Metodi Matematici per la Fisica

Secondo appello invernale - 6 febbraio 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$🎙 = \mathrm{Pr}\int_0^{2\pi} \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta)+1}\, d\beta\,.$$

Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha due poli lungo il percorso d'integrazione, si hanno per

$$\tan(\beta_{1,2}) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \beta_1 = \frac{3}{4}\pi\,, \quad \beta_2 = \frac{7}{4}\pi\,.$$

Sono due poli semplici, infatti

$$\lim_{\beta\to\beta_{1,2}} \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta)+1}\left(\beta-\beta_{1,2}\right) = \lim_{\beta\to\beta_{1,2}} \frac{\tan(\beta_{1,2})}{1/\cos^2(\beta)} = \frac{-1}{1/2} = -2\,.$$

I punti $\beta = \pi/2$ e $\beta = 3\pi/2$, in cui la funzione tangente diverge, sono singolarità eliminabili, infatti si hanno

$$\lim_{\beta\to\pi/2} \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta)+1} = \lim_{\beta\to 3\pi/2} \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta)+1} = 1\,.$$

Riscriviamo la funzione integranda in termini delle funzioni seno e coseno

$$🎙 = \mathrm{Pr}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}(\beta)}{\mathrm{sen}(\beta)+\cos(\beta)}\, d\beta$$

e facciamo la sostituzione $e^{i\beta} = z$, da cui $\beta = -\ln(z)/i$ e $d\beta = -i dz/z$, l'integrale diventa

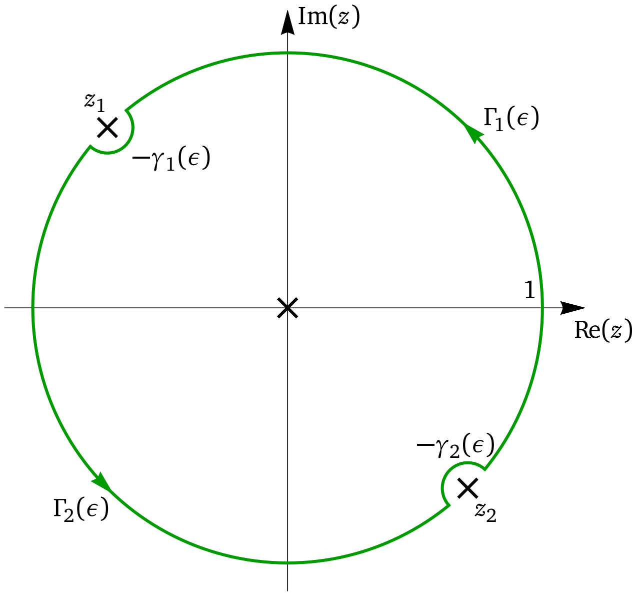
$$\begin{aligned}
🎙 &= -i\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z^2-1+(z^2+1)i}\frac{dz}{z} = -i\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z^2(1+i)-(1-i)}\frac{dz}{z} \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z^2 e^{i\pi/4}-e^{7i\pi/4}}\frac{dz}{z} = \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z^2-e^{3i\pi/2}}\frac{dz}{z}\,, \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}\,\mathrm{Pr}\oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z^2+i}\frac{dz}{z}\,.
\end{aligned}$$

Il poli semplici della funzione integranda nella variabile z, rispetto ai quali consideriamo il valore principale, sono nei punti $z_{1,2} = e^{i\beta_{1,2}}$, cioè $z_1 = e^{3i\pi/4}$ e $z_2 = e^{7i\pi/4}$, evidenziati in figura dai simboli "×". Studiamo l'integrale della stessa funzione integranda sul percorso chiuso

$$\Gamma_\epsilon = \Gamma_1(\epsilon)\cup\gamma_1(\epsilon)\cup\Gamma_2(\epsilon)\cup\gamma_2(\epsilon)\,,$$

dato dall'unione di quattro semicirconferenze due centrate nell'origine e di raggio unitario, due con centri in z_1 e z_2 di raggio ϵ. La curva è mostrata in verde nella figura. Questo integrale può essere calcolato usando il teorema dei residui e, indipendentemente dal valore di $\epsilon > 0$ e quindi anche nel limite $\epsilon \to 0^+$, vale

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} = \frac{\sqrt{2}\pi}{e^{i\pi/4}} \operatorname{Res}\left[\frac{z^2-1}{z^2+i}\frac{1}{z}, 0\right] = \frac{\sqrt{2}\, i\pi}{e^{i\pi/4}} .$$



Lo stesso integrale può essere definito come la somma dei quattro contributi relativi agli archi e si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} &= \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{\Gamma_1(\epsilon)\cup\Gamma_2(\epsilon)} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} + \int_{-\gamma_1(\epsilon)} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} + \int_{-\gamma_2(\epsilon)} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} \right) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \left(\Pr \oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} - \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_1(\epsilon)} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} - \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_2(\epsilon)} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} \right) . \end{aligned}$$

