Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 6 settembre 2012

Esercizio 1 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + 4\cos^2(x)} \, .$$

. . . .

Soluzione
Con la sostituzione $z = e^{ix}$, quindi: $x = -i\ln(z)$ e $dx = -idz/z$, l'integrale diventa

$$I = \int_\gamma \frac{dz/z}{1 + (z + 1/z)^2} = -i \int_\gamma \frac{zdz}{z^2 + (z^2+1)^2} \, ,$$

dove la curva $\gamma = \{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi]\}$ è la circonferenza unitaria. L'integranda ha quattro poli, si ottengono come soluzioni delle due equzioni di secondo grado:

$$z^{\pm 2} \pm iz^{\pm} + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} z_1^+ &= i\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ z_2^+ &= i\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ z_1^- &= i\,\frac{+1-\sqrt{5}}{2} \\ z_2^- &= i\,\frac{+1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \, ,$$

i moduli sono

$$\begin{cases} |z_1^+| &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \\ |z_2^+| &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \\ |z_1^-| &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \\ |z_2^-| &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \end{cases} \, ,$$

quindi solo z_2^+ e z_1^- sono nel cerchio unitario. Applicando il teorema dei residui si ottiene

$$I = 2\pi\Big(\text{Res}[f(z), z_2^+] + \text{Res}[f(z), z_1^-]\Big) \, ,$$

con

$$f(z) = \frac{zdz}{z^2 + (z^2+1)^2} \, .$$

Poiché tutti i poli sono semplici i residui si ottengono come:

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), z_2^+] &= \lim_{z\to z_2^+} (z - z_2^+) f(z) \\ &= z_2^+ \lim_{z\to z_2^+} \frac{1}{2z + 4z(z^2+1)} \\ &= \frac{1}{2 + 4(z_2^{+2} + 1)} \\ &= \frac{1}{2 + 4\left[-(6 - 2\sqrt{5})/4 + 1\right]} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \, , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), z_1^-] &= \lim_{z\to z_1^-}(z - z_1^-)f(z) \\
&= \frac{1}{2 + 4(z_1^{-2} + 1)} \\
&= \frac{1}{2 + 4\left[-(6-2\sqrt{5})/4 + 1\right]} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,.
\end{aligned}
$$

Finalmente l'integrale è

$$
I = 2\pi\Big(\mathrm{Res}[f(z), z_2^+] + \mathrm{Res}[f(z), z_1^-]\Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\,.
$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$
J = \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{1+x^4}dx\,.
$$

. . . .

Soluzione
L'integranda è una funzione pari, possiamo riscrivere l'integrale estendendo l'intervallo a tutto l'asse reale come

$$
J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2(x)}{1+x^4}dx\,,
$$

inoltre, scomponendo il seno in termini degli esponenziali, si ha

$$
\begin{aligned}
J = -\frac{1}{8}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{1+z^4}dz &= -\frac{1}{8}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2iz}}{1+z^4}dz - \frac{1}{8}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-2iz}}{1+z^4}dz + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{1+z^4} \\
&= -J_1 - J_2 + J_3\,.
\end{aligned}
$$

Tutte le integrande hanno gli stessi quattro poli semplici

$$
z_k = e^{i(1+2k)\pi/4}\,, \qquad k = 0,1,2,3\,.
$$

Possiamo usare il lemma di Jordan però, mentre per J_1 e J_2 la scelta del percorso è obbligata dal segno del coefficiente di iz ad esponente, per J_3 possiamo scegliere indifferentemente di *chiudere sopra o sotto*, essendo questo il caso di coefficiente nullo. Abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{8}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^+} \frac{e^{2iz}}{1+z^4}dz = \frac{i\pi}{4}\Big(\mathrm{Res}[f_1(z), z_0] + \mathrm{Res}[f_1(z), z_1]\Big)\,, \\
J_2 &= \frac{1}{8}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^-} \frac{e^{-2iz}}{1+z^4}dz = -\frac{i\pi}{4}\Big(\mathrm{Res}[f_2(z), z_2] + \mathrm{Res}[f_2(z), z_3]\Big)\,, \\
J_3 &= \frac{1}{4}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R^+} \frac{dz}{1+z^4} = \frac{i\pi}{2}\Big(\mathrm{Res}[f_3(z), z_0] + \mathrm{Res}[f_3(z), z_1]\Big)\,,
\end{aligned}
$$

