Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 6 settembre 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$S = \int_{-1}^{1} \frac{x \arccos(x)}{\left(x^2+3\right)^2} dx \, .$$

Suggerimento. utile iniziare con una integrazione per parti.

Soluzione del primo problema

Facendo un'integrazione per parti, integrando in particolare il rapporto di polinomi $x/(x^2+3)^2$, si ha

$$S = -\frac{1}{2} \left. \frac{\arccos(x)}{x^2+3} \right|_{-1}^{1} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+3)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} P \, ,$$

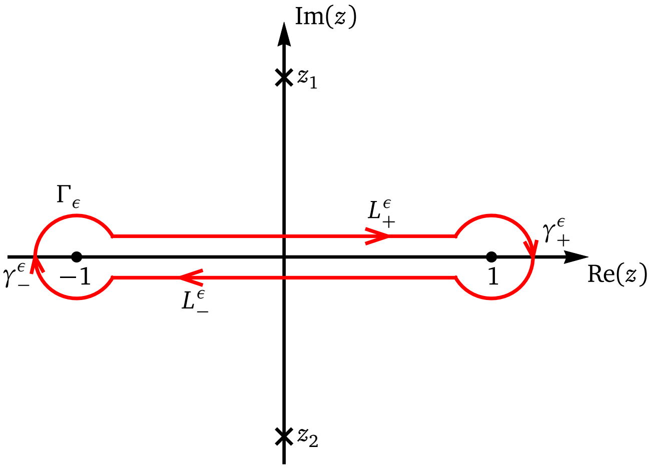
dove si posto

$$P = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+3)\sqrt{1-x^2}} \, .$$

La funzione integranda di P polidroma e ha punti di diramazione in $x = \pm 1$. Consideriamo allora l'integrale

$$P' = \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}} \, ,$$

dove Γ_ϵ il percorso chiuso ad "osso" mostrato in figura.



Tale percorso l'unione di due tratti rettilinei e due archi infinitesimi, cio $\Gamma_\epsilon = L_+ \cup L_- \cup \gamma_- \cup \gamma_+$, con

$$L^\epsilon_\pm = \{z : z = x \pm i\epsilon \mathrm{sen}(\epsilon), x \in (-1+\eta, 1-\eta), \eta = \epsilon\cos(\epsilon)\}\,,$$
$$\gamma^\epsilon_\pm = \{z : z = \pm 1 \mp \epsilon e^{\mp i\theta}, \theta \in (\epsilon, 2\pi - \epsilon)\}\,.$$

L'integranda ha due poli semplici, indicati in figura con il simbolo "×", nei punti

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{3}\,.$$

Studiando la radice e scegliamo le fasi dei due fattori come

$$\sqrt{1-z^2} = \sqrt{f_1(z)f_2(z)}\,, \qquad f_{1,2}(z) = 1 \pm z = |1 \pm z| e^{i\theta_{1,2}}\,, \qquad \begin{cases} \theta_1 \in (0, 2\pi) \\ \theta_2 \in (-\pi, \pi) \end{cases}\,,$$

in questo modo tagli di $f_1(z)$ e $f_2(z)$ sono entrambi in avanti, quindi, la loro sovrapposizione fa s che risulti, come unico taglio, il segmento $(-1, 1)$. Studiamo il comportamento della radice sui tratti rettilinei $L^\pm_\epsilon$. In particolare si hanno

$$L^\epsilon_+ : \begin{cases} \theta_1 \to 0^+ \\ \theta_2 \to 0^- \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-x^2}\,,$$

$$L^\epsilon_- : \begin{cases} \theta_1 \to 2\pi^- \\ \theta_2 \to 0^+ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{1-x^2} e^{i\pi} = -\sqrt{1-x^2}\,.$$

I contributi sugli archi sono nulli nel limite $\epsilon \to 0$, ovvero

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma^\epsilon_\pm} \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}} = 0\,,$$

ci consegue dai limiti uniformi

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{z \mp 1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}} = 0\,.$$

