Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 6 settembre 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri la seguente identità

$$z_0^n = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_j|=j} \frac{z_n dz_j}{z_j - z_{j-1}},$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, z_0$, tale che $|z_0| < 1$.

Soluzione del primo problema

L'integrale può essere riscritto nella forma estesa

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_1|=1} \frac{dz_1}{z_1 - z_0} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_2|=2} \frac{dz_2}{z_2 - z_1} \cdots \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_{n-1}|=n-1} \frac{dz_{n-1}}{z_{n-1} - z_{n-2}} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_n|=n} \frac{dz_n}{z_n - z_{n-1}} z_n^n .$$

Usando il teorema di Cauchy e osservando che i percorsi di integrazione sono circonferenze concentriche centrate nell'origine, si ottiene il risultato cercato, ovvero

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_1|=1} \frac{dz_1}{z_1 - z_0} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_2|=2} \frac{dz_2}{z_2 - z_1} \cdots \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_{n-1}|=n-1} \frac{dz_{n-1}}{z_{n-1} - z_{n-2}} \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_n|=n} \frac{dz_n}{z_n - z_{n-1}} z_n^n}_{=z_{n-1}^n},$$

l'identità finale è conseguenza del fatto che per ogni z_{n-1}, tale che $|z_{n-1}| = n-1$, il numero di avvolgimenti del circonferenza $\{z : |z| = n\}$ intorno a tale punto z_{n-1} è pari a uno.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_1|=1} \frac{dz_1}{z_1 - z_0} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_2|=2} \frac{dz_2}{z_2 - z_1} \cdots \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_{n-1}|=n-1} \frac{dz_{n-1}}{z_{n-1} - z_{n-2}} z_{n-1}^n}_{=z_{n-2}^n} \\
&\ldots \\
&= \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_1|=1} \frac{dz_1}{z_1 - z_0} \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_2|=2} \frac{dz_2}{z_2 - z_1} z_2^n}_{=z_1^n} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z_1|=1} \frac{dz_1}{z_1 - z_0} z_1^n = z_0^n .
\end{aligned}$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver identificato le successioni dei poli e dei coefficienti delle parti principali degli sviluppi in serie di Laurent corrispondenti della funzione meromorfa $f(z)$, avente lo sviluppo di Magnus Gustaf Mittag-Leffler

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(z^2+k^2)}\,,$$

se ne ottenga l'espressione analitica, ovvero la somma della serie.

Soluzione del secondo problema

Riportiamo la serie nella forma canonica dello sviluppo di Magnus Gustaf Mittag-Leffler, cioè,

$$g(z)=\phi(z)+\sum_{k}\sum_{j=-\beta_k}^{-1}\frac{C_j^{(k)}}{(z-z_k)^j}\,,$$

dove $g(z)$ è la funzione meromorfa avente $\{z_k\}_k\subset\mathbb{C}$, $\{\beta_k\}_k\subset\mathbb{N}$ e $\left\{\{C_j^{(k)}\}\right\}_{j=-\beta_k}^{-1}\subset\mathbb{C}$ come, rispettivamente, successione dei poli, degli ordini dei poli e dei coefficienti delle parti principali delle serie di Laurent corrispondenti. La funzione $\phi(z)$ rappresenta la cosiddetta parte intera della funzione $g(z)$, essa ha lo stesso comportamento asintotico della $g(z)$.

Nel caso in esame si ha

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(z^2+k^2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2(z-ik)}-\frac{1}{k^2(z+ik)}\right)\frac{1}{2ik}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2ik^3(z-ik)}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{2ik^3(z-ik)}\,,$$

per cui si hanno solo poli semplici. In particolare, i poli possono essere dati in forma di due successioni: $\{z_{\pm k}=\pm ik\}_{k=1}^{\infty}$ cui corrispondono le successioni dei corrispondenti coefficienti di Laurent: $\left\{C_{-1}^{(\pm k)}=1/\left(2ik^3\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$. Infine, confrontando la forma generale dello sviluppo di Magnus Gustaf Mittag-Leffler con quella data, si ha che la parte intera della funzione $f(z)$ è identicamente nulla.

