Metodi Matematici per la Fisica

Secondo appello invernale - 6 febbraio 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 7/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mathfrak{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(v^2+1)(v^2+2)^m}\,,$$

con $m \in N$.

Curiosità. Il simbolo $\mathfrak{a}$, traslitterato con la lettera "a", è un carattere dell'alfabeto degli alieni denominati *Visitors* protagonisti della serie televisiva di fantascienza "*V - Visitors*". Scritta e diretta da Kenneth Johnson è stata trasmessa nel 1983 negli Stati Uniti e nel 1984 in Italia. Nel 2009 è stato fatto un *remake*, nel quale appare la versione aggiornata dell'alfabeto alieno, che qui utilizziamo.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è meromorfa, ha singolarità polari negli zeri del polinomio di grado $2(m+1)$ a denominatore, ovvero:

$$z_{1,2} = \pm i\,, \qquad z_{3,4} = \pm i\sqrt{2}\,,$$

i primi due sono semplici, mentre z_3 e z_4 hanno entrambi molteplicità m.
Riscriviamo la funzione integranda come:

$$\frac{1}{(v^2+1)(v^2+2)^m} = \frac{1}{(v^2+2-1)(v^2+2)^m} = \frac{1}{(1-1/(v^2+2))(v^2+2)^{m+1}} = \left\{w = \frac{1}{v^2+2}\right\} = \frac{w^{m+1}}{1-w}\,.$$

Usiamo la somma parziale m-esima della serie geometrica di ragione w,

$$\sum_{j=0}^{m} w^j = 1 + w + w^2 + \cdots + w^m = \frac{1-w^{m+1}}{1-w}$$

da cui, per la funzione integranda si ha

$$\frac{1}{(v^2+1)(v^2+2)^m} = \frac{w^{m+1}}{1-w} = \frac{1}{1-w} - 1 - w - w^2 + \cdots - w^m = \frac{1}{1-w} - \sum_{j=0}^{m} w^j = \frac{1}{1-w} - 1 - \sum_{j=1}^{m} w^j$$
$$= \frac{w}{1-w} - \sum_{j=1}^{m} w^j = \frac{1}{1/w-1} - \sum_{j=1}^{m} w^j = \frac{1}{v^2+1} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(v^2+2)^j}\,.$$

L'integrale è anch'esso scomposto nella somma

$$\mathfrak{a} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v^2+1} - \sum_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(v^2+2)^j}\,.$$

Il primo può essere calcolato, sia integrando direttamente, la primitiva della funzione integranda è la funzione arcotangente e si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v^2+1} = \arctan(v)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi\,,$$

ovvero usando il lemma di Jordan e il teorema dei residui. Possiamo "chiudere" il percorso indifferentemente nel semipiano della parti immaginarie positive o negative. Chiudendo nel semipiano superiore, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v^2+1} = 2i\pi\ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+1}, i\right] = 2i\pi \frac{1}{2z}\Big|_{z=i} = \pi\,.$$

Usiamo questa seconda procedura per gli integrali della somma, il j-esimo, con $j \in \{1,2,\dots,m\}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(v^2+2)^j} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\left(v-i\sqrt{2}\right)^j\left(v+i\sqrt{2}\right)^j} = \frac{2i\pi}{(j-1)!}\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\frac{1}{\left(z+i\sqrt{2}\right)^j}\Bigg|_{z=i\sqrt{2}}\,.$$