In definitiva

$$\lim_{\epsilon\to 0} P' = \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}} = 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+3)\sqrt{1-x^2}} = 2P\,.$$

Per il teorema dei residui si ha anche

$$\lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}} = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}}, z = z_1 \right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}}, z = z_2 \right] \right)\,,$$

ne consegue che l'integrale P pu essere ottenuto dalla somma dei residui

$$P = i\pi \left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}}, z = z_1 \right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}}, z = z_2 \right] \right)\,.$$

Al fine di calcolare i residui necessario valutare la radice che compare nell'integranda tenendo conto delle scelte delle fasi. Nel polo $z_1 = i\sqrt{3}$ si ha

$$\sqrt{1-z_1^2} = \sqrt{\underbrace{(1+i\sqrt{3})}_{f_1(z_1)}\underbrace{(1-\sqrt{3})}_{f_2(z_1)}} = 2e^{i\frac{\arctan(\sqrt{3})+\arctan(-\sqrt{3})}{2}} = 2e^{i\frac{\pi/3-\pi/3}{2}} = 2\,,$$

il primo angolo θ_1 e deve essere definito in $(0, 2\pi)$, il secondo θ_2 che invece definito in $(-\pi, \pi)$.
Allo stesso modo, nel polo $z_2 = -i\sqrt{3}$ avremo

$$\sqrt{1-z_2^2} = \sqrt{\underbrace{(1-i\sqrt{3})}_{f_1(z_2)}\underbrace{(1+\sqrt{3})}_{f_2(z_2)}} = 2e^{i\frac{\arctan(-\sqrt{3})+\arctan(\sqrt{3})}{2}} = 2e^{i\frac{5\pi/3+\pi/3}{2}} = -2\,,$$

dove θ_1, essendo definito in $(0, 2\pi)$, deve essere fissato a $5\pi/3$; mentre θ_2 vale $\pi/3$ poich , come gi detto, definito in $(-\pi, \pi)$. Alla luce di questi risultati i residui sono uguali, infatti

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}}, z = z_1\right] = \frac{1}{2i\sqrt{3}\cdot 2} = \frac{1}{4i\sqrt{3}}\,,$$
$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}}, z = z_2\right] = \frac{1}{-2i\sqrt{3}\cdot(-2)} = \frac{1}{4i\sqrt{3}}\,.$$

L'integrale P vale

$$P = i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}}, z = z_1\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+3)\sqrt{1-z^2}}, z = z_2\right]\right) = i\pi\frac{1}{2i\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,,$$

da cui il risultato finale

$$S = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}P = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli il residuo nell'origine della funzione

$$f(z) = \frac{(z+2)^4\,\mathrm{sen}(z^2)}{z^{99}}\,.$$

Soluzione del secondo problema

 facile dedurre che l'origine rappresenta un polo di ordine 97 per la funzione $f(z)$, ne consegue che se si volesse ottenere il residuo con la formula integrale di Cauchy sarebbe necessario calcolare la derivata 96-esima della funzione $f(z)z^{97}$. Per quanto questa sia una strada percorribile, la lunghezza e la tediosit del conto la rendono quanto mai dispendiosa in tempo e sforzo intellettivo. L'altra possibilit quella di calcolare il coefficiente C_{-1} della serie di Laurent della funzione centrata nell'origine, sfruttando lo sviluppo noto della funzione seno. Ovvero si ha

$$f(z) = \frac{(z+2)^4}{z^{99}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2(2k+1)}}{(2k+1)!} = \frac{z^4+8z^3+24z^2+32z+16}{z^{99}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2(2k+1)}}{(2k+1)!}\,.$$

