Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 6 ottobre 2011

Esercizio 1 (6 punti)
Si usi il metodo dei residui per calcolare l'integrale

$$J = \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z^2+4)^2 \sin^3(1/z)} \,,$$

con il cammino d'integrazione percorso in senso antiorario.

. . . .

Le singolarità dell'integranda sono: per la parte $1/\sin^3(1/z)$, i poli isolati $z_k = (k\pi)^{-1}$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ e la singolarità non isolata in $z = 0$; per la parte $1/(z^2+4)^2$ invece, $p_\pm = \pm 2i$. Il polo z_k più lontano dall'origine è $z_1 = 1/\pi$ che giace dentro il cerchio unitario, quindi tutti i poli z_k sono nel cerchio unitario. I due poli $p_\pm$ sono invece fuori essendo $|p_\pm| = 2 > 1$. Possiamo quindi risolvere l'integrale come

$$J = -2i\pi \Big[\text{Res}\,(f(z), \infty) + \text{Res}\,(f(z), p_+) + \text{Res}\,(f(z), p_+) \Big] \,,$$

dove il segno meno è dovuto alla direzione di percorrenza del cammino d'integrazione.
Cominciamo con

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f(z), \infty) &= -\text{Res}\left(\frac{1}{t^2} f(1/t), 0 \right) = -\text{Res}\left(\frac{1}{t^2} \frac{1}{(1/t^2+4)^2 \sin^3(t)}, 0 \right) \\
&= -\text{Res}\left(\frac{t^2}{(1+4t^2)^2 \sin^3(t)}, 0 \right) = -\lim_{t\to 0} \frac{t^3}{(1+4t^2)^2 \sin^3(t)} = -1 \,.
\end{aligned}$$

Il residuo in $z = p_+$ sarà:

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f(z), p_+) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{dz}{(z^2+4)^2 \sin^3(1/z)} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{dz}{(z+2i)^2 (z-2i)^2 \sin^3(1/z)} \\
&= \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+2i)^2 \sin^3(1/z)} \Bigg|_{z=2i} \\
&= \left[\frac{-2}{(z+2i)^3 \sin^3(1/z)} + \frac{-3\cos(1/z)(-1/z^2)}{(z+2i)^2 \sin^4(1/z)} \right]_{z=2i} \\
&= \left[\frac{-2}{(4i)^3 \sin^3(-i/2)} + \frac{-3\cos(-i/2)(1/4)}{(4i)^2 \sin^4(-i/2)} \right] \\
&= \left[\frac{-2}{(4i)^3 [-i\sinh(1/2)]^3} + \frac{-3\cosh(1/2)(1/4)}{(4i)^2 [-i\sinh(1/2)]^4} \right] \\
&= \left[\frac{-2}{4^3 \sinh^3(1/2)} + \frac{3\cosh(1/2)}{4^3 \sinh^4(1/2)} \right] \\
&= \frac{1}{4^3 \sinh^3(1/2)} \left[-2 + 3\coth(1/2) \right] \,.
\end{aligned}$$

Il residuo in $z = p_-$ ha lo stesso valore infatti

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,(f(z), p_-) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_-}\frac{dz}{(z^2+4)^2\sin^3(1/z)} \\
&= \left[\frac{-2}{(z-2i)^3\sin^3(1/z)} + \frac{-3\cos(1/z)(-1/z^2)}{(z-2i)^2\sin^4(1/z)}\right]_{z=-2i} \\
&= \left[\frac{-2}{(-4i)^3\sin^3(i/2)} + \frac{-3\cos(i/2)(1/4)}{(-4i)^2\sin^4(i/2)}\right] \\
&= \left[\frac{-2}{(4i)^3\sin^3(-i/2)} + \frac{-3\cos(-i/2)(1/4)}{(4i)^2\sin^4(-i/2)}\right] \\
&= \frac{1}{4^3\sinh^3(1/2)}\left[-2+3\coth(1/2)\right]\,.
\end{aligned}
$$

Quindi il valore dell'integrale è

$$
\begin{aligned}
J &= -2i\pi\left\{-1+\frac{2}{4^3\sinh^3(1/2)}\Big[-2+3\coth(1/2)\Big]\right\} \\
&= 2i\pi\left\{1+\frac{1}{32\sinh^3(1/2)}\Big[2-3\coth(1/2)\Big]\right\}\,.
\end{aligned}
$$

. . . .