La derivata n-esima, con $n \in \mathbb{N}$, vale

$$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{\left(z+i\sqrt{2}\right)^j} = (-1)^n j(j+1)\cdots(j+n-1)\left(z+i\sqrt{2}\right)^{-j-n}\,,$$

quindi, con $n = j-1$, e in $z = i\sqrt{2}$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\frac{1}{\left(z+i\sqrt{2}\right)^j}\Bigg|_{z=i\sqrt{2}} &= (-1)^{j-1} j(j+1)\cdots(2j-2)\left(2i\sqrt{2}\right)^{-2j+1}\\
&= (-1)^{j-1} j(j+1)\cdots(2j-2)\underbrace{(i)^{-2j+1}}_{=i(-1)^j}\left(2^{3/2}\right)^{-2j+1}\\
&= -i\, j(j+1)\cdots(2j-2)\,2^{-3j+3/2}\\
&= -i\,\frac{(2j-2)!}{(j-1)!}\,2^{-3j+3/2}\,,
\end{aligned}$$

l'ultima espressione si è ottenuta moltiplicando numeratore e denominatore per $(j-1)!$. Il j-esimo integrale della somma, con $j \in \{1,2,\dots,m\}$, vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(v^2+2)^j} = \pi 2^{5/2}\frac{(2j-2)!}{((j-1)!)^2}\,2^{-3j} = 4\sqrt{2}\pi\frac{(2j-2)!}{((j-1)!)^2}\,2^{-3j}\,.$$

Infine, per l'integrale richiesto otteniamo

$$⊂\!: = \pi\left(1 - 4\sqrt{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{(2j-2)!}{((j-1)!)^2}\,2^{-3j}\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{Ѫ} = \int_{\left|\exp\left(i\frac{2z-1-i}{1-i}\right)\right|=1} \frac{dz}{z^4-z^2-6}\,,$$

orientando il percorso d'integrazione in modo tale che il verso positivo sia quello in cui le parti reali dei punti che lo costituiscono siano crescenti.

Curiosità. Il simbolo Ѫ appartiene all'alfabeto dei *Visitors* ed è traslitterato con la lettera "b".

Soluzione del secondo problema

Il percorso è il luogo geometrico dei punti z del piano complesso che verificano la condizione

$$\left|\exp\left(i\,\frac{2z-1-i}{1-i}\right)\right| = 1\,.$$

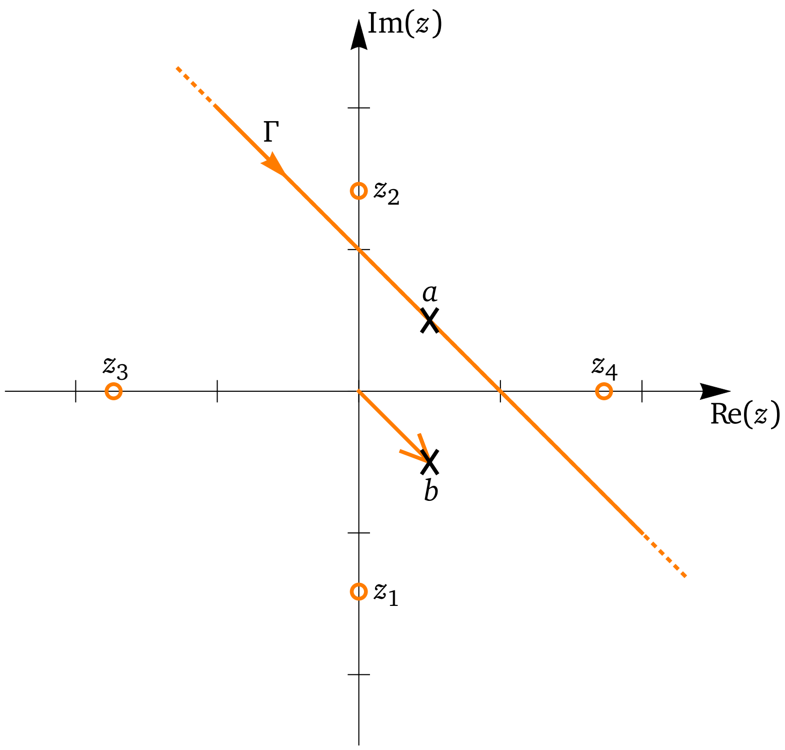
Poiché il modulo dall'esponenziale è l'esponenziale della parte reale e la parte reale di un numero complesso moltiplica per l'unità immaginaria è l'opposto della sua parte immaginaria, si ha

$$1 = \left|\exp\left(i\,\frac{2z-1-i}{1-i}\right)\right| = \exp\left(\mathrm{Re}\left(i\,\frac{2z-1-i}{1-i}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{Im}\left(\frac{2z-1-i}{1-i}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\left(\frac{2z-1-i}{1-i}\right) = 0\,.$$