La somma della serie si può calcolare usando il metodo dei residui ovvero calcolando il limite della successione di integrali

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|w|=n+1/2}\frac{\pi\cos(\pi w)}{\operatorname{sen}(\pi w)}\frac{1}{w^2\,(z^2+w^2)}dw=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=-n}^{-1}\operatorname{Res}\left[F(w),w=j\right]+\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(w),w=j\right]\right.$$
$$\left.+\operatorname{Res}\left[F(w),w=0\right]+\operatorname{Res}\left[F(w),w=iz\right]+\operatorname{Res}\left[F(w),w=-iz\right]\right),$$

dove si posto

$$F(w)=\frac{\pi\cos(\pi w)}{\operatorname{sen}(\pi w)}\frac{1}{w^2\,(z^2+w^2)}\,.$$

I residui sono

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[F(w),w=j\right]&=\frac{1}{j^2\,(j^2+w^2)}\,,\\
\operatorname{Res}\left[F(w),w=\pm iz\right]&=\frac{\pi\cos(\pm i\pi z)}{\operatorname{sen}(\pm i\pi z)}\frac{1}{(\pm iz)^2(\pm 2iz)}=\frac{\pi\cosh(\pi z)}{i\operatorname{senh}(\pi z)}\frac{1}{-2iz^3}=\frac{\pi\coth(\pi z)}{2z^3}\,,\\
\operatorname{Res}\left[F(w),w=0\right]&=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dw^2}\frac{\pi\cos(\pi w)}{\operatorname{sen}(\pi w)}\frac{w}{(z^2+w^2)}\bigg|_{w=0}\,,
\end{aligned}$$

calcoliamo il terzo residuo usando gli sviluppi in serie noti. Si ha

$$\begin{aligned}
F(w)&=\pi\left(1-\frac{(\pi w)^2}{2!}+\frac{(\pi w)^4}{4!}+\cdots\right)\left((\pi w)-\frac{(\pi w)^3}{3!}+\frac{(\pi w)^5}{5!}+\cdots\right)^{-1}\frac{1}{w^2z^2}\left[1-\frac{w^2}{z^2}+\left(\frac{w^2}{z^2}\right)^2+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{w^3z^2}\left(1-\frac{(\pi w)^2}{2!}+\frac{(\pi w)^4}{4!}+\cdots\right)\left[1+\left(\frac{(\pi w)^2}{3!}-\frac{(\pi w)^4}{5!}+\cdots\right)+\left(\frac{(\pi w)^2}{3!}-\frac{(\pi w)^4}{5!}+\cdots\right)^2+\cdots\right]\\
&\quad\times\left[1-\frac{w^2}{z^2}+\left(\frac{w^2}{z^2}\right)^2+\cdots\right],
\end{aligned}$$

il residuo coincide con il coefficiente della potenza w^{-1}, ovvero

$$F(w) = \cdots + w^{-1}\frac{1}{z^2}\left(-\frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^2}{3!} - \frac{1}{z^2}\right) + \cdots = \cdots - w^{-1}\frac{1}{z^2}\left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{z^2}\right) + \cdots ,$$

da cui

$$\operatorname{Res}[F(w), w=0] = -\frac{1}{z^4} - \frac{\pi^2}{3z^2}.$$

Il valore limite della successione di integrali è nullo, in quanto si ha il limite uniforme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi\cot(\pi w)}{w^2\,(z^2+w^2)} w \overset{\text{U.}}{=} 0 ,$$

sulle circonferenza centrate nell'origine, di raggio $(n+1/2)$. Ne consegue che

$$0 = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2\,(z^2+j^2)} + \frac{\pi\coth(\pi z)}{z^3} - \frac{\pi^2 z^2+3}{3z^4} = 2f(z) + \frac{\pi\coth(\pi z)}{z^3} - \frac{\pi^2 z^2+3}{3z^4} ,$$

in definitiva

$$f(z) = \frac{1}{2z^4} + \frac{\pi^2}{6z^2} - \frac{\pi\coth(\pi z)}{2z^3}.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si determini la serie di Pierre Alphonse Laurent centrata in $z=0$ e convergente in $z_0 = 5/2$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2+5z+6}.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa e ha due poli semplici in $z_1 = -2$ e $z_2 = -3$, corrispondenti agli zeri semplici del polinomio di secondo grado che ne costituisce il denominatore. Ne consegue che la funzione data ammette tre sviluppi in serie di Laurent centrati nell'origine, distinti dai domini di convergenza, il cerchio e le corone circolari

$$C_2 = \{z : |z| < 2\}, \qquad C_{2,3} = \{z : 2 < |z| < 3\}, \qquad C_{3,\infty} = \{z : |z| > 3\}.$$