Possiamo considerare cinque serie di Laurent, una per ognuno dei termini del polinomio a numeratore e ottenere il coefficiente C_{-1} totale come somma dei coefficienti corrispondenti di ciascuna serie. Le cinque serie sono:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2(2k+1)-95}}{(2k+1)!} + 8\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2(2k+1)-96}}{(2k+1)!} + 24\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2(2k+1)-97}}{(2k+1)!} \\
&\quad +32\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2(2k+1)-98}}{(2k+1)!} + 16\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2(2k+1)-99}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} C^{(1)} z^j + \sum_{j=-\infty}^{\infty} C^{(2)} z^j + \sum_{j=-\infty}^{\infty} C^{(3)} z^j + \sum_{j=-\infty}^{\infty} C^{(4)} z^j + \sum_{j=-\infty}^{\infty} C^{(5)} z^j \,,
\end{aligned}$$

il coefficiente cercato $C_{-1} = C_{-1}^{(1)} + C_{-1}^{(2)} + C_{-1}^{(3)} + C_{-1}^{(4)} + C_{-1}^{(5)}$.
Per ottenere $C_{-1}^{(1)}$ procediamo come segue, il coefficiente ha la forma

$$C_{-1}^{(1)} = \frac{(-1)^{k'}}{(2k'+1)!} \,,$$

dove k' deve essere scelto in $\mathbb{Z}$ in modo tale che l'esponente corrispondente, $2(2k'+1)-95$, sia uguale a -1, ovvero k' deve verificare l'equazione $2(2k'+1)-95=-1$, da cui

$$2k'+1 = 47 \qquad \Rightarrow \qquad k' = 23 \qquad \Rightarrow \qquad C_{-1}^{(1)} = -\frac{1}{47!} \,.$$

Per $C_{-1}^{(2)}$ si ha la forma

$$C_{-1}^{(2)} = 8\frac{(-1)^{k'}}{(2k'+1)!} \,,$$

e l'equazione per k'

$$2(2k'+1)-96=-1 \qquad \Rightarrow \qquad 2(2k'+1) = 95 \qquad \Rightarrow \qquad C_{-1}^{(2)} = 0 \,,$$

il coefficiente nullo poich questa equazione non ha soluzione in $\mathbb{Z}$. Per il terzo e quarto coefficiente si ottiene un risultato analogo, infatti le corrispondenti equazioni non hanno soluzioni, ovvero

$$2(2k'+1)-97=-1 \qquad \Rightarrow \qquad 2k'+1 = 48 \qquad \Rightarrow \qquad C_{-1}^{(3)} = 0 \,,$$

$$2(2k'+1)-98=-1 \qquad \Rightarrow \qquad 2(2k'+1) = 97 \qquad \Rightarrow \qquad C_{-1}^{(4)} = 0 \,.$$

Il quinto, infine,

$$C_{-1}^{(5)} = 16\frac{(-1)^{k'}}{(2k'+1)!} \,,$$

non nullo, l'equazione che lo definisce $2(2k'+1)-99=-1$, quindi

$$2k'+1 = 49 \qquad \Rightarrow \qquad k' = 24 \qquad \Rightarrow \qquad C_{-1}^{(5)} = \frac{16}{49!} \,.$$

Il residuo cercato

$$C_{-1} = C_{-1}^{(1)} + C_{-1}^{(5)} = -\frac{1}{47!} + \frac{16}{49!} = -\frac{1}{47!}\frac{146}{147} \,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Usando la formula integrale di Cauchy si calcolino gli integrali

$$M = \oint_{|z|=1} \left|f(z)\right|^2 dz\,, \qquad R = \oint_{|z|=1} \mathrm{Re}\left[f(z)\right] dz\,, \qquad I = \oint_{|z|=1} \mathrm{Im}\left[f(z)\right] dz\,,$$

con

$$f(z) = z^2 + z + 1\,.$$

$|z|^2 = zz^*$

$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2}$

Soluzione del terzo problema

Al fine di usare la formula integrale di Cauchy necessario scrivere il modulo quadro, la parte reale e quella immaginaria in forma analitica, ovvero come espressioni dipendenti solo della variabile z, senza, quindi, fare uso della variabile complessa coniugata z^*. Ci possibile grazie al fatto che sulla circonferenza unitaria si ha l'identit $z^* = 1/z$. Per le tre quantit cercate avremo