Delle infinite determinazione dell'unità, $1 = e^{2ik\pi}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, è da considerare solo quella con $k = 0$, perché l'esponente è reale.
Definendo i due numeri complessi $a = (1+i)/2$ e $b = (1-i)/2$, il percorso d'integrazione è

$$\Gamma = \left\{ z : \mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0 \right\}\,,$$

è la retta, rappresenta in figura, passante per il punto a e avente come direzione quella del punto b, ovvero parallela al vettore con punto di applicazione nell'origine del piano complesso ed estremo libero in b. Il verso positivo, seguendo quanto sancito dal testo del problema, è quello in cui la si percorre andando da sinistra verso destra, come indicato in figura.



La funzione integranda è meromorfa ha i quattro poli semplici:

$$z_{1,2} = \mp i\sqrt{2}\,, \qquad z_{3,4} = \mp\sqrt{3}\,,$$

indicati con circonferenze arcioni in figura, corrispondenti agli zeri semplici del polinomio a denominatore. Applichiamo il lemma di Jordan per chiudere il percorso con una semicirconferenza avente per diametro un segmento della retta Γ e usiamo il teorema dei residui. Possiamo scegliere indifferentemente tra le due possibilità, chiudiamo con la semicirconferenza che ha la porzione maggiore nel primo quadrante. Il percorso chiuso così definito avvolge, nel limite in cui il raggio della semicirconferenza diverge, i due poli semplici $z_2 = i\sqrt{2}$ e $z_4 = \sqrt{3}$, quindi, l'integrale vale

$$\text{ㅈ} = 2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4-z^2-6}, i\sqrt{2}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^4-z^2-6}, \sqrt{3}\right]\right) = 2i\pi\left(\left.\frac{1}{2z(2z^2-1)}\right|_{i\sqrt{2}} + \left.\frac{1}{2z(2z^2-1)}\right|_{\sqrt{3}}\right)$$
$$= 2i\pi\left(-\frac{1}{10i\sqrt{2}} + \frac{1}{10\sqrt{3}}\right),$$

con le opportune semplificazioni si arriva alla soluzione

$$\text{ㅈ} = \frac{\pi}{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{3}}\right).$$

Terzo problema (punteggio massimo: 5/30)

Dopo aver definito il dominio di convergenza nel piano complesso della variabile z degli integrali

$$\text{Ⴎ}_n(z) = \int_0^\infty \alpha^n z^\alpha d\alpha,$$

con $n \in \mathbb{N}$, si ottenga l'espressione analitica dell'n-esima funzione $\text{Ⴎ}_n(z)$.
Curiosità. Il simbolo Ⴎ appartiene all'alfabeto dei *Visitors* ed è traslitterato con la lettera "A".

Soluzione del terzo problema

La funzione integranda può essere posta nella forma

$$\alpha^n z^\alpha = \alpha^n e^{\alpha \ln(z)},$$

poiché $n \in \mathbb{N}$, ovvero $n \geq 1$, la funzione è integrabile nel limite $\alpha \to 0^+$, infatti si ha

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^n e^{\alpha \ln(z)} = 0, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

All'estremo superiore dell'intervallo d'integrazione, ovvero nel limite $\alpha \to \infty$, il modulo della funzione integranda si comporta come