Esercizio 2 (5 punti)
Si consideri la funzione reale a due variabili reali

$$
r(x,y) = x^2 - y^2 + e^x\cos(y)\,,
$$

- si dimostri che tale funzione è armonica;
- si trovi la funzione reale a due variabili reali $t(x,y)$ tale che

  $$
  f(z) = r(x,y) + i\,t(x,y)\,,
  $$

  sia una funzione analitica nella variabile complessa $z = x + iy$.

. . . .

Per dimostrare l'armonicità si verifica l'equazione di Laplace. Calcolo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{\partial r}{\partial x}\big[2x+e^x\cos(y)\big] \\
&= 2+e^x\cos(y) \\
\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{\partial r}{\partial y}\big[-2y-e^x\sin(y)\big] \\
&= -2-e^x\cos(y)
\end{aligned}
$$

da cui

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) r(x,y)=0,.$$

La precedente implica l'esistenza del differenziale totale che in termini delle relazioni di analiticità di Cauchy-Riemann è

$$\begin{aligned} dt=\frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy &= -\frac{\partial r}{\partial y}dx+\frac{\partial r}{\partial x}dy \\ & \qquad \big[2y+e^x\sin(y)\big]\,dx+\big[2x+e^x\cos(y)\big]\,dy \end{aligned}$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\begin{aligned} t(x,y)-t(x_0,y_0) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dt = -\int_{x_0}^{x}\frac{\partial r}{\partial y}(x',y_0)dx'+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial r}{\partial x}(x,y')dy' \\ &= \int_{x_0}^{x}\big[2y_0+e^{x'}\sin(y_0)\big]\,dx'+\int_{y_0}^{y}\big[2x+e^x\cos(y')\big]\,dy \\ &= \Big[2y_0(x-x_0)+\big(e^x-e^{x_0}\big)\sin(y_0)\Big]+\Big[2x(y-y_0)+e^x\big(\sin(y)-\sin(y_0)\big)\Big] \\ &= 2xy+e^x\sin(y)-2y_0x_0-e^{x_0}\sin(y_0)\,. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi la funzione $f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= r(x,y)+it(x,y)=x^2-y^2+2ixy+e^x\Big[\cos(y)+i\sin(y)\Big] \\ &= (x+iy)^2+e^x\,e^{iy}=(x+iy)^2+e^{x+iy}=z^2+e^z\,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Si consideri l'operatore $\hat{S}$ nello spazio $L^2_1(-a,a)$ (funzioni a quadrato sommabili nell'intervallo simmetrico $[-a,a]$), definito da

$$\hat{S}f(x)=p\,f(x)+d\,f(-x)$$

dove p e d sono due numeri complessi generici con $p,d\neq 0$.

- Si trovino le autofunzioni e gli autovalori di $\hat{S}$.
- Sia
$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\exp\left(\frac{i\,n\,\pi\,x}{a}\right)\,,$$
si trovi la rappresentazione matriciale S (2×2) di $\hat{S}$ rispetto a $\{f_{-k},f_k\}$ dove k è un numero naturale fissato e non nullo.
- Si determinino gli autovettori di S.

. . . .

È facile vedere che le funzioni pari e dispari sono autofunzioni con autovalori $\lambda_1 = p + d$ e $\lambda_2 = p - d$ rispettivamente.
Gli elementi di matrice che stiamo cercando sono

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= (f_{-k}, \hat{S} f_{-k})\,, \quad S_{1,2} = (f_{-k}, \hat{S} f_k)\,, \\ S_{2,1} &= (f_k, \hat{S} f_{-k})\,, \quad\ \ S_{2,2} = (f_k, \hat{S} f_k)\,. \end{aligned}$$

