hat{A}^\dagger\right] = 0$, ovvero $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$, da cui, invertendo ambo i membri, si ottiene che anche l'operatore inverso $\hat{A}^{-1}$ è normale, ovvero commuta con il suo aggiunto, infatti

$$\left(\hat{A}\hat{A}^\dagger\right)^{-1} = \left(\hat{A}^\dagger\hat{A}\right)^{-1} \;\Rightarrow\; \left(\hat{A}^\dagger\right)^{-1}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\left(\hat{A}^\dagger\right)^{-1} \;\Rightarrow\; \left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger \;\Rightarrow\; \left[\hat{A}^{-1}, \left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger\right] = 0\,,$$

dove la penultima implicazione segue dal fatto che l'aggiunto hermitiano dell'inverso coincide con l'inverso dell'aggiunto hermitiano. Ovviamente, i due operatori $\hat{A}$ e $\hat{A}^{-1}$ commutano e quindi sono diagonalizzabili simultaneamente. Ammettono, cioè, lo stesso insieme di autovettori ortonormali $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{3}$, cui corrispondono, rispettivamente, gli spettri discreti $\{\alpha_k\}_{k=1}^{3}$ e $\left\{\alpha_k^{-1}\right\}_{k=1}^{3}$, si hanno, quindi, le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle\,, \qquad \hat{A}^{-1}|a_k\rangle = \alpha_k^{-1}|a_k\rangle\,, \qquad k = 1,2,3\,.$$

La regolarità dell'operatore implica che lo spettro discreto non contenga lo zero, cioè $\alpha_k \neq 0$, $\forall\, k \in \{1,2,3\}$. Inoltre, essendo $\hat{A}$ e $\hat{A}^{-1}$ operatori normali, hanno le norme coincidenti con i maggiori dei moduli degli autovalori, ovvero

$$\left\|\hat{A}\right\| = \max_{k\in\{1,2,3\}}\{|\alpha_k|\}\,, \qquad \left\|\hat{A}^{-1}\right\| = \max_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\left|\alpha_j^{-1}\right|\right\} = \left(\min_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\left|\alpha_j\right|\right\}\right)^{-1}\,,$$

dove la seconda identità della seconda definizione è immediata, essendo, appunto, il massimo di un insieme di inversi di numeri reali positivi uguale all'inverso del minore di essi. Ma, poiché

$$\left\|\hat{A}\right\| \geq |a_k|\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,3\}\,,$$

si ha la relazione cercata

$$\left\|\hat{A}\right\| \geq \min_{j\in\{1,2,3\}}\left\{\left|a_j\right|\right\} = \left\|\hat{A}^{-1}\right\|^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \left\|\hat{A}^{-1}\right\| \geq \left\|\hat{A}\right\|^{-1}\,.$$

Nel caso di un operatore unitario $\hat{U}$, l'isometria dello stesso, per cui, $\forall\,|v\rangle \in E_3$,

$$\left\|\hat{U}|v\rangle\right\| = \|v\|\,,$$

implica che la norma sia uguale ad uno, infatti,

$$\left\|\hat{U}\right\| = \sup_{|v\rangle\neq|0\rangle}\left\{\frac{\left\|\hat{U}|v\rangle\right\|}{\|v\|}\right\} = \sup_{|v\rangle\neq|0\rangle}\{1\} = 1\,.$$