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left|\alpha^n e^{\alpha \ln(z)}\right| = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^n e^{\alpha \ln|z|} \begin{cases} 0 & \ln|z| < 0 \\ \infty & \ln|z| \geq 0 \end{cases},$$

la convergenza a zero per $\ln|z| < 0$ è di tipo esponenziale e quindi integrabile. Ne consegue che il dominio di convergenza è l'insieme

$$D = \{z : \ln|z| < 0\} = \{z : |z| < 1\},$$

ovvero il disco unitario.
Possiamo integrare per parti. Per un generico valore di $z \in D$, integriamo l'esponenziale e deriviamo la potenza

$$\text{Ⴎ}_n(z) = \left.\frac{\alpha^n e^{\alpha \ln(z)}}{\ln(z)}\right|_0^\infty - \frac{n}{\ln(z)}\int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{\alpha\ln(z)} d\alpha = -\frac{n}{\ln(z)}\int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{\alpha\ln(z)} d\alpha,$$

dove l'annullamento del primo termine all'estremo inferiore è dato dalla potenza α^n, a quello superiore all'esponenziale, essendo negativa la parte reale del coefficiente di α ad esponente, cioè $\operatorname{Re}(\ln(z)) = \operatorname{Re}(\ln|z| + i\arg(z)) = \ln|z| < 0$. All'$(n-1)$-esima integrazione

$$\text{Ⴎ}_n(z) = (-1)^{n-1}\left.\frac{n(n-1)\cdots 2\,\alpha e^{\alpha\ln(z)}}{\ln^n(z)}\right|_0^\infty + (-1)^n \frac{n!}{\ln^n(z)}\int_0^\infty e^{\alpha\ln(z)} d\alpha$$
$$= (-1)^n \frac{n!}{\ln^n(z)}\int_0^\infty e^{\alpha\ln(z)} d\alpha = (-1)^n \frac{n!}{\ln^n(z)} \left.\frac{e^{\alpha\ln(z)}}{\ln(z)}\right|_0^\infty = (-1)^n \frac{n!}{\ln^{n+1}(z)}(0-1),$$

Il dominio di convergenza è il disco unitario $\{z : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$. La funzione è

$$\text{Ⴎ}_n(z) = (-1)^{n+1}\frac{n!}{\ln^{n+1}(z)}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 5/30)

Sia $\hat{B}$ un operatore diagonalizzabile definito nello spazio di Hilbert C_N a $N \in \mathbb{N}$ dimensioni, si dimostri che la serie operatoriale

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \hat{B}^k$$

non converge se $\lambda^{-1} \in \sigma_d\left(\hat{B}\right)$, dove $\sigma_d\left(\hat{B}\right)$ è lo spettro discreto dell'operatore $\hat{B}$.

Soluzione del quarto problema

Possiamo utilizzare due procedure che chiameremo metodo matriciale e metodo operatoriale.
Il metodo matriciale consiste nell'utilizzo della matrice diagonale che rappresenta l'operatore rispetto alla base degli autovettori, cioè

$$\hat{B} \overset{b}{\hookleftarrow} B = \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N),$$

dove $\sigma_b\left(\hat{B}\right) = \left\{\beta_j\right\}_{j=1}^{N}$ è lo spettro discreto e quindi l'insieme degli autovalori dell'operatore e $\left\{|b_j\rangle\right\}_{j=1}^{N}$ è l'insieme degli autovettori. Si hanno, cioè, le equazioni agli autovalori

$$\hat{B}|b_j\rangle = \beta_j |b_j\rangle, \qquad j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

La serie operatoriale è rappresentata da una serie matriciale,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \hat{B}^k \overset{b}{\hookleftarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k B^k = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^k \beta_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^k \beta_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^k \beta_N^k \end{pmatrix}.$$

Sulla diagonale ci sono N serie geometriche, ls j-esima ha ragione $\lambda\beta_j$, con $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Affinché la serie matriciale converga è necessario che le N serie geometriche convergano contemporaneamente, ovvero che si abbiano le N limitazioni

$$\left|\lambda\beta_j\right| = |\lambda|\left|\beta_j\right| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |\lambda|^{-1} = \left|\lambda^{-1}\right| > \left|\beta_j\right|, \qquad \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