Lo sviluppo di Laurent richiesto è quello avente come dominio di convergenza la corona $C_{2,3}$, che contiene il punto $z_0 = 5/2$, infatti: $2 < |z_0| = 5/2 < 3$. Prima di procedere al calcolo dei coefficienti di Laurent, riscriviamo la funzione usando il suo sviluppo di Mittag-Leffler

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3},$$

da cui si evince che il polo semplice $z_1 = -2$ ha residuo unitario mentre $z_2 = -3$ ha residuo pari a -1.
La forma generale della serie di Laurent centrata nell'origine è

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k ,$$

dove il k-esimo coefficiente di Laurent si ottiene come

$$c_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz , \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Il raggio r della circonferenza di integrazione è tale che $2 < r < 3$, ovvero la circonferenza è contenuta nella corona circolare $C_{2,3}$ in cui la serie converge.
Calcoliamo i coefficienti di Laurent sfruttando lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione, si ha

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r}\left(\frac{1}{(z+2)z^{k+1}} - \frac{1}{(z+3)z^{k+1}}\right)dz \\ &= \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+2)z^{k+1}}, -2\right] + \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+2)z^{k+1}}, 0\right] - \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+3)z^{k+1}}, 0\right]\right)\theta(k-1/2), \end{aligned}$$

dove la funzione a gradino di Heaviside è utilizzata per includere i residui nell'origine solo per valori non negativi dell'indice k, ovvero solo per $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Il residuo in $z_1 = -2$ è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+2)z^{k+1}}, -2\right] = \frac{1}{(-2)^{k+1}},$$

mentre i residui nell'origine, per valori non negativi di k, cioè per $k \geq 0$, sono

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+2)z^{k+1}}, 0\right] = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\frac{1}{z+2}\bigg|_{z=0} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\frac{1}{z+2}\bigg|_{z=0} = (-1)^k \frac{1}{(z+2)^{k+1}}\bigg|_{z=0} = (-1)^k \frac{1}{2^{k+1}} = -\frac{1}{(-2)^{k+1}},$$
$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+3)z^{k+1}}, 0\right] = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\frac{1}{z+3}\bigg|_{z=0} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\frac{1}{z+3}\bigg|_{z=0} = (-1)^k \frac{1}{(z+3)^{k+1}}\bigg|_{z=0} = (-1)^k \frac{1}{3^{k+1}} = -\frac{1}{(-3)^{k+1}}.$$

In definitiva il k-esimo coefficiente di Laurent vale

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{(-2)^{k+1}} & k < 0 \\ \dfrac{1}{(-3)^{k+1}} & k \geq 0 \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

dove, per $k \geq 0$, i contributi dipendenti dalle potenze di -2 dovuti al polo nell'origine e a quello in $z_1 = -2$ si cancellano. Quindi la serie ha la forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{z^k}{(-2)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(-3)^{k+1}}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver dimostrato l'hermitianità dell'operatore $\hat{U}$, definito nello spazio di Hilbert E_4 a quattro dimensioni dalle azioni sui vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$,

$$\hat{U}|e_k\rangle = \sum_{j=1}^{4} |e_j\rangle, \qquad \forall\, k \in \{1,2,3,4\},$$

se ne determinino lo spettro discreto e l'insieme degli autovettori.

Soluzione del quarto problema

Per dimostrare che l'operatore $\hat{U}$ è hermitiano, partiamo dall'equazione che definisce le sue azioni e la moltiplichiamo per un generico $\langle e_m|$, si ha l'identità scalare

$$\langle e_m|\hat{U}|e_k\rangle = \sum_{j=1}^{4} \langle e_m|e_j\rangle = \sum_{j=1}^{4} \delta_j^m = 1, \qquad \forall\, k, m \in \{1,2,3,4\}.$$

Consideriamo poi la duale dell'equazione di partenza

$$\langle e_{k'}|\hat{U}^\dagger = \sum_{j'=1}^{4} \langle e_{j'}|, \qquad \forall\, k' \in \{1,2,3,4\},$$

moltiplichiamo per un generico $|e_{m'}\rangle$

$$\langle e_{k'}|\hat{U}^\dagger|e_{m'}\rangle = \sum_{j'=1}^{4} \langle e_{j'}|e_{m'}\rangle = \sum_{j'1=1}^{4} \delta_{m'}^{j'} = 1, \qquad \forall\, k', m' \in \{1,2,3,4\}.$$