Anche l'inverso di un operatore unitario, che coincide con l'aggiunto, è un operatore unitario e quindi ha norma uguale a uno, cioè $\left\|\hat{U}^{-1}\right\| = 1$, da cui, avendo anche $\left\|\hat{U}\right\| = 1$, si hanno le identità

$$1 = \left\|\hat{U}^{-1}\right\| = \left\|\hat{U}^{-1}\right\|^{-1} = \left\|\hat{U}\right\| = \left\|\hat{U}\right\|^{-1}\,,$$

quella tra il secondo e l'ultimo membro è l'identità cercata $\left\|\hat{U}^{-1}\right\| = \left\|\hat{U}\right\|^{-1}$.
Al fine di dimostrare la disuguaglianza stretta per l'operatore dato $\hat{F}$, ne calcoliamo lo spettro discreto, sfruttando i dati del problema e da questo otteniamo le norme $\left\|\hat{F}\right\|$ e $\left\|\hat{F}^{-1}\right\|$, per le quali verifichiamo la disuguaglianza richiesta.
È immediato osservare che il vettore $|u\rangle \in E_3$, tale che $\hat{F}|u\rangle = |u\rangle$, è l'autovettore relativo all'autovalore unitario. Si ha cioè l'equazione agli autovalori

$$\hat{F}|f_1\rangle = \phi_1|f_1\rangle\,,$$

dove $|f_1\rangle$ è l'autovettore normalizzato $|f_1\rangle = |u\rangle/\,\|u\|$, il cui autovalore è $\phi_1 = 1$. Indicando con $\{|f_k\rangle\}_{k=1}^{3}$ e $\{\phi_k\}_{k=1}^{3}$ l'insieme degli autovettori e quello degli autovalori corrispondenti, cioè lo spettro discreto, il determinante e la traccia dell'operatore $\hat{F}$ possono essere scritti rispettivamente come il prodotto e la somma degli stessi autovalori, ovvero

$$\det\left(\hat{F}\right) = \phi_1\phi_2\phi_3 = \phi_2\phi_3 = -6\,, \qquad \mathrm{Tr}\left(\hat{F}\right) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 1 + \phi_2 + \phi_3 = 1\,.$$

Dall'ultima identità segue che gli autovalori ϕ_2 e ϕ_3 sono opposti e quindi dalla prima identità si ha

$$\phi_2^2 = \phi_3^2 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \phi_2 = -\sqrt{6} \\ \phi_3 = \sqrt{6} \end{cases}\,,$$

abbiamo lo spettro discreto completo $\left\{\phi_1 = 1, \phi_2 = -\sqrt{6}, \phi_3 = \sqrt{6}\right\}$. Usando quanto già ottenuto nella risoluzione della prima parte del problema, calcoliamo le norme dell'operatore $\hat{F}$ e del suo inverso $\hat{F}^{-1}$, che valgono

$$\left\|\hat{F}\right\| = \max_{k\in\{1,2,3\}}\{|\phi_k|\} = \max\left\{1, \sqrt{6}, \sqrt{6}\right\} = \sqrt{6}\,, \qquad \left\|\hat{F}^{-1}\right\| = \max_{k\in\{1,2,3\}}\left\{|\phi_k|^{-1}\right\} = \max\left\{1, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}\right\} = 1\,.$$

La disuguaglianza è verificata in modo stretto, infatti

$$\left\|\hat{F}^{-1}\right\| = 1 > \frac{1}{\sqrt{6}} = \left\|\hat{F}\right\|^{-1} .$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$\text{桥}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{x^3}$$

(Il carattere cinese 桥 si pronuncia *qiáo* e significa "ponte".)

Soluzione del quinto problema

Calcoliamo esplicitamente la trasformata di Fourier usando le espressioni esponenziali delle funzioni trigonometriche, ovvero

$$\mathscr{F}_k\left[\text{桥}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{x^3} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ie^{-ix(k+1)} - ie^{-ix(k-1)} - xe^{-ix(k-1)} - xe^{-ix(k+1)}}{x^3} dx ,$$

dove è sottintesa l'integrazione in valore principale. Definendo la trasformata di Fourier

$$I_n(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\alpha}}{x^n} dx = \frac{1}{2}\mathscr{F}_\alpha\left[\frac{1}{x^n}\right], \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

e sfruttando la linearità della stessa, possiamo scrivere l'integrale precedente come

$$\mathscr{F}_k\left[\text{桥}\right] = iI_3(k+1) - iI_3(k-1) - I_2(k-1) - I_2(k+1) .$$