dove i percorsi sono

$$\Gamma_R^+ = \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\} \cup [-R,R]$$
$$\Gamma_R^- = -\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [\pi,2\pi]\} \cup [-R,R]\,,$$

il segno "-" in J_2 è conseguenza del verso di percorrenza di Γ_R^- che è orario. I residui sono

$$\mathrm{Res}[f_1(z), z_j] = \lim_{z\to z_0}(z-z_j)f_1(z) = \frac{e^{2iz_j}}{4z_j^3}\,, \qquad j = 0,1\,,$$

$$\mathrm{Res}[f_2(z), z_j] = \lim_{z\to z_0}(z-z_j)f_2(z) = \frac{e^{-2iz_j}}{4z_j^3}\,, \qquad j = 2,3\,,$$

$$\mathrm{Res}[f_3(z), z_j] = \lim_{z\to z_0}(z-z_j)f_3(z) = \frac{1}{4z_j^3}\,, \qquad j = 0,1\,.$$

L'integrale completo è

$$\begin{aligned} J &= -J_1 - J_2 + J_3 \\ &= \frac{i\pi}{4}\left[-\sum_{j=0}^{1}\frac{e^{2iz_j}}{4z_j^3} + \sum_{j=2}^{3}\frac{e^{-2iz_j}}{4z_j^3} + 2\sum_{j=0,1}\frac{1}{4z_j^3}\right]\,, \end{aligned}$$

osservando che $z_2 = z_1^*$ e $z_3 = z_0^*$, possiamo compattare e ottenere il risultato finale

$$\begin{aligned} J &= \frac{i\pi}{16}\sum_{j=0}^{1}\left[-\frac{e^{2iz_j}}{z_j^3} + \frac{e^{-2iz_j^*}}{z_j^{*3}} + \frac{2}{z_j^3}\right] \\ &= \frac{i\pi}{16}\sum_{j=0}^{1} e^{-2\mathrm{Im}(z_j)}\left[-e^{i[2\mathrm{Re}(z_j)-3(2j+1)\pi/4]} + e^{-i[2\mathrm{Re}(z_j)-3(2j+1)\pi/4]}\right] + \frac{i\pi}{8}\left[e^{-3i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right] \\ &= \frac{\pi}{8}\sum_{j=0}^{1} e^{-2\mathrm{Im}(z_j)}\sin[2\mathrm{Re}(z_j) - 3(2j+1)\pi/4] + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{8}e^{-\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2} - 3\pi/4\right) - \frac{\pi}{4}e^{-\sqrt{2}}\sin\left(\sqrt{2} + \pi/4\right) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{8}e^{-\sqrt{2}}\left[-\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{2}\right)\right] + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi - e^{-\sqrt{2}}\pi\left[\sin\left(\sqrt{2}\right) + \cos\left(\sqrt{2}\right)\right]}{4\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Trovare la regione di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{k-1}}{k^2\,3^k}\,.$$

Si verifichi che in tale regione la convergenza è uniforme.

. . . .

Soluzione
Con la sostituzione $w = z + 2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^{k-1}}{k^2\, 3^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)^2\, 3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \,,$$

il raggio di convergenza R si ottiene usando la formula di Cauchy-Hadamard per l'inverso

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-2/n}\ 3^{-1-1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-2\ln(n+1)/n}\, 3^{-1-1/n} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

La serie converge quando

$$|w| < R = 3 \quad \Rightarrow \quad |z+2| < 3\,,$$

ovvero converge nel cerchio di raggio 3 e centro $z = -2$.

. . . .

Esercizio 4 (5 punti)
Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = e^{-|x|}\cos(ax)\,,$$

con a reale.

. . . .