L'ultima disuguaglianza implica che la serie converge se l'inverso di λ è diverso da ogni autovalore, ovvero converge per valori di λ^{-1} non appartenenti allo spettro discreto dell'operatore $\hat{B}$. Questo significa che se, invece, λ^{-1} appartenesse allo spettro discreto, ovvero coincidesse con uno degli autovalorli, ad esempio l'l-esimo, cioè $\lambda^{-1} = \beta_l$, con $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$, allora la serie che rappresenta l'l-esimo elemento diagonale della matrice B,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \beta_l^j = \sum_{j=0}^{\infty} 1,$$

sarebbe divergente, in quanto somma di infinite unità, quindi la stessa matrice, avendo almeno un elemento divergente, non esisterebbe.
Dimostriamo la stessa affermazione con il metodo operatoriale. In questo caso è sufficiente osservare che se la serie operatoriale convergesse, la somma sarebbe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^k \hat{B}^k = \left(\hat{I} - \lambda\hat{B}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\left(\hat{I}\lambda^{-1} - \hat{B}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\hat{B}_{\lambda^{-1}},$$

dove abbiamo indicato con $\hat{B}_\eta$ l'operatore risolvente dell'operatore $\hat{B}$, che dipende dal parametro scalare $\eta \in \mathbb{C}$, definito, appunto, come

$$\hat{B}_\eta = \left(\eta\hat{I} - \hat{B}\right)^{-1}.$$

D'altro canto, lo spettro discreto dell'operatore $\hat{B}$ è, a sua volta, definito come l'insieme dei valori di $\eta \in \mathbb{C}$ per i quali l'operatore risolvente non esiste. Ne consegue che la somma della serie, che è proporzionale all'operatore risolvente in λ^{-1} non esiste e quindi la stessa non converge, se λ^{-1} appartiene allo spettro discreto. Abbiamo così dimostrato quanto richiesto dal problema.

Quinto problema (punteggio massimo: 5/30)

Si dimostri che ogni operatore lineare definito in uno spazio di Hilbert H_N a dimensione finita $N \in \mathbb{N}$ è compatto.

Auxilium. Potrebbe essere utile l'equivalenza tra la compattezza di un operatore e la sua capacità di trasformare successioni debolmente convergenti in convergenti.

Soluzione del quinto problema

Sfruttiamo il teorema asserente che un operatore è compatto se e solo se trasforma successioni debolmente convergenti in successioni convergenti. Consideriamo la generica successione $\{|x_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset H_N$ debolmente convergente al vettore $|x\rangle \in H_N$, si ha che, $\forall\, \langle y| \in H_N^*$,

$$\lim_{k\to\infty} \langle y|x_k\rangle = \langle y|x\rangle\,.$$

Sia $\hat{A}$ un generico operatore lineare definito nello spazio vettoriale H_N, indichiamo con A la matrice $N \times N$ che lo rappresenta rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N} \subset H_N$. Ovvero $\hat{A} \overset{e}{\hookleftarrow} A$ e l'elemento della k-esima riga e j-esima colonna è

$$A^k_j = \langle e_k|\hat{A}|e_j\rangle\,, \qquad k, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Consideriamo il limite della successione $\left\{\hat{A}|x_k\rangle\right\}_{k=1}^{\infty}$, ottenuta applicando l'operatore lineare $\hat{A}$ sui vettori della successione debolmente convergente, usando la relazione di completezza $\sum_{j=1}^{N} |e_j\rangle\langle e_j| = \hat{I}$, si ha

$$\lim_{k\to\infty} \hat{A}|x_k\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \hat{A}|e_j\rangle\langle e_j|x_k\rangle = \sum_{j=1}^{N} \hat{A}|e_j\rangle \lim_{k\to\infty} \langle e_j|x_k\rangle = \sum_{j=1}^{N} \hat{A}|e_j\rangle\langle e_j|x\rangle = |x\rangle\,,$$

nella penultima identità abbiamo usato le convergenza debole della successione rispetto al j-esimo vettore della base, nell'ultima ancora la relazione di completezza. Abbiamo dimostrato che, data una generica successione $\{|x_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ debolmente convergente al vettore $|x\rangle$, la successione $\left\{\hat{A}|x_k\rangle\right\}_{k=1}^{\infty}$ converge al vettore $\hat{A}|x\rangle$, quindi l'operatore $\hat{A}$ è compatto.