Si ha che

$$\begin{aligned} (f_{-k}, \hat{S} f_{-k}) &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{ik\pi x/a}\big[p\, e^{-ik\pi x/a} + d\, e^{ik\pi x/a}\big]dx \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\big[p + d\, e^{2ik\pi x/a}\big]dx = p \\ (f_{-k}, \hat{S} f_k) &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{ik\pi x/a}\big[p\, e^{ik\pi x/a} + d\, e^{-ik\pi x/a}\big]dx \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\big[p\, e^{2ik\pi x/a} + d\big]dx = d \\ (f_k, \hat{S} f_{-k}) &= d \\ (f_k, \hat{S} f_k) &= p\,, \end{aligned}$$

quindi

$$S = \begin{pmatrix} p & d \\ d & p \end{pmatrix}\,.$$

L'equazione caratteristica è:

$$(p - \lambda)^2 - d^2 = 0\,,$$

da cui si ha infatti

$$\lambda_{1,2} = p \pm d\,.$$

Gli autovettori sono

$$\begin{pmatrix} p & d \\ d & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = (p \pm d)\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

da cui le equazioni

$$\begin{aligned} &1) \quad p + \alpha d = p + d \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 1 \\ &2) \quad d + \alpha p = \alpha(p - d) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -1\,. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$J = \int_\gamma \frac{z\, dz}{4z^4 + 1}$$

dove γ è il cammino definito da

$$\gamma = \{z = x + iy : x \in [0,1], y = 1 - x^2\}\,,$$

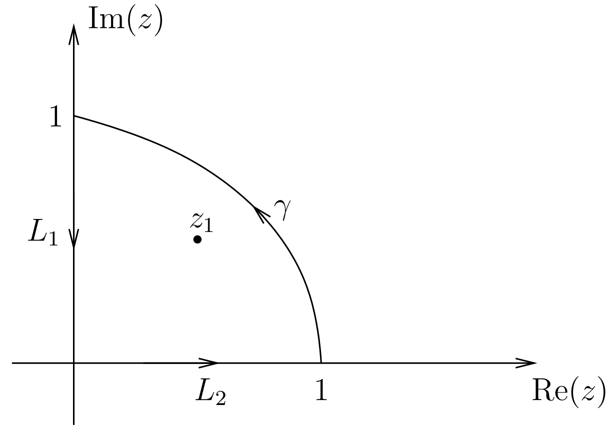
e percorso da $z = 1$ a $z = i$.

. . . .

L'integranda ha i quattro poli semplici

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[i(2k-1)\frac{\pi}{4}\right]\,, \qquad k = 1,2,3,4\,.$$

Possiamo considerare il cammino fatto da due segmenti L_1 e L_2 che chiude un percorso chiuso mostrato in figura, che contiene un il polo $z_1 = e^{i\pi/4}/\sqrt{2}$



Dal teorema di Cauchy si ha

$$\oint_{y+L_1+L_2} f(z)dz = 2i\pi \lim_{z\to z_1} f(z)(z-z_1) = \int_y f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz\,,$$

dove $f(z) = z/(4z^4+1)$.
Calcoliamo il valore nella singolarità

$$\begin{aligned}
\oint_{y+L_1+L_2} f(z)dz &= 2i\pi \frac{1}{4} \frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \\
&= \frac{i\pi}{2} \frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \\
&= i\pi \frac{e^{i\pi/4}}{(e^{i\pi/4}-e^{3i\pi/4})(e^{i\pi/4}-e^{5i\pi/4})(e^{i\pi/4}-e^{7i\pi/4})} \\
&= i\pi \frac{e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/2}(e^{-i\pi/4}-e^{i\pi/4})e^{3i\pi/4}(e^{-2i\pi/4}-e^{2i\pi/4})e^{i\pi}(e^{-3i\pi/4}-e^{3i\pi/4})} \\
&= i\pi \frac{1}{(e^{-i\pi/4}-e^{i\pi/4})(e^{-2i\pi/4}-e^{2i\pi/4})(e^{-3i\pi/4}-e^{3i\pi/4})} \\
&= i\pi \frac{1}{(-2i)^3 \sin(\pi/4)\sin(\pi/2)\sin(3\pi/4)} \\
&= \pi \frac{1}{8(\sqrt{2}/2)^2} = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