$$\begin{aligned}
\left|f(z)\right|^2 &= f(z)f^*(z) = \left(z^2+z+1\right)\left(z^2+z+1\right)^* = \left(z^2+z+1\right)\left(1/z^2+1/z+1\right) = \frac{\left(z^2+z+1\right)^2}{z^2}\,,\\
\mathrm{Re}\left[f(z)\right] &= \frac{f(z)+f^*(z)}{2} = \frac{z^2+z+1+1/z^2+1/z+1}{2} = \frac{z^4+z^3+2z^2+z+1}{2z^2}\,,\\
\mathrm{Im}\left[f(z)\right] &= \frac{f(z)-f^*(z)}{2i} = \frac{z^2+z+1-1/z^2-1/z-1}{2i} = \frac{z^4+z^3-z-1}{2iz^2}\,.
\end{aligned}$$

Gli integrali sono

$$\begin{aligned}
M &= \oint_{|z|=1} \left|f(z)\right|^2 dz = \oint_{|z|=1} \frac{\left(z^2+z+1\right)^2}{z^2} dz = 2i\pi \frac{d}{dz}\left(z^2+z+1\right)^2\Big|_{z=0} = 2i\pi\,,\\
R &= \oint_{|z|=1} \mathrm{Re}\left[f(z)\right] dz = \oint_{|z|=1} \frac{z^4+z^3+2z^2+z+1}{2z^2} dz = i\pi \frac{d}{dz}\left(z^4+z^3+2z^2+z+1\right)^2\Big|_{z=0} = i\pi\,,\\
I &= \oint_{|z|=1} \mathrm{Im}\left[f(z)\right] dz = \oint_{|z|=1} \frac{z^4+z^3-z-1}{2iz^2} dz = \pi \frac{d}{dz}\left(z^4+z^3-z-1\right)^2\Big|_{z=0} = -\pi\,.
\end{aligned}$$

Quarto problema (punteggio 7/30)

Siano $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{N}$ e $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ gli insiemi degli autovettori ortonormali e autovalori dell'operatore normale $\hat{A}$, definito nello spazio di Hilbert a dimensione finita E_N. Si dimostri che l'operatore

$$\hat{B}_j = \hat{A} + |u_j\rangle\langle v| \,,$$

definito in termini di un dato autovettore $|u_j\rangle$ e un generico $\langle v| \in E_N^*$, diverso dal vettore nullo e non autovettore di $\hat{A}$, ha gli stessi autovalori di $\hat{A}$ ad eccezione del j-esimo che vale $\lambda_j + \langle v|u_j\rangle$. Ovvero, detto $\{\beta_k\}_{k=1}^{N}$ l'insieme degli autovalori di $\hat{B}_j$, si ha

$$\beta_k = \lambda_k + \delta_{kj}\langle v|u_j\rangle \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \,.$$

$(B_j)^k_m = \langle u_k|\hat{B}_j|u_m\rangle$

Nel caso particolare in cui l'operatore $\hat{A}$, definito in E_3, sia rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

si costruisca la matrice $B_j = A + u_j\, v^\dagger$ scegliendo opportunamente l'indice j e il vettore v affinch tutti gli autovalori di B_j siano uguali, ovvero si abbia massima degenerazione.