I valori dei limiti degli ultimi due integrali sono

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_1(\epsilon)} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} &= i\pi \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{z-e^{3i\pi/4}}{z} = i\pi \frac{e^{3i\pi/2}-1}{2e^{3i\pi/2}} = i\pi \frac{-i-1}{-2i} = \pi \frac{1+i}{2} ; \\ \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\gamma_2(\epsilon)} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} &= i\pi \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{z-e^{7i\pi/4}}{z} = i\pi \frac{e^{7i\pi/2}-1}{2e^{7i\pi/2}} = i\pi \frac{-i-1}{-2i} = \pi \frac{1+i}{2} . \end{aligned}$$

Usando l'espressione dell'integrale su Γ_ϵ ottenuta con il teorema dei residui e il precedente risultato, si ricava l'integrale in valore principale cercato come

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \Pr \oint_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z^2+i} \frac{dz}{z} = \frac{\sqrt{2}i\pi}{e^{i\pi 4}} + \pi(1+i) \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} ,$$

scrivendo il primo e secondo termine in rappresentazione cartesiana, ovvero nelle forme

$$\frac{\sqrt{2}}{e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} = 1-i , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \frac{1}{1+i} ,$$

si ha il risultato finale

$$= \frac{\sqrt{2}i\pi}{e^{i\pi 4}} + \pi(1+i) \frac{-i}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = i\pi(1-i) - i\pi = \pi .$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli il valore della derivata decima nel punto $z = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)}\,.$$

Suggerimento. Una possibilità è quella di usare la formula integrale di Cauchy.

Soluzione del secondo problema

Usiamo la formula integrale di Cauchy che permette di rappresentare la derivata n-esima di una funzione $f(z)$ analitica nel dominio semplicemente connesso D calcolata nel punto $z_0 \in D$ come l'integrale

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,,$$

dove $\gamma \subset D$ è una curva chiusa e differenziabile, che avvolge una sola volta il punto z_0, ovvero $n(z_0,\gamma) = 1$.
La funzione data è meromorfa, ha cinque poli semplici al finito corrispondenti alle due radici quadrate e alle tre radici terze di -1, ovvero agli elementi degli insiemi $\{z_+ = i, z_- = -i\}$ e $\left\{z_k = e^{(2k+1)i\pi/3}\right\}_{k=0}^{2}$.
Ne consegue che la derivata decima nel punto $z = 1$ può essere calcolata come

$$\frac{d^{10} f}{dz^{10}}(1) = \frac{10!}{2i\pi}\oint_{|z-1|=r} \frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}\,dz\,,$$

dove il raggio della circonferenza centrata nell'unità, che rappresenta il percorso d'integrazione, verifica la condizione: $0 < r < \min\{|1-z_-|, |1-z_+|, |1-z_0|, |1-z_1|, |1-z_2|\}$.
D'altro canto, l'integrale della stessa funzione integranda su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $R > 1$ vale

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=R} \frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}\,dz &= \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, 1\right] \\
&\quad + \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, -i\right] \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k\right] \\
&= \frac{1}{10!}\frac{d^{10} f}{dz^{10}}(1) \\
&\quad + \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, -i\right] \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k\right],
\end{aligned}$$

dove abbiamo scritto il residuo relativo al polo di ordine 11 nel punto $z = 1$ come la derivata decima, valutata nello stesso punto, divisa per 10!. Poiché, nel limite $R \to \infty$, l'integrale è infinitesimo, infatti, usando le disuguaglianze di Darboux e triangolare, con $R > 1$,

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=R} \frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}\,dz\right| \le \frac{R^5}{(R^2-1)(R^3-1)(R-1)^{11}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

dalla indennità precedente si ottiene la derivata cercata come

$$\begin{aligned}
\frac{d^{10} f}{dz^{10}}(1) = -10!\Bigg(&\operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, -i\right] \\
&+ \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k\right]\Bigg)\,.
\end{aligned}$$

I residui nei poli semplici $z_\pm = \pm i$ valgono

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, \pm i\right] &= \frac{(\pm i)^4}{\pm 2i\left((\pm i)^3+1\right)(\pm i-1)^{11}} = \frac{1}{\pm 2i\,(\mp i+1)\,(\pm i-1)^{11}} = \frac{1}{\pm 2i\,(\pm i-1)^{12}} \\ &= \frac{1}{\pm 2i\left(\sqrt{2}e^{\pm 3i\pi/4}\right)^{12}} = \frac{1}{\pm 2^7 i e^{\pm 9i\pi}} = \mp\frac{i}{2^7}\,,\end{aligned}$$

sono opposti, hanno quindi somma nulla.
I residui nei poli semplici $z_k = e^{(2k+1)i\pi/3}$, con $k=0,1,2$ sono

$$\begin{aligned}\text{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k\right] &= \frac{z_k^4}{(z_k^2+1)3z_k^2(z_k-1)^{11}} = \frac{z_k^3}{3z_k(z_k^2+1)(z_k-1)^{11}} = \frac{z_k^3}{3(z_k^3+z_k)(z_k-1)^{11}} \\ &= \frac{-1}{3(-1+z_k)(z_k-1)^{11}} = \frac{-1}{3(z_k-1)^{12}}\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità $z_k^3=-1$, $\forall\, k\in\{0,1,2\}$. Consideriamo i tre casi