Calcoliamo esplicitamente la trasformata di Fourier $I_n(\alpha)$, definendo il polo n-esimo in termini della derivata di ordine $(n-1)$ del polo semplice, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{x^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x} ,$$

da cui la trasformata di Fourier

$$\mathscr{F}_\alpha\left[\frac{1}{x^n}\right] = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathscr{F}_\alpha\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x}\right] = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(ik)^{n-1}\mathscr{F}_\alpha\left[\frac{1}{x}\right] .$$

Per la trasformata di Fourier del polo semplice nell'origine, ricordando che l'integrale è in valore principale e usando: la formula di Sokhotski-Plemelj, il lemma di Jordan e il teorema dei residui, si ha

$$\mathscr{F}_\alpha\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{x - i\epsilon} dx + i\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big(2i\pi\theta(-\alpha) + i\pi\big) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \operatorname{Segno}(\alpha) .$$

Dai due precedenti risultati si ottiene

$$I_n(\alpha) = \frac{1}{2}\mathscr{F}_\alpha\left[\frac{1}{x^n}\right] = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(i\alpha)^{n-1}(-i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \operatorname{Segno}(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(-i)^n}{(n-1)!}\alpha^{n-1}\operatorname{Segno}(\alpha) .$$

La trasformata di Fourier richiesta è

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\text{桥}\right] = {} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(i\frac{(-i)^3}{2}(k+1)^2\operatorname{Segno}(k+1) - i\frac{(-i)^3}{2}(k-1)^2\operatorname{Segno}(k-1) \\
& -(-i)^2(k-1)\operatorname{Segno}(k-1) - (-i)^2(k+1)\operatorname{Segno}(k+1)\Big) \\
= {} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(-\big(k^2+2k+1\big)\operatorname{Segno}(k+1) + \big(k^2-2k+1\big)\operatorname{Segno}(k-1) \\
& +2(k-1)\operatorname{Segno}(k-1) + 2(k+1)\operatorname{Segno}(k+1)\Big) \\
= {} & \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big(k^2-1\big)\big(\operatorname{Segno}(k-1) - \operatorname{Segno}(k+1)\big) ,
\end{aligned}$$

che può essere espressa sotto forma della legge duplice

$$\mathscr{F}_k\left[\text{桥}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(k^2-1\right) & |k|<1 \\ 0 & |k|>1 \end{cases} .$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Dati il primo e il secondo operatore di Pauli $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$, aventi rispetto alla base degli autovettori del terzo operatore di Pauli, le rappresentazioni matriciali

$$\hat{\sigma}_1 \hookleftarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_2 \hookleftarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

si dimostri che i due operatori $\hat{P} = e^{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2}$ e $\hat{Q} = e^{\hat{\sigma}_1}e^{\hat{\sigma}_2}$ sono diversi, ovvero che $\hat{P} \neq \hat{Q}$, calcolandone esplicitamente le espressioni lineari in termini dei tre operatori $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$ e $\hat{\sigma}_3$.

Soluzione del sesto Problema

Per calcolare gli operatori $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ usiamo la serie di Taylor della funzione esponenziale. Per il primo si ha

$$\hat{P} = e^{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^k}{k!} .$$

Calcoliamo le potenze dell'operatore somma $\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2$, in cerca di regolarità. Per il quadrato, ricordando che il quadrato di ogni operatore di Pauli è l'identità e che gli stessi operatori anti-commutano, si ha

$$(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^2 = \hat{\sigma}_1^2+\hat{\sigma}_2^2+\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2+\hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1 = \hat{I}+\hat{I}+\underbrace{\{\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2\}}_{=0} = 2\hat{I} .$$