Soluzione del quarto problema

L'insieme di autovettori $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{N}$ rappresenta una base ortonormale dello spazio E_N, la rappresentazione rispetto a tale base dell'operatore $\hat{B}_j$ data dalla matrice B_j di elementi

$$(B_j)^k_m = \langle u_k|\hat{B}_j|u_m\rangle = \langle u_k| \left(\hat{A} + |u_j\rangle\langle v|\right) |u_m\rangle = \delta^k_m \lambda_m + \delta^k_j \langle v|u_m\rangle \,, \qquad k, m = 1, 2, \ldots, N \,.$$

In dettaglio, la matrice B_j ha la forma

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle v|u_1\rangle & \langle v|u_2\rangle & \ldots & \lambda_j + \langle v|u_j\rangle & \ldots & \langle v|u_N\rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_N \end{pmatrix} ,$$

tutti gli elementi diagonali coincidono con quelli di A ad eccezione del j-esimo che ha il termine aggiuntivo $\langle v|u_j\rangle$, inoltre, tutti gli elementi non diagonali sono nulli ad eccezione di quelli della j-esima riga. Ne consegue che l'equazione secolare

$$\det(B_j - \beta I) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \beta & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \beta & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_j + \langle v|u_j\rangle - \beta & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \lambda_N - \beta \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{N} (\lambda_k + \delta_{kj}\langle v|u_j\rangle - \beta) = 0 \,,$$

dai cui si ottiene che gli autovalori sono

$$\beta_k = \lambda_k + \delta_{kj}\langle v|u_j\rangle \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \,.$$

Nel caso particolare della matrice A, gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione

$$\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda+1)\,[\lambda(1-\lambda)+2] = 0$$

e sono

$$\lambda_1 = -1\,, \qquad \lambda_2 = -1\,, \qquad \lambda_3 = 2\,.$$

Gli autovettori ortonormali corrispondenti

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere tre autovalori uguali   necessario modificare il terzo sommando -3, quindi il vettore v dovr   essere tale da avere prodotto scalare con con u_3 uguale a -3. Consideriamo la forma generale

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

il prodotto scalare

$$\langle v | u_3 \rangle = v^\dagger u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(x^* + y^* + z^* \right) ,$$

  quindi sufficiente scegliere $x = -3\sqrt{3}$ e $y = z = 0$ per avere il prodotto cercato. In questo caso la matrice B_3

$$B_3 = A + u_3 v^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che ci sia massima degenerazione, calcolando gli autovalori di B_3, ovvero risolvendo l'equazione secolare in β

$$\det(B_3 - \beta I) = \det \begin{pmatrix} -3-\beta & 1 & 1 \\ -2 & -\beta & 1 \\ -2 & 1 & -\beta \end{pmatrix} = (\beta+1)^3 = 0\,,$$

si hanno tre soluzioni coincidenti, gli autovalori sono tutti e tre uguali a -1, la matrice B_3 completamente degenere.

Quinto problema (punteggio 5/30)

Si verifichi che la funzione

$$G(x,y) = \begin{cases} -\mathrm{senh}(x)\cosh(y) & x < y \\ -\cosh(x)\,\mathrm{senh}(y) & x \geq y \end{cases},$$

$\hat{D}_x u(x) = f(x)$

definita in $(0,\pi)\times(0,\pi)$, rappresenta la funzione di Green dell'operatore differenziale

$$\hat{D}_x = \frac{d^2}{dx^2} - 1\,.$$

Soluzione del quinto problema

Per verificare quanto richiesto, consideriamo l'equazione differenziale

$$\hat{D}_x u(x) = f(x),$$

dove $u(x)$ e $f(x)$ sono, rispettivamente, la funzione incognita e la funzione d'ingresso. Se $G(x,y)$ la funzione di Green, la soluzione deve essere esprimibile come

$$u(x) = \int_0^\pi G(x,y) f(y) dy = -\int_0^x \cosh(x)\,\mathrm{senh}(y) f(y) dy - \int_x^\pi \sinh(x)\cosh(y) f(y) dy\,.$$