$$\text{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k\right] = \begin{cases} \dfrac{-1}{3\left(-1/2+i\sqrt{3}/2\right)^{12}} = \dfrac{-1}{3\left(e^{2i\pi/3}\right)^{12}} = \dfrac{-1}{3e^{8i\pi}} = -\dfrac{1}{3} & k=0 \\ \dfrac{-1}{3(-2)^{12}} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2^{12}} & k=1 \\ \dfrac{-1}{3\left(-1/2-i\sqrt{3}/2\right)^{12}} = \dfrac{-1}{3\left(e^{5i\pi/3}\right)^{12}} = \dfrac{-1}{3e^{20i\pi}} = -\dfrac{1}{3} & k=2 \end{cases}\,.$$

In definitiva

$$\frac{d^{10}\text{\faShareAlt}}{dz^{10}}(1) = -10!\sum_{k=0}^{2}\text{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2+1)(z^3+1)(z-1)^{11}}, z_k\right] = \frac{10!}{3}\frac{2^{13}+1}{2^{12}} = 3^3\,5^2\,7\frac{2^{13}+1}{2^4}\,,$$

ovvero

$$\frac{d^{10}\text{\faShareAlt}}{dz^{10}}(1) = \frac{38711925}{16} = 2,4195\times 10^6\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\text{\faWifi}(z) = \frac{1}{(\operatorname{sen}(z)-1)^2}\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione $\text{\faWifi}(z)$ è un rapporto di funzioni intere è quindi meromorfa. Ha infiniti poli nei punti dell'insieme $\{z_k=(1+4k)\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Sono poli di ordine quattro come si evince dalla serie di Laurent centrata nel generico $z_k=(1+4k)\pi/2$, con $k\in\mathbb{Z}$. Al fine di calcolarla, scriviamo la funzione seno come

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(z-z_k+z_k) = \operatorname{sen}(z-z_k)\underbrace{\cos(z_k)}_{=0} + \cos(z-z_k)\underbrace{\operatorname{sen}(z_k)}_{=1} = \cos(z-z_k)\,.$$

Usando la serie di Taylor della funzione $\cos(z-z_k)$ centrata in $z=z_k$, si ha

$$\begin{aligned}\text{\faWifi}(z) &= \frac{1}{(\cos(z-z_k)-1)^2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}(z-z_k)^{2j}-1\right)^{-2} = \left(\frac{(z-z_k)^2}{2!}-\frac{(z-z_k)^4}{4!}+\cdots\right)^{-2} \\ &= \frac{4}{(z-z_k)^4}\left(1-2\frac{(z-z_k)^2}{4!}+2\frac{(z-z_k)^4}{6!}+\cdots\right)^{-2}\,.\end{aligned}$$

Il secondo fattore può essere interpretato come la derivata prima della somma della serie geometrica di ragione $\alpha = 2(z-z_k)^2/4! + 2(z-z_k)^4/6! + \cdots$, ovvero, con $|\alpha| < 1$,

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2} = \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{1-\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1}\,,$$

da cui si ha

$$\begin{aligned}
\wifi(z) &= \frac{4}{(z-z_k)^4}\left(1 - 2\frac{(z-z_k)^2}{4!} + 2\frac{(z-z_k)^4}{6!} + \cdots\right)^{-2} \\
&= \frac{4}{(z-z_k)^4}\left[1 + 2\left(2\frac{(z-z_k)^2}{4!} - 2\frac{(z-z_k)^4}{6!} + \cdots\right) + 3\left(2\frac{(z-z_k)^2}{4!} - 2\frac{(z-z_k)^4}{6!} + \cdots\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{4}{(z-z_k)^4} + \frac{2\cdot 2\cdot 4/4!}{(z-z_k)^2} + \mathcal{O}(1) \\
&= \frac{4}{(z-z_k)^4} + \frac{2/3}{(z-z_k)^2} + \mathcal{O}(1)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler ha la forma

$$\wifi(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{4}{(z-z_k)^4} + \frac{2/3}{(z-z_k)^2}\right) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{4}{(z-(1+4k)\pi/2)^4} + \frac{2/3}{(z-(1+4k)\pi/2)^2}\right),$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera della funzione $\wifi(z)$ e ha lo stesso comportamento asintotico, ovvero

$$\lim_{z\to\infty}\phi(z) = \lim_{z\to\infty}\wifi(z)\,.$$

Verifichiamo che la funzione $\wifi(z)$ è regolare all'infinito, studiandone il valore limite sui punti della successione $\{a_k = (z_k + z_{k+1})/2 = (3+4k)\pi/2\}_{k=0}^{\infty}$, i cui termini sono i punti medi dei segmenti di retta che hanno per estremi due poli successivi positivi e che ha, quindi, intersezione vuota con l'insieme dei poli e si accumula all'infinito, si ha

$$\lim_{k\to\infty}\wifi(a_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(\operatorname{sen}(z_k)-1)^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(\operatorname{sen}(3\pi/2+2k\pi)-1)^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(\operatorname{sen}(3\pi/2)-1)^2} = \frac{1}{4}\,.$$