Per l'arbitrarietà degli indici k, m, k', m', poniamo $m' = k$ e $k' = m$ nell'ultima identità e la sottraiamo membro a membro alla precedente

$$\langle e_m|\left(\hat{U} - \hat{U}^\dagger\right)|e_k\rangle = 0, \qquad \forall\, k, m \in \{1,2,3,4\},$$

ciò significa che i quattro vettori $\left(\hat{U}-\hat{U}^\dagger\right)|e_k\rangle$, con $k\in\{1,2,3,4\}$, sono ortogonali a tutti i vettori della base ortonormale e quindi coincidono tutti con il vettore nullo, cioè $\left(\hat{U}-\hat{U}^\dagger\right)|e_k\rangle=|0\rangle$, $\forall\, k\in\{1,2,3,4\}$. Il fatto che l'azione dell'operatore $\left(\hat{U}-\hat{U}^\dagger\right)$ su tutti i vettori di una base dia il vettore nullo implica che lo stesso operatore sia nullo e quindi che $\hat{U}=\hat{U}^\dagger$, ovvero l'operatore $\hat{U}$ è hermitiano.
Uno degli autovalori può essere ottenuto risolvendo direttamente l'equazione agli autovalori con un generico autovettore $|v\rangle$, che possiamo scrivere in termini dei vettori della base ortonormale come $|v\rangle=v^k|e_k\rangle$, dove $\left\{v^k\right\}_{k=1}^4$ è l'insieme delle sue componenti controvarianti. L'equazione agli autovalori è

$$\hat{U}|v\rangle=\lambda|v\rangle\,,$$

dove λ è l'autovalore. Usando la rappresentazione del vettore $|v\rangle$ e la regola di azione dell'operatore sui vettori della base, per il primo membro della precedente espressione si ha

$$\hat{U}|v\rangle=v^k\hat{U}|e_k\rangle=\sum_{k=1}^4 v^k\sum_{j=1}^4|e_j\rangle=\sum_{j=1}^4\left(\sum_{k=1}^4 v^k\right)|e_j\rangle\,.$$

La somma sull'indice k è stata indicata esplicitamente poiché l'indice stesso non appare ripetuto in posizione variante e contro-variante. Quello così ottenuto è un vettore avente tutte le componenti contro-varianti uguali e pari alla somma delle componenti contro-varianti del vettore originale $|v\rangle$. Dell'identità dell'equazione agli autovalori si ha

$$\sum_{j=1}^4\left(\sum_{k=1}^4 v^k\right)|e_j\rangle=\lambda v^j|e_j\rangle\,,$$

da cui le quattro equazioni per le componenti contro-varianti

$$\sum_{k=1}^4 v^k=\lambda v^j\,,\qquad j\in\{1,2,3,4\}\,,$$

che sono uguali tra loro, assumendo $\lambda\neq 0$ e indicando con $v_0\neq 0$ il valore comune, si hanno le equazioni

$$v_0\equiv v^1=v^2=v^3=v^4=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^4 v^k=\frac{4v_0}{\lambda}\,,$$

da cui si ottiene l'autovalore $\lambda=4$.
Gli altri autovalori si ottengono seguendo la procedura classica, ovvero risolvendo l'equazione secolare dell'operatore. A tal fine calcoliamo la matrice 4×4 che rappresentazione l'operatore $\hat{U}$ rispetto alla base data, si ha

$$\hat{U}\overset{e}{\hookleftarrow}U=\begin{pmatrix}\langle e_1|\hat{U}|e_1\rangle & \langle e_1|\hat{U}|e_2\rangle & \langle e_1|\hat{U}|e_3\rangle & \langle e_1|\hat{U}|e_4\rangle\\ \langle e_2|\hat{U}|e_1\rangle & \langle e_2|\hat{U}|e_2\rangle & \langle e_2|\hat{U}|e_3\rangle & \langle e_2|\hat{U}|e_4\rangle\\ \langle e_3|\hat{U}|e_1\rangle & \langle e_3|\hat{U}|e_2\rangle & \langle e_3|\hat{U}|e_3\rangle & \langle e_3|\hat{U}|e_4\rangle\\ \langle e_4|\hat{U}|e_1\rangle & \langle e_4|\hat{U}|e_2\rangle & \langle e_4|\hat{U}|e_3\rangle & \langle e_4|\hat{U}|e_4\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