Dimostriamo che una funzione cos definita soluzione dell'equazione, applicando su di essa dell'operatore differenziale

$$\begin{aligned}
\hat{D}_x u(x) &= \hat{D}_x \left(-\int_0^x \cosh(x)\,\mathrm{senh}(y) f(y) dy - \int_x^\pi \sinh(x)\cosh(y) f(y) dy \right) \\
&= \frac{d^2}{dx^2} \left(-\int_0^x \cosh(x)\,\mathrm{senh}(y) f(y) dy - \int_x^\pi \sinh(x)\cosh(y) f(y) dy \right) - u(x) \\
&= \frac{d}{dx} \left(-\int_0^x \mathrm{senh}(x)\,\mathrm{senh}(y) f(y) dy - \cosh(x)\,\mathrm{senh}(x) f(x) \right. \\
&\qquad \left. - \int_x^\pi \cosh(x)\cosh(y) f(y) dy + \mathrm{senh}(x)\cosh(x) f(x) \right) - u(x) \\
&= \frac{d}{dx} \left(-\int_0^x \mathrm{senh}(x)\,\mathrm{senh}(y) f(y) dy - \int_x^\pi \cosh(x)\cosh(y) f(y) dy \right) - u(x) \\
&= -\int_0^x \cosh(x)\,\mathrm{senh}(y) f(y) dy - \mathrm{senh}^2(x) f(x) - \int_x^\pi \mathrm{senh}(x)\cosh(y) f(y) dy + \cosh^2(x) f(x) - u(x) \\
&= \underbrace{-\int_0^x \cosh(x)\,\mathrm{senh}(y) f(y) dy - \int_x^\pi \mathrm{senh}(x)\cosh(y) f(y) dy}_{u(x)} + f(x) - u(x) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Ne consegue che $G(x,y)$ rappresenta la funzione di Green dell'operatore $\hat{D}_x$.

Sesto problema (punteggio 5/30)

Si dimostri che la serie

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2i\pi m}{T}x}}{T}$$

$$\phi_k(x) = \frac{e^{\frac{2i\pi k}{T}x}}{\sqrt{T}}$$

rappresenta la serie di Fourier, rispetto al sistema della fasi, della distribuzione periodica

$$D(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x + kT),$$

di periodo $T > 0$.

Soluzione del sesto Problema

La distribuzione $D(x)$, per costruzione, periodica con periodo T, infatti, $\forall\, x \in [-T/2, T/2]$ e $\forall\, m \in \mathbb{N}$, si ha

$$D(x+mT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x+kT+mT) = \{k' = k-m\} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \delta(x+k'T) = D(x)\,.$$

Consideriamo la distribuzione $D(x)$ nell'intervallo $[-T/2, T/2]$, per cui il sistema delle fasi da utilizzare

$$\left\{ \phi_k(x) = \frac{e^{\frac{2i\pi k}{T}x}}{\sqrt{T}} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}\,,$$

infatti rappresenta un sistema ortonormale e completo per le funzioni della classe $L^2(-T/2, T/2)$.
La serie di Fourier

$$D(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi_k(x)\,, \qquad C_k = (\phi_k, D)\,,$$

dove $\sim$ il simbolo Hurwitz.
facile vedere che i coefficienti di Fourier sono tutti uguali a $1/\sqrt{T}$, infatti

$$C_k = (\phi_k, D) = \int_{-T/2}^{T/2} \phi_k^*(x) D(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-\frac{2i\pi k}{T}x}}{\sqrt{T}} D(x) dx = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{-\frac{2i\pi k}{T}x}}{\sqrt{T}} \delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{T}}\,,$$

nell'ultimo integrale si considera solo il termine con $k=0$ della serie che definisce $D(x)$ in quanto tutti gli altri sono nulli nell'intervallo di integrazione $[-T/2, T/2]$. Ne consegue che, come volevasi dimostrare, la serie completa

$$D(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2i\pi k}{T}x}}{T}\,, \qquad \forall\, x \in [-T/2, T/2]\,.$$

Ovviamente l'identit pu essere estesa a tutto $\mathbb{R}$ poich le funzioni $\phi_k(x)$ sono periodiche con lo stesso periodo di $D(x)$.