Ne consegue che la funzione $\phi(z)$ è costante. Possiamo ottenerne il valore ϕ_0 come

$$\wifi(0) = \phi_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{4}{(1+4k)^4\pi^4/2^4} + \frac{2/3}{(1+4k)^2\pi^2/2^2}\right) = \phi_0 + \frac{64}{\pi^4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^4} + \frac{8}{3\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^2}\,,$$

poiché $\wifi(0) = 1$, si ottiene

$$\phi_0 = 1 - \frac{64}{\pi^4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^4} - \frac{8}{3\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^2}\,.$$

Calcoliamo le due serie precedenti usando il metodo dei residui. Per la prima si ha

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^4} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\,,$$

con $f(z) = 1/(1+4z)^4$. Studiamo, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2}\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^4}dz = \sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^4}, k\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^4}, -1/4\right],$$

nel limite $n \to \infty$, l'integrale è nullo quindi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^4}, k\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^4} = -\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^4}, -1/4\right].$$

La funzione integranda ha nel punto $z = -1/4$ un polo di ordine quattro, quindi

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^4}, -1/4\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{4^4(z+1/4)^4}, -1/4\right] = \frac{\pi}{3!\,4^4}\frac{d^3}{dz^3}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\bigg|_{z=-1/4},$$

la derivata terza è

$$\frac{d^3}{dz^3}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} = -\pi\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = 2\pi^2\frac{d}{dz}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}^3(\pi z)} = -2\pi^3\frac{\operatorname{sen}^2(\pi z)+3\cos^2(\pi z)}{\operatorname{sen}^4(\pi z)},$$

in $z = -1/4$ si ha

$$\frac{d^3}{dz^3}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\bigg|_{z=-1/4} = -2\pi^3\frac{1/2+3/2}{1/4} = -16\pi^3$$

e la somma della serie è

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^4} = -\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^4}, -1/4\right] = -\frac{\pi}{3!\,4^4}\left(-16\pi^3\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Per la somma della seconda serie usiamo la definizione

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k),$$

dove $g(z) = 1/(1+4z)^2$. Studiamo, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2}\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^2}dz = \sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^2}, k\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^2}, -1/4\right],$$

nel limite $n \to \infty$, l'integrale è nullo quindi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^2}, k\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^2} = -\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^2}, -1/4\right].$$

La funzione integranda ha nel punto $z = -1/4$ un polo doppio, quindi

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^2}, -1/4\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{4^2(z+1/4)^2}, -1/4\right] = \frac{\pi}{4^2}\frac{d}{dz}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\bigg|_{z=-1/4},$$

la derivata prima è

$$\frac{d}{dz}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)} = -\pi\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi z)},$$

in $z = -1/4$ si ha

$$\frac{d}{dz}\frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\bigg|_{z=-1/4} = -\pi\frac{1}{1/2} = -2\pi$$

e la somma della serie è

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^2} = -\operatorname{Res}\left[\frac{\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{(1+4z)^2}, -1/4\right] = -\frac{\pi}{4^2}(-2\pi) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Usando questi risultati si ottiene che il valore costante ϕ_0 è nullo, infatti

$$\phi_0 = 1 - \frac{64}{\pi^4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^4} - \frac{8}{3\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4k)^2} = 1 - \frac{64}{\pi^4}\frac{\pi^4}{96} - \frac{8}{3\pi^2}\frac{\pi^2}{8} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

In definitiva, lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\text{🛜}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{4}{(z-(1+4k)\pi/2)^4} + \frac{2/3}{(z-(1+4k)\pi/2)^2} \right).$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si consideri l'equazione differenziale operatoriale

$$i\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{E}|\psi(t)\rangle] ,$$

dove $|\psi(t)\rangle$ è il vettore incognito, dipendente dal parametro reale $t \in \mathbb{R}$, appartenente allo spazio di Hilbert bidimensionale H_2 in cui è definito l'operatore $\hat{E}$, che, rispetto alla base canonica, è rappresentato dalla matrice

$$\hat{E} \hookleftarrow E = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si ottenga la rappresentazione matriciale rispetto alla stessa base canonica del vettore dipendente dal parametro reale t, $|\psi(t)\rangle$, sapendo che

$$|\psi(0)\rangle \hookleftarrow \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quarto problema

La rappresentazione matriciale dell'equazione differenziale è

$$i\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{E}|\psi(t)\rangle \hookleftarrow i\frac{d\psi(t)}{dt} = E\psi(t).$$