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Sia $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormale dello spazio di Hilbert separabile H. Si calcoli il limite

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \hat{I} - \sum_{k=1}^{N} |u_k\rangle\langle u_k| \right\|\,,$$

con $N \in \mathbb{N}$ e dove $\hat{I}$ è l'operatore identità, dimostrando, quindi, che non è uguale a zero.

Soluzione del sesto Problema

Si ha la relazione di completezza della base ortonormale

$$\hat{I} = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k\rangle\langle u_k|\,.$$

Infatti, $\forall\, |x\rangle \in H$ si ha

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x^k |u_k\rangle\,,$$

dove x^k è la k-esima componente contro-variante del vettore $|x\rangle$ rispetto alla base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ ed è dato dal prodotto scalare

$$x^k = \langle u_k|x\rangle\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Usando questa definizione dei coefficienti, la scomposizione del vettore $|x\rangle$ diventa

$$|x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k|x\rangle |u_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k\rangle\langle u_k|x\rangle = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k\rangle\langle u_k|\right)|x\rangle \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u_k\rangle\langle u_k| = \hat{I}\,,$$

si arriva così alle relazione di completezza. L'operatore di cui si chiede il limite può essere scritto come

$$\hat{I} - \sum_{k=1}^{N} |u_k\rangle\langle u_k| = \sum_{j=1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j| - \sum_{k=1}^{N} |u_k\rangle\langle u_k| = \sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|\,.$$

Ne consegue che la norma cercata e minore o uguale all'unità, infatti

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|\right\| &= \sup_{\|x\|=1}\left\{\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|x\rangle\right\|\right\} = \sup_{\|x\|=1}\left\{\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} x^j|u_j\rangle\right\|\right\} \\ &= \sup_{\|x\|=1}\left\{\sqrt{\sum_{j=N+1}^{\infty}\left|x^j\right|^2}\right\} \leq \sup_{\|x\|=1}\left\{\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left|x^j\right|^2}\right\} = \sup_{\|x\|=1}\{\|x\|\} = 1\,,\end{aligned}$$

dove si è usata l'espressione della norma del vettore $|x\rangle$ come radice quadrata della serie dei moduli quadri delle componenti contro-varianti, cioè

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left|x^j\right|^2}\,.$$

Dimostriamo che la norma coincide con l'unità, osservando che esistono infiniti vettori unitari, sono quelli della base con indici maggiori o uguali a $N+1$, tali che, $\forall\, j \in \{N+1, N+2, \ldots\}$,

$$\left(\hat{I} - \sum_{k=1}^{N} |u_k\rangle\langle u_k|\right)|u_l\rangle = \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|\right)|u_l\rangle = \sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|u_l\rangle = \sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\delta^j_l = |u_l\rangle\,.$$

Scegliendo il primo, ovvero $|x\rangle = |u_{N+1}\rangle$, si ha

$$1 \geq \left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|\right\| = \sup_{\|x\|=1}\left\{\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|x\rangle\right\|\right\} \geq \left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|u_{N+1}\rangle\right\| = \|u_{N+1}\| = 1\,,$$

da cui

$$\left\|\hat{I} - \sum_{k=1}^{N} |u_k\rangle\langle u_k|\right\| = \left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|\right\| = 1\,.$$

Il limite richiesto è quello di una successione di unità e vale quindi uno, ovvero

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\hat{I} - \sum_{k=1}^{N} |u_k\rangle\langle u_k|\right\| = \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty} |u_j\rangle\langle u_j|\right\| = \lim_{N\to\infty} 1 = 1\,.$$