Ne consegue, che una generica potenza pari $2n$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, è proporzionale all'operatore identità e vale

$$(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^{2n} = \left[(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^2\right]^n = \left(2\hat{I}\right)^n = 2^n\hat{I} = \left(\sqrt{2}\right)^{2n}\hat{I} .$$

Usando questo risultato possiamo calcolare una generica potenza dispari, si ha, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^{2n+1} = (\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^{2n}(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2) = 2^n(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^{2n+1}(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2) .$$

Alla luce di quanto ottenuto, l'operatore $\hat{P}$ può essere espresso come

$$\hat{P} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2k}}{(2k)!} + \frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2j+1}}{(2j+1)!} .$$

Le due serie sono le serie di Taylor rispettivamente delle funzioni coseno e seno iperbolico valutate in $\sqrt{2}$, quindi si ha

$$\hat{P} = \hat{I}\cosh\left(\sqrt{2}\right) + \frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right) .$$

Calcoliamo gli operatori esponenziali $e^{\hat{\sigma}_1}$ e $e^{\hat{\sigma}_2}$, anche in questi casi usiamo le proprietà degli operatori di Pauli, in particolare $\hat{\sigma}_{1,2}^2 = \hat{I}$ e le serie di Taylor delle funzioni iperboliche, si ha

$$e^{\hat{\sigma}_{1,2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\sigma}_{1,2}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\sigma}_{1,2}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\hat{\sigma}_{1,2}^{2j+1}}{(2j+1)!} = \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!} + \hat{\sigma}_{1,2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!} = \hat{I}\cosh(1) + \hat{\sigma}_{1,2}\,\mathrm{senh}(1) .$$

L'operatore $\hat{Q}$, prodotto degli operatori esponenziali, ha espressione

$$\begin{aligned}\hat{Q} = e^{\hat{\sigma}_1}e^{\hat{\sigma}_2} &= (I\cosh(1)+\hat{\sigma}_1\,\mathrm{senh}(1))\,(I\cosh(1)+\hat{\sigma}_2\,\mathrm{senh}(1)) \\ &= \hat{I}\cosh^2(1) + (\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)\,\mathrm{senh}(1)\cosh(1) + \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\,\mathrm{senh}^2(1) .\end{aligned}$$

Infine, ricordando che il prodotto del primo e del secondo operatore di Pauli può essere scritto in termini del terzo operatore di Pauli, cioè $\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 = 2i\hat{\sigma}_3$, si ha

$$\hat{Q} = \hat{I}\cosh^2(1) + (\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2)\,\frac{\operatorname{senh}(2)}{2} + 2i\hat{\sigma}_3 \operatorname{senh}^2(1)\,.$$

Poiché l'insieme dei tre operatori di Pauli unitamente all'operatore identità rappresenta una base nello spazio a quattro dimensioni in cui sono definiti gli stessi operatori di Pauli e quindi anche $\hat{P}$ e $\hat{Q}$, per questi ultimi, rispetto alla suddetta base, si hanno rappresentazioni in forma di quadri-vettori complessi, elementi dello spazio $\mathbb{C}^4$. Le componenti di tali quadri-vettori sono i coefficienti delle lore espressioni in termini di combinazioni lineari degli operatori della base $\left\{\hat{I}, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\right\}$. Quindi per gli operatori $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ si hanno le rappresentazioni quadri-vettoriali

$$\hat{P} \hookleftarrow \vec{P} = \left(\cosh\left(\sqrt{2}\right), \frac{\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}, \frac{\operatorname{senh}\left(\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad \hat{Q} \hookleftarrow \vec{Q} = \left(\cosh^2(1), \frac{\operatorname{senh}(2)}{2}, \frac{\operatorname{senh}(2)}{2}, 2i\operatorname{senh}^2(1)\right).$$

È immediato verificare che $\vec{P} \neq \vec{Q}$ e quindi che $\hat{P} \neq \hat{Q}$, come richiesto dal problema.