L'operatore $\hat{E}$ è diagonalizzabile essendo hermitiano, come si evince dalla matrice simmetrica e reale che lo rappresenta rispetto a una base ortonormale. Ne consegue che esiste una matrice unitaria U, che diagonalizza la matrice E, ovvero tale che

$$U^\dagger E U = E_d = \mathrm{diag}\,(e_1, e_2)\,,$$

dove e_1 ed e_2 sono i due autovalori reali dell'operatore $\hat{E}$. Questi si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(E - eI) &= 0 \\ \frac{1}{25}\det\begin{pmatrix} 3-5e & -4 \\ -4 & -3-5e \end{pmatrix} &= 0 \\ -9 + 25e^2 - 16 &= 0 \\ e^2 - 1 &= 0\,, \end{aligned}$$

quindi $e_{1,2} = \mp 1$. Gli autovettori sono rappresentati dai vettori le cui componenti si ottengono come soluzioni dei due sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 3-5e_j & -4 \\ -4 & -3-5e_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2\,,$$

dove v_j^k indica la k-esima componente contro-variante del j-esimo vettore, con $k, j \in \{1, 2\}$. Posti $v_1^1 = v_2^1 = v$, con v reale positivo, si hanno le seconde componenti contro-varianti

$$v_j^2 = \frac{(3-5e_j)v}{4} = \begin{cases} 2v & j = 1,\ e_1 = -1 \\ \\ -v/2 & j = 2,\ e_2 = 1 \end{cases}.$$

Normalizzando all'unità, i vettori che rappresentano gli autovettori sono

$$v_1 = \frac{1}{v\sqrt{5}}\begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix} = \{v = 1\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{v\sqrt{5}/2}\begin{pmatrix} v \\ -v/2 \end{pmatrix} = \{v = 2\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante si ottiene allineando lungo le colonne le componenti degli autovettori normalizzati, cioè

$$U = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ \\ v_1^2 & v_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La versione diagonale dell'equazione differenziale si ottiene moltiplicando da sinistra per U l'equazione originaria e inserendo la matrice identità nella forma $I = UU^\dagger$ tra la matrice E e il vettore $\psi(t)$ a secondo membro. Si ha

$$U^\dagger i \frac{d\psi(t)}{dt} = U^\dagger E U U^\dagger \psi(t) \qquad \Rightarrow \qquad i \frac{d\psi_d(t)}{dt} = E_d \psi_d(t),$$

dove abbiamo definito il vettore

$$\psi_d(t) = U^\dagger \psi(t).$$

Poiché E_d è una matrice diagonale, l'equazione differenziale matriciale si separa in due equazioni scalari indipendenti per ciascuna delle componenti, ovvero si ha

$$i \begin{pmatrix} \dfrac{d\psi_d^1(t)}{dt} \\ \\ \dfrac{d\psi_d^2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \psi_d^1(t) \\ \\ e_2 \psi_d^2(t) \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} i \dfrac{d\psi_d^1(t)}{dt} = e_1 \psi_d^1(t) \\ \\ i \dfrac{d\psi_d^2(t)}{dt} = e_2 \psi_d^2(t) \end{cases},$$

dove $\psi_d^j(t)$, con $j = 1, 2$, indica la j-esima componente contro-variante del vettore $\psi_d(t)$. Integrando le due equazioni per le singole componenti si hanno le soluzioni

$$\psi_d^j(t) = \psi_d^j(0) e^{-ie_j t}, \qquad j = 1, 2,$$

quindi il vettore nella rappresentazione diagonale è

$$\psi_d(t) = \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) e^{-ie_1 t} \\ \\ \psi_d^2(0) e^{-ie_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) e^{it} \\ \\ \psi_d^2(0) e^{-it} \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione rispetto alla base canonica è data dalla trasformazione inversa tramite la matrice U, ovvero

$$\psi(t) = U\psi_d(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) e^{it} \\ \\ \psi_d^2(0) e^{-it} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) e^{it} + 2\psi_d^2(0) e^{-it} \\ \\ 2\psi_d^1(0) e^{it} - \psi_d^2(0) e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Le componenti della rappresentazione diagonale con $t = 0$ si ottengono, infine, dalla condizione

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

che implica

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \psi_d^1(0) + 2\psi_d^2(0) \\ \\ 2\psi_d^1(0) - \psi_d^2(0) \end{pmatrix},$$

da cui si ha il sistema lineare 2×2

$$\begin{cases} \psi_d^1(0) + 2\psi_d^2(0) = \sqrt{5/2} \\ \\ 2\psi_d^1(0) - \psi_d^2(0) = \sqrt{5/2} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \psi_d^1(0) &= \frac{\det \begin{pmatrix} \sqrt{5/2} & 2 \\ \sqrt{5/2} & -1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{-3\sqrt{5/2}}{-5} = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \\ \psi_d^2(0) &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5/2} \\ 2 & \sqrt{5/2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} = \frac{-\sqrt{5/2}}{-5} = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}.$$

Usando questi risultati si ha la soluzione

$$\psi(t) = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3e^{it} + 2e^{-it} \\ 6e^{it} - e^{-it} \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la matrice