Soluzione

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1 + a^2 + k^2}{(1 + a^2 + k^2)^2 - 4a^2k^2}$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Risolvere l'equazione integrale

$$f(x) = \alpha \int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y) dy + \sin(x)\,.$$

. . . .

Soluzione
Il kernel è separabile infatti

$$f(x) = \alpha \int_0^{2\pi} \left[\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\right] f(y) dy + \sin(x)\,,$$

poniamo

$$\begin{array}{ll} M_1(x) = \sin(x) & N_1(y) = \cos(y) \\ M_2(x) = \cos(x) & N_2(y) = \sin(y) \end{array} .$$

Calcoliamo gli elementi della matrice e dei vettori:

$$C_i = \int_0^{2\pi} N_i(x) f(x) dx\,, \quad i = 1, 2\,,$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \int_0^{2\pi} N_1(x) M_1(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin(x) dx = 0 \\
A_{12} &= \int_0^{2\pi} N_1(x) M_2(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx = \pi \\
A_{21} &= \int_0^{2\pi} N_2(x) M_1(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi \\
A_{22} &= \int_0^{2\pi} N_1(x) M_1(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x) dx = 0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int_0^{2\pi} N_1(x) \sin(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin(x) dx = 0 \\
B_2 &= \int_0^{2\pi} N_2(x) \sin(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi\,.
\end{aligned}$$

L'equazione integrale diventa

$$\begin{aligned}
&C = \alpha A C + B \\
&(I - \alpha A) C = B\,,
\end{aligned}$$

si ha soluzione per

$$\det(I - \alpha A) \neq 0\,.$$

La suddetta condizione equivale a

$$\det(I - \alpha A) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\alpha\pi \\ -\alpha\pi & 1 \end{pmatrix} = 1 - (\pi\alpha)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq \pm\frac{1}{\pi}\,.$$

La soluzione del sistemaè il vettore 2×1 di componenti

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\pi \\ \pi & 1 \end{pmatrix}}{1 - (\pi\alpha)^2} = \frac{\alpha\pi^2}{1 - (\pi\alpha)^2} \\
C_2 &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha\pi & \pi \end{pmatrix}}{1 - (\pi\alpha)^2} = \frac{\pi}{1 - (\pi\alpha)^2}\,,
\end{aligned}$$

da cui si ottiene la funzione $f(x)$ come

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\left[C_1\sin(x)+C_2\cos(x)\right]+\sin(x) \\ &= \frac{1}{1-(\alpha\pi)^2}\left[(\alpha\pi)^2\sin(x)+\alpha\pi\cos(x)+\sin(x)-(\alpha\pi)^2\sin(x)\right] \\ &= \frac{1}{1-(\alpha\pi)^2}\left[\alpha\pi\cos(x)+\sin(x)\right]\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Dati i due vettori

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\end{pmatrix}\,,\qquad u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ i\end{pmatrix}\,,$$

del sistema ortonormale $\{u_i\}_{i=1}^3$, si determini u_3, sapendo che la sua terza componente è uguale ad 1. Si ottenga quindi la matrice B, 3×3, che ha gli u_k come autovettori di autovalori $\beta_k=k$, con $k=1,2,3$ e la si classifichi.

. . . .

Soluzione
Posto

$$u_3=\frac{1}{\sqrt{|a|^2+|b|^2+1}}\begin{pmatrix}a\\ b\\ 1\end{pmatrix}\,,$$

richiediamo $u_1^\dagger u_3=u_2^\dagger u_3=0$, quindi

$$\begin{aligned} u_1^\dagger u_3 &= \frac{1}{\sqrt{3(|a|^2+|b|^2+1)}}(a-i\,b+i)=0 \\ u_2^\dagger u_3 &= \frac{1}{\sqrt{2(|a|^2+|b|^2+1)}}(a-i)=0 \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} a &= i \\ b &= 2\,, \end{aligned}$$

quindi

$$u_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}i\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\,.$$

Si definisce allora la matrice unitaria

$$U=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6}\\ i/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ -i/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\,,$$

la matrice B è

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{6} \\ i/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}^{\dagger} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & 4i & -i \\ -4i & 14 & 4 \\ i & 4 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ed è hermitiana.