L'equazione secolare nella variabile λ è

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1&1\\1&1-\lambda&1&1\\1&1&1-\lambda&1\\1&1&1&1-\lambda\end{pmatrix}&=0\\
(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}&\\
+\det\begin{pmatrix}1&1-\lambda&1\\1&1&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\\1&1&1\end{pmatrix}&=0\\
(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}-3\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}&=0\,,\end{aligned}$$

gli ultimi tre determinanti della seconda equazione differiscono solo per il segno in quanto la seconda delle tre matrici si ottiene dalla prima scambiando la prima riga con la seconda, mentre la terza matrice si ottiene dalla seconda scambiando la seconda con la terza riga. Calcolando i determinanti si ottiene

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\big[(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda)+2\lambda\big]-3\lambda^2=0\\(1-\lambda)\lambda^2(3-\lambda)-3\lambda^2=0\\\lambda^3(\lambda-4)=0\,,\end{aligned}$$

i quattro zeri che rappresentano gli autovalori sono: $\lambda_1=4$ e $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, tre sono degeneri, infatti l'autovalore nullo ha ordine di degenerazione pari a tre, mentre l'autovalore $\lambda_1=4$ è non degenere.
Gli autovettori si ottengono come soluzioni dei quattro sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix}1-\lambda_k & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda_k & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda_k & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1_{(k)}\\ v^2_{(k)}\\ v^3_{(k)}\\ v^4_{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad k\in\{1,2,3,4\}\,,$$

dove $v^j_{(k)}$ è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, con $k,j\in\{1,2,3,4\}$. L'autovettore relativo all'unico autovalore non nullo e non degenere, $\lambda_1=4$, è già stato determinato, ha tutte le componenti uguali, quindi la sua rappresentazione matriciale è

$$v_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Le rappresentazioni dei tre autovettori ortogonali relativi all'autovalore degenere nullo si ottengono come soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1_{(k)}\\ v^2_{(k)}\\ v^3_{(k)}\\ v^4_{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad k\in\{2,3,4\}\,.$$

È immediato osservare che le soluzioni possono essere ottenute considerando vettori con solo due componenti non nulle ed opposte, ad esempio si hanno

$$v_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad v_4=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Come è noto, ogni combinazione dei tre autovettori precedenti è ancora un autovettore relativo allo stesso autovalore nullo degenere. Con una combinazione opportuna si può ottenere un insieme di autovettori ortonormali in quanto l'operatore $\hat U$ è hermitiano ed è quindi normale.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si consideri l'operatore diagonalizzabile $\hat A$, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, che, rispetto alla base canonica ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3\subset E_3$, è rappresentato dalla matrice

$$\hat A\overset{e}{\hookleftarrow}A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-2&-1\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

Dopo aver dimostrato che l'operatore $\hat A$ non è normale, si ottenga la matrice che rappresenta, rispetto alla stessa base canonica l'operatore

$$\hat B=\sum_{k=0}^{100}\hat A^k\,.$$

Soluzione del quinto problema

L'operatore è diagonalizzabile, si può quindi applicare il teorema spettrale ma, poiché lo stesso operatore non è normale, la matrice diagonalizzante D esiste ma non è unitaria, ovvero, indicando con A_d la rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{A}$, fatta cioè rispetto alla base non ortonormale dei sui autovettori, si ha

$$A_d = D^{-1}AD = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\,,$$

dove α_1, α_2 and α_3 sono gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$. Ovviamente, usando il teorema spettrale, si che la matrice diagonale che rappresenta l'operatore $\hat{B}$ è

$$B_d = D^{-1}BD = D^{-1}e^{A}D = \operatorname{diag}\left(e_1^{\alpha}, e_2^{\alpha}, e_3^{\alpha}\right).$$

D'altro canto, per la somma di potenze con le rappresentazioni rispetto alla base canonica, si ha

$$\hat{B} = \sum_{k=0}^{100} \hat{A}^k \qquad \overset{e}{\hookleftarrow} \qquad B = \sum_{k=0}^{100} A^k\,.$$

Lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$, ovvero l'insieme dei suoi autovalori, si ottiene risolvendo, rispetto al parametro α, l'equazione secolare

$$\det(\hat{A} - \alpha\hat{I}) = 0\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità. Usando le rappresentazioni note, quindi in termini delle matrici A e I che, rispetto alla base canonica, rappresentano gli operatori, si ha

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 & 1 \\ -1 & -2-\alpha & -1 \\ 1 & 2 & 1-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\
(1-\alpha)\left[-(2+\alpha)(1-\alpha)+2\right] + 1 - \alpha - 1 - 2 + 2 + \alpha &= 0 \\
\alpha(1-\alpha)(\alpha+1) &= 0\,,
\end{aligned}$$

da cui le soluzioni

$$\alpha_1 = -1\,, \qquad \alpha_2 = 0\,, \qquad \alpha_3 = 1\,,$$

ovvero, lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ è l'insieme $\sigma_d(A) = \{\alpha_j\}_{j=1}^{3} = \{-1, 0, 1\}$. Ne consegue che le potenze intere della matrice diagonale A_d verificano un legge di ricorrenza, le potenze multiplo di due coincidono, cioè

$$A_d^2 = A_d^4 = \cdots = A_k^{2n} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

La stessa relazione vale per la matrice A, non diagonale, che rappresenta l'operatore rispetto alla base canonica, infatti, con $A = DA_dD^{-1}$, per la potenza $2n$-esima si ha

$$A^{2n} = \underbrace{DA_dD^{-1}DA_dD^{-1}\cdots DA_dD^{-1}}_{2n \text{ volte}} = DA_d^{2n}D^{-1} = DA_d^2D^{-1} = \underbrace{DA_dD^{-1}}_{=A}\underbrace{DA_dD^{-1}}_{=A} = A^2\,.$$

Alla luce di questo risultato, la serie di potenze dell'esponenziale può essere scritta nella forma seguente

$$B = \sum_{k=1}^{100} A^k = \sum_{j=0}^{50} A^{2j} + \sum_{j=0}^{49} A^{2j+1} = I + A + \sum_{j=1}^{50} A^{2j} + \sum_{j=1}^{49} A^{2j+1} = I + A + A^2\left(I\sum_{j=1}^{50} + A\sum_{j=1}^{49}\right) = I + A + 50A^2 + 49A^3\,,$$

con la forma esplicita delle matrici e avendo

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A,$$

si ottiene il risultato finale

$$B = I + 50A + 50A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 & 50 & 50 \\ -50 & -100 & -50 \\ 50 & 100 & 50 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 101 & 100 & 100 \\ -50 & -49 & -50 \\ 50 & 50 & 51 \end{pmatrix}.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[k^2\right] \operatorname{sen}(\pi x).$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Applichiamo il teorema della convoluzione

$$\mathscr{F}_x\left[f_1(x) f_2(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\mathscr{F}_k\left[f_1\right] * \mathscr{F}_k\left[f_2\right]\right)(k),$$

dove $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono funzioni che hanno, rispettivamente, trasformate di Fourier $\mathscr{F}_k\left[f_1(x)\right]$ e $\mathscr{F}_k\left[f_2(x)\right]$. Nel caso in esame si hanno $f_1(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[k^2\right]$ e $f_2(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, quindi

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\mathscr{F}_{-x}\left[k^2\right]\operatorname{sen}(\pi x)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(k^2 * \mathscr{F}_k\left[\operatorname{sen}(\pi x)\right]\right)(k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(k^2 * \left(\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(k-\pi)}dx - \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(k+\pi)}dx\right)\right)(k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(k^2 * \left(\frac{\pi}{i\sqrt{2\pi}}\delta(k-\pi) - \frac{\pi}{i\sqrt{2\pi}}\delta(k+\pi)\right)\right)(k) \\
&= \frac{1}{2i}\left(k^2 * \left(\delta(k-\pi) - \delta(k+\pi)\right)\right)(k) \\
&= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}(k-k')^2 * \left(\delta(k'-\pi) - \delta(k'+\pi)\right)dk' \\
&= \frac{(k-\pi)^2 - (k+\pi)^2}{2i} \\
&= \frac{-4k\pi}{2i},
\end{aligned}$$

in definitiva la trasformata di Fourier richiesta vale

$$\mathscr{F}_k[f] = 2ik\pi.$$