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} B^{-1}(x)dx\,,$$

dove $B(x)$ è la matrice 3×3

$$B(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^4 + x^2 + 2 & -x^4 + x^2 & 0 \\ -x^4 + x^2 & x^4 + x^2 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^6 + 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La matrice $B(x)$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$ è hermitiana, quindi è diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice unitaria U tale che

$$U^\dagger B(x) U = B_d(x) = \operatorname{diag}\left(\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x)\right),$$

dove $\{\beta_k(z)\}_{k=1}^3$ è lo spettro discreto della matrice $B(x)$, i cui elementi, gli autovalori, sono funzioni di x. La rappresentazione diagonale della matrice A si ottiene come

$$A_d = U^\dagger A U = \int_{-\infty}^{\infty} B_d^{-1}(x)dx = \operatorname{diag}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_1(x)}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_2(x)}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\beta_3(x)}\right).$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice $B(x)$ come soluzioni dell'equazione secolare

$$\det\left(B(x) - \beta(x) I\right) = 0$$

$$\frac{1}{4}\det\begin{pmatrix} x^4 + x^2 + 2 - 2\beta(x) & -x^4 + x^2 & 0 \\ -x^4 + x^2 & x^4 + x^2 + 2 - 2\beta(x) & 0 \\ 0 & 0 & 2x^6 + 2 - 2\beta(x) \end{pmatrix} = 0\,,$$

posto: $r(x) = x^4 + x^2 + 2$, $s(x) = -x^4 + x^2$ e $t(x) = 2x^6 + 2$ e si ha

$$\det\begin{pmatrix} r(x) - 2\beta(x) & s(x) & 0 \\ s(x) & r(x) - 2\beta(x) & 0 \\ 0 & 0 & t(x) - 2\beta(x) \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[(r(x) - 2\beta(x))^2 - s^2(x)\right](t(x) - 2\beta(x)) = 0\,,$$

da cui

$$\beta_{1,2}(x) = \frac{r(s) \pm s(x)}{2} = \begin{cases} x^2 + 1 & k = 1 \\ x^4 + 1 & k = 2 \end{cases}, \qquad \beta_3(x) = \frac{t(x)}{2} = x^6 + 1\,.$$

La matrice diagonale A_d è

$$A_d = \operatorname{diag}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}\right).$$

I tre integrali posso essere calcolati usando il lemma di Jordan, considerando un percorso chiuso nel semipiano delle parti immaginarie positive, che include i poli delle funzioni integrande appartenenti a tale semipiano. Si hanno

$$\begin{aligned}
(A_d)^1_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2i\pi\, \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+1}, i\right] = 2i\pi \frac{1}{2i} = \pi\,; \\
(A_d)^2_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^4+1}, e^{3i\pi/4}\right]\right) = \frac{2i\pi}{4}\left(\left(e^{-i\pi/4}\right)^3 + \left(e^{-3i\pi/4}\right)^3\right) \\
&= \frac{i\pi}{2}\left(e^{-3i\pi/4} + e^{-i\pi/4}\right) = \frac{i\pi}{2}\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,; \\
(A_d)^3_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^6+1}, e^{i\pi/6}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^6+1}, e^{\pi/2}\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^6+1}, e^{5i\pi/6}\right]\right) \\
&= \frac{2i\pi}{6}\left(\left(e^{-i\pi/6}\right)^5 + \left(e^{-i\pi/2}\right)^5 + \left(e^{-5i\pi/6}\right)^5\right) \\
&= \frac{i\pi}{3}\left(e^{-5i\pi/6} + e^{-i\pi/2} + e^{-i\pi/6}\right) = \frac{i\pi}{3}\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{2} - i + \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\,,
\end{aligned}$$

quindi la rappresentazione diagonale della matrice è

$$A_d = \pi\, \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{3}\right).$$

Per ottenere la rappresentazione rispetto alla base canonica calcoliamo la matrice U, i cui elementi sono le componenti degli autovettori della matrice $B(x)$. Queste si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} r(x)-2\beta_k(x) & s(x) & 0 \\ s(x) & r(x)-2\beta_k(x) & 0 \\ 0 & 0 & t(x)-2\beta_k(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_k \\ b^2_k \\ b^3_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \{1,2,3\}\,,$$

dove b^j_k è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, con $j,k \in \{1,2,3\}$.
Per i primi due autovettori, con autovalori $\beta_{1,2}(x) = (r(X) \pm s(X))/2$, si hanno i sistemi

$$\begin{pmatrix} \mp s(x) & s(x) & 0 \\ s(x) & \mp s(x) & 0 \\ 0 & 0 & t(x)-r(x)\mp s(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_{1,2} \\ b^2_{1,2} \\ b^3_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

poiché la funzione $t(x) - r(x) \mp s(x)$ non è identicamente nulla in $\mathbb{R}$, si ha $b^3_1 = b^3_2 = 0$, inoltre, assegnando alle prime componenti il valore comune $b^1_1 = b^1_2 = v$, le seconde componenti sono $b^2_{1,2} = \pm v$. I primi due autovettori, scelto $v = 1$, sono

$$v_1 = \frac{1}{v\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{v\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per il terzo autovettore, che ha autovalore $\beta_3(x) = t(x)/2$, si ha

$$\begin{pmatrix} r(x)-t(x) & s(x) & 0 \\ s(x) & r(x)-t(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_3 \\ b^2_3 \\ b^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

in questo caso, poiché le funzioni $r(x) - t(x)$ e $s(x)$ sono diverse in $\mathbb{R}$, si ha $b^1_3 = b^2_3 = 0$, quindi, posto $b^3_3 = 1$, il terzo autovettore è