L'integrale so L_1 è:

$$\int_{L_1} f(z)d = \{x=0,\, z=iy\} = \int_1^0 \frac{-ydy}{4y^4+1} = \{t=2y^2,\, dt=4ydy\} = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{4}\text{atan}(2)\,,$$

quello su L_2

$$\int_{L_2} f(z)d = \{y=0,\, z=x\} = \int_0^1 \frac{xdx}{4x^4+1} = \frac{1}{4}\text{atan}(2)\,.$$

Usando le relazione precedente si ottiene:

$$\int_\gamma \frac{zdz}{4z^4+1} = \frac{1}{4}\big[\pi - 2\text{atan}(2)\big].$$

....

Esercizio 5 (5 punti)
Si calcoli la serie di Laurent intorno al punto $z_0 = -2i$ della funzione

$$g(z) = \frac{1}{4+z^2}$$

negli anelli $0 < |z+2i| < 4$ e $4 < |z+2i| < \infty$.

....

Nel primo anello $0 < |z+2i| < 4$ possiamo porre

$$g(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(z+2i)(z+2i-4i)} = \frac{-1}{4i(z+2i)\left(1-\frac{z+2i}{4i}\right)}$$

essendo

$$0 < \left|\frac{z+2i}{4i}\right| = \frac{|z+2i|}{4} < 1\,,$$

dalla precedente si ha

$$g(z) = \frac{-1}{4i(z+2i)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{4i}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^{k-1}}{(4i)^{k+1}} = -\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{(z+2i)^k}{(4i)^{k+2}}\,.$$

Nel secondo anello $4 < |z+2i| < \infty$

$$g(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(z+2i)(z+2i-4i)} = \frac{1}{(z+2i)^2\left(1-\frac{4i}{z+2i}\right)}\,,$$

essendo ora

$$0 < \left|\frac{4i}{z+2i}\right| = \frac{4}{|z+2i|} < 1\,,$$

si ottiene

$$g(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4i}{z+2i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4i)^k}{(z+2i)^{k+2}} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(4i)^{k-2}}{(z+2i)^k}\,.$$

. . . .

Esercizio 6 (5 punti)
Con il metodo delle trasformate di Fourier si risolva l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2} f(t)dt = Ae^{-x^2/\alpha^2}$$

con A e α reali. Per quali valori di α la soluzione esiste?

. . . .

Il primo membro è la convoluzione di una gaussiana e di f quindi la trasformata di Fourier può essere scritta come

$$\begin{aligned} \text{LHS} = \mathcal{F}_k\left[e^{-x^2} * f(x)\right] &= \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}_k\left[e^{-x^2}\right]\tilde{f}(k) \\ &= \sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}\tilde{f}(k) \\ &= \sqrt{\pi}\;e^{-k^2/4}\tilde{f}(k)\,. \end{aligned}$$

Per il secondo membro si ha

$$\text{RHS} = A\,\mathcal{F}_k\left[e^{-x^2/\alpha^2}\right] = \frac{A\,|\alpha|}{\sqrt{2}}e^{-k^2\alpha^2/4}\,,$$

uguagliando si ottiene la trasformata della soluzione come

$$\tilde{f}(k) = \frac{A\,|\alpha|}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{4}(\alpha^2-1)}\,.$$

È facile vedere che condizione per cui esista una soluzione di questa forma è: $\alpha^2 + 1 > 0 \Rightarrow |\alpha| > 1$.
Facendo l'antitrasformata si ottiene la soluzione

$$\begin{aligned} f(x) = &\ \frac{A\,|\alpha|}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-\frac{k^2}{4}(\alpha^2-1)}\right] \\ = &\ \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{|\alpha|}{\sqrt{2(\alpha^2-1)/4}}e^{-x^2/(\alpha^2-1)} \\ = &\ \frac{A}{\sqrt{\pi}}\frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2-1}}e^{-x^2/(\alpha^2-1)}\,. \end{aligned}$$