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante U ha elementi $U^j_k = v^j_k$, con $j,k \in \{1,2,3\}$. Ovvero, l'elemento della j-esima riga e k-esima colonna è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, quindi

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A si ottiene trasformando la matrice diagonale A_d come

$$\begin{aligned} A &= U A_d U^\dagger \\ &= \pi \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \pi \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \pi \begin{pmatrix} (1+1/\sqrt{2})/2 & (1-1/\sqrt{2})/2 & 0 \\ (1-1/\sqrt{2})/2 & (1+1/\sqrt{2})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che, dati due operatori diagonalizzabili $\hat{A}$ e $\hat{B}$ vale la disuguaglianza

$$\left|\mathrm{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right)\right|^2 \le \mathrm{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right) \mathrm{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right).$$

Si dimostri, inoltre, che nel caso di un operatore normale $\hat{T}$, definito in uno spazio di Hilbert a $N \in \mathbb{N}$ dimensioni, vale la relazione

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{T}^\dagger \hat{T}\right) = \sum_{k,j=1}^{N} \left|T^j_k\right|^2 = \sum_{j=1}^{N} \left|\tau_j\right|^2,$$

dove T^j_k è l'elemento della j-esima riga e k-esima colonna della matrice $N \times N$ che rappresenta l'operatore rispetto alla base canonica e l'insieme $\{\tau_j\}_{j=1}^N$ è lo spettro discreto dello stesso operatore. Infine si verifichi la relazione nel caso particolare in cui $N = 3$ e

$$T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

è la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{T}$ rispetto alla base canonica.

Soluzione del sesto Problema

Usiamo la procedura adottata per la dimostrazione della disuguaglianza di Schwarz. Definiamo un operatore di lavoro

$$\hat{C} = \hat{A} + t\, \mathrm{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{A}\right) \hat{B},$$

dove t è un parametro reale. Calcoliamo la traccia $\mathrm{Tr}\left(\hat{C}^\dagger \hat{C}\right)$, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\hat{C}^\dagger \hat{C}\right) &= \mathrm{Tr}\left[\left(\hat{A}^\dagger + t\, \mathrm{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right) \hat{B}^\dagger\right)\left(\hat{A} + t\, \mathrm{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{A}\right) \hat{B}\right)\right] \\ &= \mathrm{Tr}\Big(\hat{A}^\dagger \hat{A} + t^2\, \mathrm{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right) \mathrm{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{A}\right) \hat{B}^\dagger \hat{B} + t\, \mathrm{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{A}\right) \hat{A}^\dagger \hat{B} + t\, \mathrm{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right) \hat{B}^\dagger \hat{A}\Big) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right) + t^2 \underbrace{\mathrm{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right) \mathrm{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{A}\right)}_{=\left|\mathrm{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})\right|^2} \mathrm{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right) + 2t \underbrace{\mathrm{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right) \mathrm{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{A}\right)}_{=\left|\mathrm{Tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B})\right|^2}. \end{aligned}$$

Dimostriamo che, in generale, ovvero, per ogni operatore $\hat{O}$ diagonalizzabile, definito in uno spazio di Hilbert a $N \in \mathbb{N}$ dimensioni, si ha: $\operatorname{Tr}\left(\hat{O}^\dagger \hat{O}\right) \geq 0$. Poiché la traccia è invariante, cioè non dipende dalla rappresentazione, la calcoliamo usando una generica rappresentazione e indichiamo con O la matrice $N \times N$ che rappresenta lo stesso operatore. Ne consegue che la traccia può essere calcolata come

$$\operatorname{Tr}\left(\hat{O}^\dagger \hat{O}\right) = \left(O^\dagger O\right)^k_k = \left(O^\dagger\right)^k_j O^j_k = \sum_{k,j=1}^{N} O^{j*}_k O^j_k = \sum_{k,j=1}^{N} \left|O^j_k\right|^2 \geq 0 \,,$$

dove abbiamo considerato la somma sottintesa per le coppie di indici ripetuti in posizione covariante e controvariante. La disuguaglianza finale è immediata in quanto si ha la somma di moduli quadri, che sono quantità reali non negative. La traccia, oggetto della dimostrazione, è quindi non negativa così come le tracce $\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right)$ e $\operatorname{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right)$. Si ha quindi che la stessa traccia

$$\operatorname{Tr}\left(\hat{C}^\dagger \hat{C}\right) = t^2 \left|\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right)\right|^2 \operatorname{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right) + 2t \left|\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right)\right|^2 + \operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right) ,$$

rappresenta un polinomio di secondo grado nella variabile reale t, con coefficienti non negativi, che risulta non negativo $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Riportandone i valori lungo l'asse delle ordinate di un piano cartesiano, in funzione del parametro reale t, rappresentato sull'asse delle ascisse, si ottiene una parabola con la concavità rivolta verso l'alto, poiché il coefficiente di t^2 è non negativo, che o appartiene strettamente al semipiano delle ascisse positive, se $\operatorname{Tr}\left(\hat{C}^\dagger \hat{C}\right) > 0$, ovvero è tangente all'asse delle ascisse, se invece $\operatorname{Tr}\left(\hat{C}^\dagger \hat{C}\right) = 0$. Ne consegue che il discriminante deve verificare la disuguaglianza

$$\left(\frac{[\text{coefficiente di } t\,]}{2}\right)^2 - [\text{coefficiente di } t^2][\text{termine noto}] \leq 0 \,,$$

in particolare, è strettamente minore di zero, se $\operatorname{Tr}\left(\hat{C}^\dagger \hat{C}\right) > 0$, uguale a zero, se invece $\operatorname{Tr}\left(\hat{C}^\dagger \hat{C}\right) = 0$. La disuguaglianza con i coefficienti ottenuti è

$$\left|\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right)\right|^4 - \left|\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right)\right|^2 \operatorname{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right) \operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right) \leq 0 \,,$$

che, dividendo per $\left|\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right)\right|^2 \geq 0$, implica la disuguaglianza cercata, cioè

$$\left|\operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{B}\right)\right|^2 \leq \operatorname{Tr}\left(\hat{B}^\dagger \hat{B}\right) \operatorname{Tr}\left(\hat{A}^\dagger \hat{A}\right) .$$

Nel caso dell'operatore normale $\hat{T}$, come già dimostrato per un generico operatore diagonalizzabile, si ha che, detta T la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica e indicando con T^j_k l'elemento della j-esima riga e k-esima colonna della stessa matrice, vale l'identità

$$\operatorname{Tr}\left(\hat{T}^\dagger \hat{T}\right) = \sum_{k,j=1}^{N} \left|T^j_k\right|^2 .$$

L'operatore è normale, commuta, quindi, con il suo aggiunto, ciò implica che i due operatori $\hat{T}$ e $\hat{T}^\dagger$ siano diagonalizzabili simultaneamente, ovvero che siano rappresentati rispetto alla stessa base ortonormale di autovettori comuni da matrici diagonali, che sono l'una la coniugata complessa dell'altra, ovvero, indicando con $\{|t_k\rangle\}_{k=1}^N$ l'insieme ortonormale degli autovettori comuni, si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{T}|t_k\rangle = \tau_k |t_k\rangle \,, \qquad \hat{T}^\dagger |t_k\rangle = \tau^*_k |t_k\rangle \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\} .$$

Le matrici diagonali, che li rappresentano rispetto alla base degli autovettori, sono

$$\hat{T} \overset{t}{\hookleftarrow} T_d = \operatorname{diag}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) \,, \qquad \hat{T}^\dagger \overset{t}{\hookleftarrow} T^\dagger_d = T^*_d = \operatorname{diag}\left(\tau^*_1, \tau^*_2, \ldots, \tau^*_N\right) .$$

Poiché la traccia è invariante, cioè non dipende dalla rappresentazione, possiamo calcolarne il valore considerando nella rappresentazione diagonale e si ha l'identità richiesta, infatti

$$\operatorname{Tr}\left(\hat{T}^\dagger \hat{T}\right) = \sum_{k,j=1}^{N} \left|(T_d)^j_k\right|^2 = \sum_{k,j=1}^{N} \left|\delta^j_k \tau_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{N} \left|\tau_j\right|^2 .$$

Per verificarla, nel caso particolare del problema, calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione secolare

$$
\begin{aligned}
\det(T - I\tau) &= 0 \\
\frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} 4-3\tau & 4 & 1 \\ 4 & 1-3\tau & 4 \\ 1 & 4 & 4-3\tau \end{pmatrix} &= 0 \\
\frac{(4-3\tau)[(1-3\tau)(4-3\tau)-16]-4[4(4-3\tau)-4]+16-1+3\tau}{27} &= 0 \\
\frac{(4-3\tau)\left(9\tau^2-15\tau-12\right)+51\tau-33}{27} &= 0 \\
-\tau^3+3\tau^2+\tau-3 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

È immediato verificare che $\tau_1 = -1$ è una soluzione per cui si ha

$$
-\tau^3+3\tau^2+\tau-3 = -(\tau+1)\left(\tau^2-4\tau+3\right) = 0\,,
$$

ne consegue che le altre due soluzioni sono $\tau_2 = 1$ e $\tau_3 = 3$. La somma dei moduli quadri di questi autovalori è

$$
\sum_{k=1}^{3} |\tau_k|^2 = 11\,.
$$

Ta traccia del prodotto della matrice aggiunta $T^\dagger$ e la stessa matrice T ha lo stesso valore, infatti

$$
\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{9}\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 33 & 24 & 24 \\ 24 & 33 & 24 \\ 24 & 24 & 33 \end{pmatrix}\right] = \frac{99}{9} = 11\,.
$$

Abbiamo così dimostrato l'identità cercata nel caso particolare proposto dal problema.